< 総 説 >

（受理：平成 30 年 8 月 16 日）

高延性接着剤弾粘塑性構成式の汎用 FEM への導入

上 森 武*

1. 緒 言

近年、自動車産業を中心に、金属、非金属、さらには樹脂材料を構成部材とし、強度を保ちつつ軽量化を図るマルチマテリアル化が求められている。機械構造用部品のマルチマテリアル化において、大きな問題の 1 つに異種材料間の締結技術がある¹⁾。特に、機械構造物の強度を決定する異種材料間接合法やその強度評価法やその予測法に対する要求は年々その厳しさを増している。その理由として、異種材料間接合部における強度評価は、構造全体の強度設計上、事前に予測することが求められているが、コンピュータ演算速度が格段に向上した現在に至っても、十分満足いく解析結果が得られていないからである。これは、異種材料を構成する各材料の応力-ひずみ関係の精度など様々な問題も存在するが、とりわけ、異種材料を接合する接着剤の複雑な材料変形・強度特性を精度良く再現できていないこと、その解析手法が確立していないことに起因する。最近では一部の汎用 FEM にて、高延性接着剤の弾粘塑性変形挙動を再現可能な TAPO モデルなどが使用可能となってきた²⁾が、ユーザフレンドリとは言い難い。つまり、接着剤の力学的応答や材料モデルを解析的に検討するためには、研究者が FEM コードの開発も比較的容易に行える環境作りが必要である。特に、接着剤の応力解析の分野では、接着剤の非常に複雑な変形挙動を高精度に再現する材料モデルについて、研究者が独自の FEM コードを用いて検討している例もあり、本分野の更なる発展を考えた場合、商用 FEM を用いた材料モデルの検討やその応力解析の遂行も必要である。

そこで本総説では、接着剤の応力解析を汎用 FEM にて行うために、一般的に変形特性が非常に複雑である高延性接着剤の弾粘塑性材料モデルを汎用 FEM に導入する種々の手法について解説・提示する。

2. 商用有限要素解析ソフトウェア

2.1 陽解法と陰解法

FEM 応力解析をどのようなソフトウェアを用いて実行するのかにより、開発するユーザーサブルーチン名は異なるが、普段使用しているソフトウェアが動的解析（陽解法）とするか準静的解析（陰解法）とするか？で大まかに開発する内容を分けることができる。まずは、陽解法と陰解法の違いについて簡単に説明する。陽解法は、現在の時刻 t における値を基にして時刻 $t + \Delta t$ の値を数学的に求解し、それを繰り返していく方法である。時刻 Δt だけ進んだ未来（時間増分 Δt 後）の事を予測するため、比較的簡単な計算である反面、時間増分 Δt を大きくとると、理論解との誤差が大きくなる。そのため、時間増分 Δt を小さく（計算ステップを大きく）設定する必要がある。一方、陰解法は、時刻増分 Δt 経過した時点における物理量が正しいかどうかを場の支配方程式を用いて、誤差が無くなるよう収束させていくという方法である。この場合、解が収束すれば、陽解法で説明したような微小な時間増分の設定は不要であるため、1 ステップあたりの時間増分量は多くでき、結果として、計算ステップ数は少なくできる。

2.2 ユーザーサブルーチンの種類

ユーザーサブルーチンを開発する際、陽解法（LS-DYNA³⁾ など）を用いて、3 次元の材料モデルの導入を行う場

上 森 武

経歴：経歴：2001 年 3 月広島大学大学院工学研究科博士課程後期材料工学専攻修了（博士（工学））。同年 4 月広島大学工学部助手。2008 年 3 月近畿大学工学部機械工学科講師。2014 年 12 月岡山大学大学院自然科学研究科准教授。

専門：弾塑性力学、塑性加工学
趣味：読書

*岡山大学 大学院自然科学研究科 産業創成工学専攻
山県岡山市津島中 3-1-1 〒700-8530

合, 6 成分の Cauchy 応力テンソルを計算すれば良い。また, 準静的解析 (ABAQUS⁴⁾ や ANSYS⁵⁾ など) を用いて, 材料モデルの導入を行う場合, 上記 6 成分の応力テンソルに加え, 接線係数テンソル (6×6 行列, 合計 36 成分) も同時に計算する。これは物体の力の釣り合い条件を計算するために必要な物理量となる。Fig. 1 に, 各種ソフトウェアの材料モデル開発で使用するユーザーサブルーチン名を代表的なソフトウェア毎に示す。

2.3 応力計算

商用静的陰解法を使用してユーザーサブルーチンを開発するにあたり, 必要な物理量は, Cauchy 応力テンソル σ_{ij} , 接線係数テンソル D_{ijkl} , そして加工硬化にかかわる物理量 (例えば, 累積非弾性ひずみ ε_{ij}^p や背応力 α_{ij}) が一般的である。接線係数テンソル D_{ijkl} の成分は通常 36 成分であるが, それを除くほとんどのテンソルは 6 成分である。FEM で使用する物理量は, Newton-Raphson 法などの収束計算にて応力を求解する際に同時に求められる。また, そこから得ら

れた物理量から収束計算を行わず, 接線係数テンソル D_{ijkl} を計算するのが一般的解法である^{6,7)}。この手法の概念を Fig. 2 に示す。

収束計算においては, 次ステップの正解応力値 σ_{ij} を以下のように求める。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(k+1)} &= D_{ijkl}^e \left(\varepsilon_{kl}^{(k+1)} - \varepsilon_{kl}^{p(k+1)} \right) \\ &= D_{ijkl}^e \left(\varepsilon_{kl}^{(k)} + d\varepsilon_{kl}^{(k)} - \varepsilon_{kl}^{p(k)} - d\varepsilon_{kl}^{p(k)} \right) \\ &= D_{ijkl}^e \left(\varepsilon_{kl}^{(k)} - \varepsilon_{kl}^{p(k)} + d\varepsilon_{kl}^{(k)} - d\varepsilon_{kl}^{p(k)} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}&= D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^{e(k)} + D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^{(k)} - D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^{p(k)} \\ &= \sigma_{ij}^{(k)} + D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^{(k)} - D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^{p(k)} \\ \sigma_{ij}^{(k+1)} &= \sigma_{ij}^{Trial} - D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^{p(k)}\end{aligned}\quad (2)$$

ここで, 上付き (k) は k 回目の収束計算, D_{ijkl}^e は弾性マトリクス, ε_{kl}^e は弾性ひずみテンソル, ε_{kl}^p は非弾性ひずみテンソルである。また, σ_{ij}^{Trial} は試行的応力テンソルと呼ばれ, 次ステップにおける変形が全て弾性変形であると仮定した際に得られる最大応力であり, 収束計算の起点とな

Fig. 1 Commercial finite element methods.

Fig. 2 Schematic illustration of CPP and its flow chart.

る。なお、式 (1) を展開するに当り、ひずみの弾性・非弾性分解を用いた。収束計算では式 (2) を満足する非弾性ひずみ増分 $d\varepsilon_{kl}^{p(k)}$ を求めるが、非弾性変形を塑性変形と仮定した場合、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{kl}^{p(k)}$ は、関連流動則より、

$$d\varepsilon_{kl}^{p(k)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}^{(k)}} d\lambda \quad (3)$$

で求められることが多い。ここで、 Φ は降伏関数、 $d\lambda$ は比例定数である。なお、比例定数 $d\lambda$ は、降伏関数を 1 次形式で示せば、非弾性ひずみ増分の相当量 $d\bar{\varepsilon}^p$ となる。式 (3) 中の降伏関数の応力テンソルによる 1 階偏微分は、Cauchy 応力テンソル σ_{ij} で表される物理量となるため、式 (2) を用いて収束計算を行う場合、比例定数 $d\lambda$ が未知変数となる。式 (2) と式 (3) の関係式より、

$$\sigma_{ij}^{(k+1)} = \sigma_{ij}^{Trial} - D_{ijkl}^e \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}^{(k+1)}} d\lambda \quad (4)$$

が得られる。複雑な加工硬化則 (例えば、移動硬化) を用いる場合なども、上の式に加工硬化の条件を追加していけば問題無い。

2.4 収束計算

式 (4) で示した Cauchy 応力テンソル σ_{ij} を収束計算で求めるためには、Taylor 展開を使用する Closest Point Projection 法 (以下、CPP 法) と複素数階微分法などを使用すると良い。まず、CPP 法について説明する^{6,7)}。

$$F_1^{(k+1)} = F_1^{(k)} + d \left(\sigma_{ij}^{(k+1)} - \sigma_{ij}^{Trial} + D_{ijkl}^e \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}^{(k)}} d\lambda \right) = 0, \quad (5)$$

$$F_1^{(k)} \neq 0$$

となるように式 (4) を変形する。ここで、上付き (k) は k 回目の収束計算であることを示す。また、塑性ポテンシャルに関する数式においても同様に Taylor 展開を行う。

$$F_2^{(k+1)} = F_2^{(k)} + d \left\{ \Phi^{(k+1)} - C \left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^{p(k+1)} \right)^n \right\} = 0 \quad (6)$$

最終的に、式 (5) と式 (6) を同時満足する比例定数 $d\lambda$ の補正項 $\delta d\lambda$ が次式として得られる。

$$\delta d\lambda = \frac{\Phi^{(k)} - \left(\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}^{(k+1)}} \right)^T A_{ijkl}^{(k)} F_{kl}^{(k)}}{\left(\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}^{(k+1)}} \right)^T A_{mnop}^{(k)} D_{opqr}^{(k)} \left(\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_{qr}^{(k+1)}} \right) + nC \left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^{p(k+1)} \right)^{n-1}} \quad (7)$$

ただし、

$$A_{ijkl}^{(k)} = \left[I_{ijkl} + D_{ijmn}^e \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}^{(k+1)} \partial \sigma_{kl}^{(k+1)}} \right\} \right]^{-1} \quad (8)$$

である。ここで、 I_{ijkl} は単位テンソル (6×6 行列, 36 成分を持つ単位行列) である。

2.5 接線係数マトリクス

接線係数マトリクスは、塑性ポテンシャルに対する適応の条件

$$d\Phi^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \kappa_{ij}} d\kappa_{ij} + \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \theta} d\theta + \dots = 0 \quad (9)$$

と式 (7) および式 (8) より、

$$D_{ijkl} = A_{ijef} D_{efkl}^e - \quad (10)$$

$$A_{ijab} D_{abcd}^e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{cd}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{vw}} \right)^T A_{vwxy} D_{xykl}^e \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{mn}} \right)^T A_{mnop} D_{opqr}^e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{qr}} \right) + nC \left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^{p(k+1)} \right)^{n-1}$$

となる。上式で表される D_{ijkl} は有限時間増分における接線係数であり、商用有限要素法において、安定的な解析解を得るために必要なもの (Consistent) である。また、上の方法は、接線係数テンソルを求める一般的な手法であるが、使用する材料モデルが複雑化すると非常に複雑なテンソル計算となり、導出に困難を伴う欠点もある。

2.6 複素数階微分法

上記手法の欠点を克服する手法として、田中らにより複素数階偏微分法が提案されている^{8~10)}。本手法は、式 (9) で示す計算を行わず、接線係数マトリクス D_{ijkl} を精度良く数値計算する手法である。具体的には、複素数階微分法は、ひずみの関数である応力テンソル $\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$ の 1 階微分である D マトリクス $\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}}$ を、複素数 ($i = \sqrt{-1}$ 虚数単位に相当する) と Taylor 展開により、高精度な数値解として導出する手法である。この手法の概念を Fig. 3 に示す。本手法を用いることで、弾性、弾塑性、弾粘塑性など変形が異なる場合であっても、汎用 FEM へ導入を可能とする利点を有する。FEM 解析に必要な D マトリクスを数値近似する際に、応力テンソル $\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$ に複素数と微小変動量を応力テンソルに適用後 Taylor 展開を適用すると以下のように表される (都合上 3 次偏微分までの記載とする)。

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + ih) = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}) + \quad (11)$$

$$ih \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}} - \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}^2} - i \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}^3} + \dots$$

上式において、複素数に関与する項だけを抽出すると、

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + ih) = h \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}^3} + \dots \quad (12)$$

となる。また、上式において通常、微小変動量程度であるため、式 (12) を変形し、 h で除することで接線係数マトリクス D_{ijkl} を計算することが可能となる。

Fig. 3 Flow chart of CSDA.

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\text{Im}[\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + ih)]}{h} + \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}^3} + \dots \quad (13)$$

ここで、Im は複素数の虚数部分を取り出す演算子である。この理論によって、あらゆる材料モデルにおいて複雑なテンソルを必要とする接線係数マトリクス D を前述した理論展開を行わずに求解可能とする。

なお、 h の値の設定にも依存するが、本理論では、 $\frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}^3}$ の項、つまり、接線係数マトリクス D_{ijkl} を h^2 程度の誤差で高精度に求解できる。

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}} \approx \frac{\text{Im}[\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + ih)]}{h} \quad (14)$$

3. 高延性接着剤の FEM 解析例

今回の総説では、電気化学工業(株)製 M-372-20 ハードロック接着材の変形挙動を検討する。今回解析に使用する高延性接着剤の構成方程式を以下に示す。本材料は、せん断変形特性を再現するために、相当応力 $\bar{\sigma}$ は、通常の金属材料で使用される von Mises の降伏関数ではなく、吉田ら¹¹⁾が提案したせん断変形の係数を 0.81 とした以下のものを使用する。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\sigma_{xx} - \alpha_{xx} - (\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) \right)^2 + \left(\sigma_{yy} - \alpha_{yy} - (\sigma_{zz} - \alpha_{zz}) \right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \alpha_{zz} - (\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) \right)^2 \right\} + 0.81 \left\{ (\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2 + (\tau_{yz} - \alpha_{yz})^2 + (\tau_{zx} - \alpha_{zx})^2 \right\}} \quad (15)$$

ここで、 σ_{ij} は Cauchy 応力テンソル、 α_{ij} は背応力テンソルである。また、接着材の変形速度依存性を再現するため、

以下で定義される超過応力によって表される相当粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^{vp}$ を使用している。

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - K}{D} \right\rangle^m \quad (16)$$

ここで、 K 、 D 、 m は材料定数であり、 $\langle \rangle$ は Maculey's bracket である。上記数式中の背応力は、以下の 3 つの項にて表される。

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)} + \alpha_{ij}^{(2)} + \beta_{ij} \quad (17)$$

背応力 $\alpha_{ij}^{(1)}$ は、以下で定義される Armstrong-Frederick 型の発展式を使用した。

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(1)} = C^{(1)} \left(a_{ij}^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} - \alpha_{ij}^{(1)} \dot{\varepsilon}^{vp} \right) \quad (18)$$

ここで、 $C^{(1)}$ は材料定数であり、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ は各方向の粘塑性ひずみ速度テンソルを表している。背応力の発展式中の $a^{(1)}$ は、以下の定義に従って発展する加工硬化量を表す。

$$a^{(1)} = a_0^{(1)} - \left(a_0^{(1)} - a_a^{(1)} \right) \left[1 - \exp(-\xi \bar{\varepsilon}^{vp}) \right] \quad (19)$$

$$\bar{\varepsilon}^{vp} = \int \dot{\varepsilon}^{vp} dt \quad (20)$$

ここで、 $a_0^{(1)}$ 、 $a_a^{(1)}$ は加工硬化量の初期値と収束値を表す材料定数、 ξ は収束速度を表す材料定数である。この式はアクリル樹脂の変形挙動（繰返し加工軟化する材料を仮定）を表す。また、 $\bar{\varepsilon}^{vp}$ は相当粘塑性ひずみである。

背応力は、 $a_y^{(2)}$ ゴムの変形挙動（応力の急増）を表している。

$$\alpha_{ij}^{(2)} = a_0^{(2)} \left\{ 1 - \exp \left(-C^{(2)} \left| \bar{\varepsilon}^{vp} \right| \right) \right\} \text{sgn}(\bar{\varepsilon}^{vp}) \quad (21)$$

$$a_0^{(2)} = a_{0.002}^{(2)} \left| \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\dot{\varepsilon}_0^{vp}} \right|^b \quad (22)$$

$$a^{(1)} + a^{(2)} = \text{const} \quad (23)$$

ここで、 $a_{0.002}^{(2)}$ は、塑性ひずみ 0.002 の時に決定される $a_0^{(2)}$ 値であり、相当粘塑性ひずみ速度 $\bar{\varepsilon}^{vp}$ に依存した物理量となる。また、 $C^{(2)}$ 、 b は材料パラメータである。また、上記背応力テンソルが収束した後の接着剤の加工硬化挙動を再現する背応力 $a_y^{(1)}$ は、非弾性ひずみに対して線形的に加工硬化する

$$\dot{\beta} = H' \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (24)$$

を同時に考慮する。ここで、 H' は材料パラメータである。

4. 解析例および考察

4.1 接着積層板の 3 点曲げ解析

このような複雑な構成方程式を導入した汎用 FEM による数値解析例を Fig. 4 示す。本数値解析例は、厚さ 0.2mm の接着層を持つ計 1.0mm の異種金属接着積層板材（解析

Fig. 4 Schematic illustration of 3 point bending analysis.

では純チタンと純アルミニウム板材から構成されている仮想積層材)の3点曲げFEM解析である。計算時間を極力短縮するために、板材は右側半分だけを有限要素モデルで再現し、パンチおよびダイスは、剛体とし接着積層材料との間は無摩擦を仮定している。また、パンチおよび支点の半径はともに10mmとし、上記板材と剛体が接触した状態からパンチを速度1.0mm/minにて下降させることで積層材を曲げている。解析に用いた有限要素は、金属材料と接着剤間のはく離などを考慮せず、接着積層板材を構成する金属、接着剤ともに同じ4節点選択低減積分要素とし、材料特性だけ変更することで接着積層材を再現している。なお、接着剤のみ商用ユーザーサブルーチンに上記移動硬化則を導入し、接着積層材を構成する金属板材はデフォルトの弾塑性材料構成式(等方硬化則)に適切な材料定数を入力して解析を行っている。

なお、本解析で用いた材料構成式中の材料パラメータは、せん断試験(単純、繰返し)結果から得られたせん断応力—せん断ひずみ関係を精度良く再現可能な数値を用いた。本総説においては、上述した複素数階偏微分法により非弾性 D マトリクスの計算を行ったが、本資料において上記手法を用いることは、工具接触解析を安定して実行できること示すことができた。また、Fig. 5に曲げ加工後(スプリングバック後)における積層材の最終形状を示す。従来のデフォルト(材料全てをvon Mises材を仮定した)設定で計算していた解析結果よりも解析精度の改善が確認されている。

5. 結 言

本研究では、接着剤の有限要素解析を可能にするため、発展著しい商用FEMへ構成方程式を導入する手法の提案、そして導入を行った。高精度な接着剤の構成方程式を商用FEMに導入

Fig. 5 Final shape of blank after springback.

する手法として、複素数階偏微分法は有用であることが確認できた。その理由として、高精度な非弾性接線係数マトリクスを高精度に数値解析で求められること、また安定した工具接触解析を実現していることが挙げられる。

文 献

- 1) S. T. Amancio-Filho, L. A. Blaga, "Joining of Polymer – Metal Hybrid Structure –Principle and Applications–", John Wiley & Sons, Inc., Hoboken (2018).
- 2) LS-DYNA Keyword User's Manual Volume II Material Models (r:9384), Livemore Software Technology Corporation, California (2018).
- 3) LS-DYNA Keyword User's Manual Volume I Material Models (r:9384), Livemore Software Technology Corporation,

- California (2018).
- 4) ABAQUS Theory Manual Version 6.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, inc.
- 5) ANSYS, Help Reference, Version 12.0.
- 6) C. Miehe, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **134**, 3-4, 223 (1996).
- 7) J.C. Simo, T.J.R. Hughes, "Computational Inelasticity", Springer (1998).
- 8) 田中真人, 藤川正毅, 日本機械学会論文集 A 編, **77**, 773 (2011).
- 9) 田中真人, 藤川正毅, 儀間麻衣, 計算工学講演会論文集, p.17 (2012).
- 10) M. Tanaka, H. Noguchi, M. Fujikawa, M. Sato, S. Oi, T. Kobayashi, K. Furuichi, S. Ishimaru, C. Nonomur, *Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)*, **62**, 3 (2010).
- 11) T. Yoshida, M. Takiguchi, F. Yoshida, *Key Engineering Materials*, **274-276**, 993 (2004).

<Review>

Implementation of Elasto Visco-plastic Constitutive Equations for High Ductile Adhesion into Commercial Finite Element Method

Takeshi UEMORI *

* Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University,
3-1-1, Tsushima-naka, Kita-ku Okayama 700-8530 Japan
(Accepted for publication : August 16, 2018)

Abstract

This paper shows the technique to implement constitutive equations for adhesions into the commercial finite element methods. This reports deals with the two types of implementations; (a) the existing conventional method (closest point projection, CPP) deal and (b) the new proposed method by using the complex step derivative approximations (CSDA). The calculated result by 3 point bending process by the propose method was also exhibited. It was found that the stable finite element calculation with the high accurate constitutive equation by CSDA was realized. The calculation also showed that the present method with consideration of the equations enable us to provide more accurate finite element calculation than the conventional calculation.

Key words : Constitutive equations, Finite element method, Complex step derivative approximations