思考ツールとしての最小律

高見晋一

(近畿大学農学部)

The Law of the Minimum as a Thinking Tool

Shinichi TAKAMI

(School of Agriculture, Kinki University, Nakamachi 3327-204, Nara, 631-8505 Japan)

Abstract

The law of the minimum, reputedly originally conceived by Justus von Liebig more than one hundred fifty years ago, is a powerful tool in understanding processes with unknown details. The objective of this study was to provide a rationale and some evidence for such a claim. To do so, I assume that the law of the minimum is to be specified as the linear response and plateau (LRP) model: $Y = \min \{X, U\}$, where X is the limiting variable when it is smaller than U , and U the limiting variable when it is smaller than X . These variables may be either stocks or flows. The study shows that the law thus specified has nothing to do with empiricism but is purely a form of thinking that can be intuitively or logically understood by anyone. As such, it can be applied not only to biological, chemical, and physical processes of academic interests, but also to various processes in our daily lives. In this article, the following examples were given: (ii) the dry-matter partition associated with crop production, (i) crop growth in an environment of abundant resources, and (iii) evapotranspiration in relation to precipitation and net radiation. The law of the minimum is also shown to be useful in analyzing the relationship between sink and source variables to identify the limiting factor.

Key words: Limiting variables, Linear response and plateau model, von Liebig.

キーワード: LRPモデル, リービッヒ, 律速要因

1. はじめに

私達は、いくらお腹一杯たべても、必須のアミノ酸やビタミンの一つでも不足すると、満身に成長できなかったり、正常に活動できなくなることを知っている。このように、もっとも小さい(少ない)要因によって、結果がきまるといのが「最小律」である。この最小律(注1)は、はじめドイツの化学者 Justus von Liebig が植物の土壌養分に対する反応を考察する過程で提唱した(三澤, 1951 参照)。そのため、当初は、リービッヒの最小養分律(リービッヒ反応)とよばれた。しかし、植物の生育は養分だけではなく、光、温度、水等さまざまな要因によって支配される。そこで、養分という限定を外して、最小律(the law of the minimum)あるいは律速(注2)要因の法則(the law of limiting factors)とよばれるようになった(たとえば、村山, 1982 参照)。

20 世紀初頭、イギリスの F. F. Blackman はこの概念が光合成の光反応に適用(Blackman 反応)できることを示した(たとえば、Evans, 1975; Loomis & Connor, 1992 参照)。すなわち、彼は、光合成速度が、光が弱い間は光強度に比例し、やがて二酸化炭素濃度に応じて決まる一定の値をとることを示した。より一般的に言えば、最小律を比例-頭打ちの二つの直線関係(linear response and plateau, LRP モデル)で表されるものとみなした。一方、同じ頃、ドイツの Mitcherlich は反応速度が漸近的に頭打ちになる関係、Mitcherlich の最小律あるいは「収穫逡減の法則(the law of diminishing return)」を提唱した(たとえば村山, 1982 参照)。

定式化に関する以上二つの良く知られた例に限らず、最小律については、Liebig の提唱当時より様々な見解が出されてきた。それらは、結局、Paris (1992) の一般化された反応関数を用いた最小律によって統一的に理解できるのかも知れない。しかし、ここでは Paris の見解を含

2006 年 4 月 19 日 受付, 2006 年 8 月 30 日 受理

めて、最小律とは本当は何なのか、どのように理解し定式化すべきかといった根本的な問題にはこれ以上立ち入らない。本稿のねらいは、最小律が強力な「思考ツール」であることを示すことにある。そのため、Blackmanと同じく、最小律はLRPモデルによって表されるものとの前提に立つ。それは、このように単純化した最小律が、様々な現象を統一的、横断的に理解するのに強力な手段(思考ツール)となると考えるからである。その上で、以下、その意味するところを考察し、最後にその有用性を例証する。

2. 最小律の表し方

2.1 数学的表現

従属変数を Y 、二つの独立変数を X と U とする。そして、 Y は、 X が U より小さい時は X に、 X が U より大きくなると U に比例するとする(Thornley, 1975)。すなわち、式で表すと

$$0 \leq X \leq U \text{ なら } Y=X; \quad U < X \text{ ならば } Y=U$$

(1)

であるとする。あるいは、括弧内の小さい方を選ぶという演算子 $\min\{\}$ を使えば、式(1)のかわりにもっと簡単に

$$Y = \min\{X, U\} \quad (2)$$

と書くことができる。式(1)あるいは(2)、すなわちLRPモデルによって定義した最小律、が本稿で対象とする最小律である。この関係は、 U をパラメータ(任意の、しかし一定の値をとる量)とすると、図1aのように表すことができる。あるいは、 X をパラメータとすると、図1bのように表すことができる。ただし、この図ではパラメータがそれぞれ二つの値($X_1, X_2; U_1, U_2$)をとる場合を例示した。

式(1)は U で割ると、

$$\begin{aligned} 0 \leq X/U \leq 1 \text{ なら } Y/U &= X/U; \\ 1 < X/U \text{ ならば } Y/U &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

となり、グラフとして表すと図2のようになる。このように、パラメータの値に依存しないように表すと(規格化)、いろいろな条件下で行った実験結果を統合できるので便利である。なお、いうまでもなく変数 Y, X, U の単位は同じでなければならない。それ故、単位が異なる量同士の関係を調べる時は、あらかじめ、当量関係(注3)を用いて単位を揃えておく必要がある。

2.2 物理的表現

最小律の意味は、具体的(実体的)モデルを用いると、もっと理解しやすい。そのようなモデルとしては、「Dobeneckの最小樽」(たとえば、高橋, 1984 参照)

が有名である。これは長短様々な側板を下端を揃えて樽状に構成したもので(注4)、上端の高さ、すなわち樽の深さが場所によってまちまちである。そのため、この樽に水を入れると水位は最も短い側板によってきまる。

いま、簡単のため、樽は円筒状で、側壁はそれぞれ高さ X と U の2枚の側板だけから構成されているとしよう(図3)。そして、この樽に十分、水を入れた時の水深(最大水位)を Y とする。さらに、最初は X がある一定の U よりも低いとしよう。すると、当初、最大水位 Y は X で制限され、それに等しくなる。 X をだんだん上げていけば、それに応じて Y も上昇する。しかし、 X が U 以上になると、それ以上いくら X を大きくしても Y は U によって制限され、その値で一定になる。そこで、今度は U を大きくしてやれば、それにつれて Y を再び上げることができる。以上が、図1aに相当する樽の水位と木片の長さとの関係である。また、これまで述べたことは、 X と U とを入れ替えても全く同様に成立する(図1bに相当)。

3. 具体例

上で述べたようなプロセスの最も単純な具体例としては、ベルトコンベアーによる輸送を考えることができる(たとえばFig 6-11, Sulisbury & Ross 1969, 参照)。輸送速度(Y)は、荷物の積み込み速度(X)がコンベアーの搬送能力(U)を下回っている間は積み込み速度に、積み込み速度が搬送能力を上回ってくると搬送能力に律速される。たとえば、単位時間にエレベーターの乗り場に到着する人が次第に増えてくる場面を想定しよう。到着する人の数がこのエレベーターの搬送能力(定員×単位時間の昇降速さ)以下である限り、乗客は待たずに乗ることができて、このエレベーターが単位時間に運ぶ人数は乗り場に到着する人数に等しい。しかし、到着する人の数が搬送能力を超えると、このエレベーターが運ぶ人数はその搬送能力で頭打ちとなって、乗り場に待つ人が時間と共に増えてくる。もちろん、輸送手段が車や飛行機であっても同じことだ。

平衡定数の非常に小さい化学平衡反応も最小律が成立する典型的な例である(たとえば, Sulisbury & Ross 1969 参照)。いま、二つの物質の初期濃度をそれぞれ X, U とし、この二つの物質が反応してできる新しい物質の濃度を Y とする化学平衡反応を想定する。すると、平衡定数が非常に小さい場合は、次の反応がほぼ一方的にすすむ。

したがって、 X が小さい間は、 X は全て Y に変換されてその分だけ Y が生じる。そして、 U 以上になるとそこで

頭打ちとなり、それ以上 X をあげても Y は U だけしか生じない。この例は、二つのパーツを組み合わせてある製品をつくる場合と本質的には同じであり、その方がもっと分かりやすいだろう。

4. 需要供給との関係

最小律は需要供給 (ソース・シンク) 概念と密接な関連を有する。二つの独立変数のうち、パラメータとした方を需要、もう一方を供給とみなすことができるからだ。ただし、2章1節でみたように、これら二つの変数はどちらもパラメータとなりうる。したがって、一つの変数が需要と供給のいずれにもなり、一方が需要の時は他方が供給、供給の時は需要という関係が成り立つ。

融雪という現象を例にとろう。融雪のための熱量を X 、雪の量を U (相当熱量)、融雪量を Y (相当熱量) とする。まず、 U を一定として、この雪に熱 (X) を少しずつ供給して融雪するとしよう。いいかえれば、融雪を「熱が消費されるプロセス」とみなす。すると、供給熱量が少ない間は、この熱は全て融解に使われるから、融雪量 (Y) は熱の供給 (ソース) によって律速される。すなわち、融雪量は供給熱量に等しい ($Y = X$)。しかし、最初あった雪が全部融けてしまえば、熱の供給をいくら増やしてもそれ以上融けようがない。すなわち、それ以降は、融雪量は最初あった雪を全部融かすのに要する熱量 (雪の熱需要) U に律速される ($Y = U$)。このように、融雪は、 X を供給、パラメータ U を需要とする「融雪熱」の需要供給関係とみることができる。

一方、 X をパラメータとすると、融雪は、 U を供給、 X を需要とするプロセス、すなわち「雪が消費されるプロセス」とみることができる。いま、ある一定量の熱 (X 、たとえば容器に入った湯) があって、これに少しずつ雪 (U) を入れていくとしよう。すると、雪が少ない間はこの雪は全て融かされるから、融雪量 (Y) は雪の供給量 (U) で律速される ($Y = U$)。しかし、湯が冷えて水温が 0°C になってしまうと、それ以上いくら雪を入れても融かすことはできない。すなわち、融雪量は、最初あった一定量の熱がどれだけの雪を融かすことができるか (X)、によってきまる ($Y = X$)。湯に雪が融けていくということは、熱が雪の「シンク」になっているとみなすことができる。あるいは、湯が 0°C になるまでにどれだけの雪を必要とするか (熱の雪需要) といってもよい。したがって、この段階では融雪量はシンク (需要) によって律速されることになる。

5. 最小律と因果関係および実験

現象の解明には理論的な方法だけでなく経験的方法が必要である。物理や化学などの原理、法則を論理で繋い

でいくだけで、全ての現象の「因果関係」を明らかにすること (理論的方法) は、不可能だからだ。Whisler ら (1987) はそのような経験的方法として、加算的方法 (たとえば重相関法)、相乗的方法 (物理統計的方法) に加えて、最小律をあげている。しかし、いままで述べたことから判断すれば、最小律が、データに基づく曲線や関数のあてはめといった経験的、統計的方法と同類であるとは到底思われない。最小律は、三段論法等と同じく、論理的推論の1様式と考えるべきだろう。たとえば、3章の最後でみたように、二つのパーツを1セットとしてある製品を作るとすると、何個の製品ができるかといった例を考えてみよう。パーツの数がお互いに等しくないときは、いずれか少ない方の数で製品の数が決まることは、やってみなくても直ちに分かる。このように、最小律的判断に実験や経験はいらない。直感的にあるいは論理的にそうなるのが当然と考えられるからだ。6章の適用例に示すように、最小律が生物学的プロセスだけでなく、物理学的プロセスなど様々な場面に適用できるのはそう考えると納得がいく。

「Dobeneck の最小樽」で表した最小律を使うと、さらに、因果関係について、そしてそれを確認する「実験」という手段についても、非常に重要ないくつかのことが分かる。そこで、まず因果関係とはなにかを確認しておこう。あること (ζ) が原因で、ある結果 (ξ) が生じたということと言いつけるには、次の三つの条件が全て満たされなければならない (高根, 1979)。第一に ζ が ξ に「先行」すること (注5)、第二に ζ と ξ が「共変」すること、そして第三に ζ 以外の要因が「統制」されていることである。例として、ついていた電灯が消えた場合を考えてみよう。そのとき、スイッチがオンからオフになっていれば、スイッチの状態 (ζ) の変化にともなって、電灯の状態 (ξ) も変化したことになる。これが共変の関係である。しかし、これだけで直ちにスイッチを切ったことが、電灯が消えた原因だとはいえない。スイッチが切れる直前に、電灯の球が切れたのかも知れないし、あるいは停電になったのかもしれない。このように、ある結果をもたらす要因は一般にいくつか考えられる。したがって、 ζ が原因であると結論するには、他の要因に変化のないことが、保証されねばならない。いいかえれば、 ζ 以外の要因が「統制 (コントロール)」されていなければならない。なお、第一の条件、すなわち、 ζ が ξ に先行していることは明らかである。順序を逆にして、電灯を消せばスイッチが切れるとは考えられないからである。

以上のことをふまえて、「実験」という手段を「Dobeneck の最小樽」で見直してみよう。まず、側板の高さは「操作」できても、最大水位を直接操作することはできないことが分かる。したがって、「先行」ということは、実は「操作

可能性」を意味することになる。これが、私達が行う「実験」という手段を成り立たせる第一の前提である。つぎに、「Dobeneck の最小樽」ではどちらかの要因を変化させている時、残りの要因は一定であるとしている。しかし、もし、そうでなくて、たとえば X を大きくするにつれて、 U が低下していき、その程度を私達がつかめないとしよう。すると、水位を決めているのは私達が原因と考える X ではなくて、 U である可能性も出てくる (注 6)。 U を一定とする、あるいはそうしないまでもそれがどのように変化するかを把握しておくこと、すなわち「統制」が必要な所以であり、これが実験を成り立たせる第 2 の前提である。

6. 適用例

6.1. 生産物の分配

イネなどの禾穀類を対象とし、開花期以降の生産を考える。この時期には、穎花数すなわち穀実数の上限が決まっているので、これと品種によってきまる最大穀実重との積として定義される最大可能収量 (Y_p) もきまっていると仮定できる。これが需要 (シンク) 量である。一方、供給 (ソース) 量は、この期間の乾物生産量 (D) と開花前貯蔵同化物質からの転流量の和とみなすことができる。そして、この開花前貯蔵同化物質はこの時期最大に達する。したがって、開花前貯蔵同化物質のうち穀実生産にまわすことのできる最大転流量もきまり、それを S_p としよう。すると、実際の収量 Y は供給同化物質量が Y_p を超えて十分あれば Y_p によってきまることが、しかし、供給量が少なくなって Y_p 以下に下がれば、それに比例して低下することが予想される。それ故、 Y_p を X 、 $S_p + D$ を U とみなして、式 (2) が適用できるので、

$$Y = \min \{Y_p, S_p + D\} \quad (5)$$

この予想は、品種と施肥によって Y_p と S_p を、水ストレスにより D をかえた実験によって確認された (Takami *et al.*, 1990)。この場合の物理的モデルとしてはバケツへ水を注ぐ場面を想定すればよい。 Y_p がバケツの容積、 S_p は最初バケツへ入っていた水の量、そして D は給水量に相当する。

6.2. 個体群の生長

作物等の現存量 (W) は一般に S 字曲線をたどる。なぜそうなるのだろうか。最小律によれば、次のように説明できる。まず、式 (1) において、水あるいは日射といったある資源の供給量を U 、作物のこの資源獲得量を X としよう。また、時間を t 、現存量を W とすれば、 dW/dt が式 (1) の Y に相当する。ここで、資源供給量とは単位時間に単位土地面積に到達する、あるいは供給可能な資源量 (たとえば、日射量) のことである。

発芽後しばらくの間は、通常の条件下、すなわち極端な養分、水分あるいは日照不足でない条件下では、 X は U に比べて十分小さいと考えられる。それは、根や葉といった獲得器官の発達がまだ不十分だからだ。したがって、 Y は X によって律速される。すなわち

$$dW/dt = X \quad (6)$$

資源獲得量 X は、獲得器官の単位土地面積あたりの量 (たとえば、葉面積指数) に、したがって W に比例すると考えられるので、 p を比例係数として、 $X = pW$ と表すことができる。すると、上の関係は次のようになる。

$$dW/dt = pW \quad (7)$$

すなわち、 p がある程度一定とみなせる間は、 W は時間とともに指数関数的に増大する。

植物体が発達して十分な根系や植被が形成されると、それ以上根や葉が (したがって X が) 増加しても利用できる資源がなくなってくる。いいかえれば、資源獲得量 X が資源供給量 U を上回ろうとするため、今度は U が律速要因となる。すなわち、

$$dW/dt = U \quad (8)$$

それゆえ、資源供給量がほぼ一定か、あるいは変動したとしてもランダムであれば、 W は時間に比例する。これが生育中期の直線的生長である。

さらに生育が進むと、光合成器官の成熟、老化に伴って正味の光合成量はほとんどゼロかそれ以下に低下する。その一方、維持呼吸は引き続き継続し、枯死、脱落が増える。しかも、こういった維持呼吸量、枯死・脱落量は、現存量に比例するとみなせるので、 h (> 0) を比例定数として、次の関係が成立する。

$$dW/dt = hW \quad (9)$$

これが生育後期 (衰退期) の通減的生長である。ただし、式 (9) は式 (7)、(8) と違って、導出の際の前提が示唆するように、最小律から導かれたものではない。

以上の 3 期をつなぎ合わせて全体としてながめると、 W は時間に伴って S 字曲線を描いて推移することになる。なお、この節は一部、Loomis & Connor (1992) の解説 (訳書 p 46-49, p 74-77) を参考に、筆者なりにまとめたものである。

6.3. 蒸発散の推定

年間を考え、河川流域等の広域の集水域を対象とすれば、蒸発量 (蒸散を含む) と降水量および可能蒸発量 (あるいは正味放射量) との間には簡単な関係が成立する。Ol'dekop あるいは Budyko のモデルがそれである。

(Brutsaert, 1982)。したがって、対象とする地域の降水量と可能蒸発量（あるいは正味放射量）がわかれば、これらのモデルからこの地域の蒸発量を推定することができる。しかし、これらのモデルの理論的根拠は明らかではなかった。最小律を使えば、次のようにその根拠を示すことができる（高見，1998）。

(1) 水消費としての蒸発

蒸発 (E) は蒸発面へ供給された水が「大気の蒸発要求」即ち可能蒸発 (E_p) という需要に応じて、消費されるプロセスとみなすことができる。年間を考えると平均的には土壌水分の増減を無視できるので、地面への水分供給速度としては年降水量 (P) を考えればよい。すると、最小律から P が E_p より小さい間即ち降水による水の供給が蒸発要求による需要を下回っている間は蒸発は降水に比例して増加する。しかし、 P が増大して、蒸発要求を上

回るようになると蒸発散は蒸発要求で頭打ちとなり、 P がいくら増大しても E_p の水準で推移する。すなわち、蒸発散は P が E_p に比べて小さい間は P によって、逆に大きくなると E_p によって律速される。Fig. 1a と比べると、 E_p が U に、 P が X に対応していることになる。通常、実際のデータには式 (1) の様な 2 直線の関係よりもそれらを漸近線とする一つの曲線のほうが良く適合する。Ol'dekop のモデルはこの曲線として双曲線正接関数を用いたものである。

(2) エネルギー消費としての蒸発

蒸発 (E) は、また、蒸発面へ供給された可能蒸発 (E_p) というエネルギーが蒸発面の水のエネルギー需要に応じて消費されるプロセスとみなすことができる。言い替えば、蒸発面の水を全て蒸発させるのに必要なエネルギーを大気がどれだけ供給できるかという観点から見ることも

Fig. 1. Graphical representation of the law of the minimum, specified as $Y = \min \{X, U\}$. (a) Response of Y to X at two levels of U ($U1$ and $U2$), and (b) response of Y to U at two levels of X ($X1$ and $X2$).

Fig. 2. Normalized response of Y to X or U , as specified in Fig 1, i.e., $Y/U = \min \{X/U, 1\}$ or $Y/X = \min \{U/X, 1\}$.

Fig. 3. Simplified version of Dobeneck's minimum barrel, illustrating the relation $Y = \min \{X, U\}$, where U is the depth of the cylindrical container, X is the height of the side, and Y is the level of water determined either by X or U , depending on which of these two variables is smaller than the other.

できる。すると、(1)とは逆に、 E_p が X に、 P が U に対応することになる。Budykoのモデルは可能蒸発を正味放射で近似し、Ol'dekopの場合と同様に二つの直線関係の代わりに双曲線正接関数(あるいは指数関数)を用いたものである。

以上のように、蒸発は、可能蒸発と降水を律速要因とみなした最小律によって、最も単純にかつ理論的根拠をもってモデル化することができる。Budykoらのモデルはそれを異なった形で表現したものに他ならない。需要供給比較法(Mahfouf & Noilhan, 1991 参照)も基本的には最小律に基づくものといえる。

7. 結 び

LRPモデルとしての最小律は、統計的経験的關係ではなく、論理あるいは判断の1様式とみなされる(2章)。それゆえ、その結果を外挿することができる(6章1節)。また、生物学的プロセス(6章1節、2節)だけでなく、化学的プロセス(3章)、あるいは物理的プロセス(6章3節)を取り扱うのにも有用である。最小律は、さらに、変数がストックの場合(6章1節)だけでなく、フローの場合(6章2節、3節)でも成り立つ。ただ、適用にあたっては律速要因間の相互作用の有無に留意しなければならない。

筆者がLiebigの最小律ということばをはじめてきたのは多分、中学校の頃だったような気がする。もっとも、名前だけしか記憶に残っていない。その後、大学でも習ったはずであるが、内容はもちろん習ったかどうか全く覚えていない。はっきり意識に上ったのは、最小律の重要性を強調したEvans(1975)のコメントに接した時である。しかし、最小律については、名前を知っている程度であったから、そのコメントの真意が理解できるはずはなかった。それからしばらく経って、1982年の春頃だったろうか、実験計画を考えている時に、前述(6章1節)の予想に到達した。しかし、その時は、それが最小律の適用であることには全く気づかなかった。LRPモデルとしての最小律は自然な思考論理の一つに過ぎないとの見方はこの経験による。さらにその後、1995年ごろ、Budykoのモデルを理解する必要に迫られた。しかし、納得できる説明はみつからなかった。ようやく最小律がカギを握ることに気づいて、勉強を始めたものの、今度は最小律に関する体系的で平易な解説、テキストが得られなかった。本稿は、そのような悪戦苦闘の中で得られた情報と、それ以来行ってきた調査、考察の結果をとりまとめたものである。高橋英一博士には文献(三澤, 1951)を紹介して頂くとともに、有益なコメントを頂いた。また、Dr. Van Bavelには文献(Paris, 1992)の存在を教えて頂いた。ここに記して感謝する。

8. 注

注1: 最少律ともいうが、本稿では最小律で統一する。

注2: 限定あるいは制限ともいうが、本稿では律速という術語で統一する。

注3: たとえば、乾物生産において、資源として日射量を考え、それを熱量で表せば、生産量も熱当量で表さねばならない。あるいは、生産量を乾物重で表したいなら、日射量を変換率を用いて乾物重に変換しておかなければならない。

注4: たとえば、高橋(1984)にはこの樽の図が載せてある。

注5: 「先行」ということばは、時間的順序を含意しているので、必ずしも適切ではない。物理学では、微分方程式で与えられた「因果関係」に境界条件を「原因」として与えて解いた解を「結果」という。したがって、ここでいう「先行」要因とは、境界条件のことであり、分かりやすい表現としては初期条件ならびに環境条件あるいは単に環境ということばを使った方がよいだろう。

注6: たとえば、カリを増肥すると、もともと土壤中にあったマグネシウムの植物による吸収利用が減少する(高橋, 1984)。あるいは、日射が強くなると、それにともなって気温も上昇することが多い。このように環境要因は独立に働くとは限らず、互いに影響を及ぼし合うことが少なくない。

References

- Brutsaert, W., 1982: *Evaporation into the Atmosphere*. P241–242, Kluwer Academic Press Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Evans, L. T., 1975: The physiological basis of crop yield. P325–327. In *Crop Physiology* (ed. by L. T. Evans), Cambridge University Press, London, 374pp.
- Loomis, R. S. & Connor, D. J. 1992: *Crop Ecology*, Cambridge University Press (堀江 武・高見晋一(監訳) 1995: 食料生産の生態学 263pp, 農林統計協会).
- Mahfouf, J. F., and Noilhan, J. 1991: Comparative study of various formulations of evaporations from bare soils using in situ data. *J. Appl. Meteor.*, **30**, 1354–1365.
- Misawa, T., 1951: On the theory and practice of agriculture(三澤嶽郎(訳), 1951: 農業に於ける理論と実際について(J. von Liebig原著), 農業技術研究所資料H-1, 1–53).
- Murayama, N., 1982: *How to overcome the law*

- of diminishing return*, Yokendo, Tokyo (村山 昇 1982: 収穫逓減の法則の克服, 養賢堂, 東京, 233pp).
- Paris, O., 1992: The return of von Liebig' s "Law of the Minimum" *Agron. J.* **84**, 1040–1046.
- Sullisbury, F. B. and Ross, C. 1969: *Plant Physiology*. Wadsworth Publishing, Belmont, California, 747pp.
- Takahashi, E., 1984: *Principles of Fertilizer Application in Agriculture*. Yokendo, Tokyo (高橋英一 : 1984, 施肥農業の基礎, 養賢堂, 東京).
- Thornley, J. H. M. 1976: *Mathematical Modeles in Plant Physiology*. P93–95. Academic Press, London.
- Takane, M., 1974: *Methodology of Creative Power*. Kodansha, Tokyo (高根正昭, 1974: 創造の方法学, 講談社, 東京, 198pp).
- Takami, S., 1998: Estimating evaporation on the basis of the law of limiting factors. *J. Japan. Soc. Hydrol. & Water Resour.* **11**, 67–69. (高見 晋一 : 1998. 限定要因の法則からみた蒸発. 水文・水資源学会誌, **11**, 67–69).
- Takami, S. Kobata, T. and Van Bavel, C. H. M., 1990: Quantitative method for analysis of grain yield in rice. *Agron. J.* **82**, 1149–1153.
- Whisler, F. D., B. Acock, D. N. Baker, R. E. Fye, H. F. Hodges, J. R. Lambert, H. Lemmon, J. M. McKinion and V. R. Reddy., 1987: Crop simulation models in agronomic systems. *Advan. in Agron.* **40**, 141–208.