植物群落内部の風について (II)*

武 田 京 一

(九州大学農学部)

Turbulence in Plant Canopies (II)

K. TAKEDA

(Faculty of Agriculture, Kyushu University)

1. ま え が き

従来植物繁茂地の如き土地上の風速分布を表わすには粗度定数 z_0 の他に零面変位 d を使用した対数法則すなわち

$$u = \frac{v_*}{k} \ln \frac{z-d}{z_0} \quad (1)$$

が使用されて来た (ただし u は風速, z は地上からの高さ, v_* は摩擦速度, k は Karman 常数を表わす)。そしてこの式における z_0 および d は全く実験式的に導入されたに過ぎなかつた。この二者は当然植物の繁茂の程度に関係があると思われるが、それが理論的に調べられたことはほとんどなかつた。さて著者は前報告¹⁾ (武田, 1964) において植物群落内の気流に関する問題を理論的に取り扱い、植物繁茂地内の風速分布を規定する微分方程式を得た。そして群落内の植物の繁茂度が高さに対して一定であるならば、群落内の風速分布は指数関数で与えられることを示し、またその繁茂度の値と粗度定数および零面変位との関係などを論じた。

以下においては繁茂度が一定ではなく、高さに対して変化する場合を論じよう。

2. 植物群落内の風速分布

前報告と同様に植物体は剛体であり、風によつて撓んだり、振動したりすることはないと仮定し、また温度の影響を無視する。前報告においては地面附近の空間を3つの領域 (上から I, II, III) に分けたが、ここでは一応 I および II の空間だけを考える。すなわち領域 I は地面粗度の上部の空間であつて、いわゆる対数法則の成り立つと考えられる空間である。また領域 II は粗度要素あるいは植物群落の流れに影響を及ぼす空間であつて以下において主として取り扱われるものである。

領域 I および II において成り立つ基礎方程式は前報告の場合と同様である。すなわち

a) 領域 I ($z > H$) において

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\rho} = K \frac{du}{dz} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K = v_* l = k v_* (z-d) \end{array} \right. \quad (4)$$

ただし、ここに H は植物群落層の高さ, τ は摩擦応力, ρ は空気の密度, K はうず粘性係数, l は混合距離である。(2) より

$$\frac{\tau}{\rho} = \text{const.} \equiv v_*^2 \quad (5)$$

従つて (3), (4), (5) より (1) が得られる。

b) 領域 II ($z < H$) において

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = C F u^2 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\rho} = K \frac{du}{dz} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \alpha u (1-F) \end{array} \right. \quad (8)$$

ただし、ここに F は植物体の繁茂状況によつて変わる因子を表わす (ここで繁茂度と名付ける)。群落内の気流状態は極めて複雑でその状況を十分に表わす解析的な式を与えることはなかなか困難であるが、大体のところは単位体積内の植物体とそれに伴う境界層との合計体積の占める割合 (無次元) と考えてよからう。

(6), (7), (8) から $\frac{\tau}{\rho}$, K を消去すれば

$$\alpha(1-F) u \frac{d^2 u}{dz^2} + \alpha(1-F) \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \alpha u \frac{du}{dz} \frac{dF}{dz} - C F u^2 = 0 \quad (9)$$

が得られるが

$$\left(\frac{u}{v_*} \right)^2 = U, \quad \frac{z}{H} = \zeta \quad (10)$$

なる置き換えを行なうと

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} - \frac{1}{1-F} \frac{dF}{d\zeta} \frac{dU}{d\zeta} - \beta^2 \frac{F}{1-F} U = 0 \quad (11)$$

となる。ただし $\beta^2 = \frac{2C}{\alpha} H^2$ と置いてある。この (11) 式が植物繁茂地内の風速分布を規定する微分方程式であつて前報告に述べられたものと同じものである (ただしここでは無次元形で表わしてある)。

領域 I と II との間には $z=H$ において u のほか du/dz および K (あるいは τ/ρ) の連続の条件が成り立つと考えられる。すなわち ($z=H$ において $U^{\frac{1}{2}} = u/v_* = U_1^{\frac{1}{2}}$, $dU^{\frac{1}{2}}/d\zeta = U_1^{\frac{1}{2}}$ と書く) と

* 昭和 40 年 4 月 6 日 農芸全国大会にて発表

$$U_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \ln \frac{1-\delta}{\zeta_0} \quad (12)$$

$$U_1^{\frac{1}{2}'} = \frac{1}{k} \frac{1}{1-\delta} \quad (13)$$

$$U_1^{\frac{1}{2}} = k \frac{H}{\alpha} (1-\delta) \quad (14)$$

ただし $\delta = d/H$, $\zeta_0 = z_0/H$ はそれぞれ無次元形の零面変位および粗度定数である。(12) および (14) より

$$\frac{1}{1-\delta} \ln \frac{1-\delta}{\zeta_0} = -\frac{k^2 H}{\alpha} \quad (15)$$

が得られるが、右辺は一定(前報告によると $\alpha = 1.6 \text{ cm}$)だから、この式は $d (=H\delta)$ および $z_0 (=H\zeta_0)$ が互いに独立なものではなく一方がきまればおのずから他がきまることを示すものである。

上の3式 (12), (13), (14) はまた d , z_0 および風速分布式中にはいつて来る任意定数を決定する式であると見做すこともできる。すなわち (12), (14) より

$$d = H \left(1 - \frac{\alpha}{kH} U_1^{\frac{1}{2}} \right) \quad (16)$$

$$z_0 = \frac{\alpha}{k} U_1^{\frac{1}{2}} \exp(-kU_1^{\frac{1}{2}}) \quad (17)$$

さらに (12), (13), (15) より

$$U_1^{\frac{1}{2}} \cdot U_1^{\frac{1}{2}'} = \frac{H}{\alpha} \quad (18)$$

これによれば $z=H$ においては $U_1^{\frac{1}{2}}$ と $U_1^{\frac{1}{2}'}$ とは逆の変化をすることが分かる。

第1図

次に(11)式の解について考えよう。これを解くためには繁茂度 F の高度変化が知られていなければならない。

それでいま

$$F = 1 - \zeta^m \quad (19)$$

と置いて見る。しかるときは(11)式は次の如くなる。

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} + \beta^2 \left(1 - \frac{1}{\zeta^m} \right) U = 0 \quad (20)$$

しかし遺憾乍らこの式は m の一般の値に対して解くことは甚だ困難である。それで以下においては

$$m = 2 \quad (21)$$

の場合についてのみ考えることにする。その場合には、(20)式は次の如くなる。

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} + \beta^2 \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) U = 0 \quad (22)$$

ここで

$$U = \zeta^{-\frac{1}{2}} V \quad (23)$$

とおくならば

$$\frac{d^2 V}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dV}{d\zeta} + \left(\beta^2 - \frac{\beta^2 + 1/4}{\zeta^2} \right) V = 0 \quad (24)$$

が得られるが、さらに

$$\beta\zeta = \xi \quad (25)$$

とおけば

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dV}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) V = 0 \quad (26)$$

が得られる。ただし $\nu^2 = \beta^2 + 1/4$ とおいてある。

(26)式は標準形の Bessel の微分方程式であるからその一般解は

$$V = A J_\nu(\xi) + B Y_\nu(\xi) \quad (27)$$

で与えられる。 A, B は定数である。あるいは (23), (25) より

$$U = A \zeta^{-\frac{1}{2}} J_\nu(\beta\zeta) + B \zeta^{-\frac{1}{2}} Y_\nu(\beta\zeta) \quad (28)$$

さて (28) 式の右辺第1項は ζ の小さな値に対して零に収束し、また第2項は発散するが、われわれが今取り扱っているのは植物群落内の風であつてこれは地面に極く接近した所では当然零に近くなるから、上式の右辺第1項のみを考えればよからう。すなわち

$$B = 0 \quad (29)$$

$$\therefore U = A \zeta^{-\frac{1}{2}} J_\nu(\beta\zeta) \quad (30)$$

あるいは

$$U^{\frac{1}{2}} = u/v_* = A^{\frac{1}{2}} J_\nu^{\frac{1}{2}}(\beta\zeta) / \zeta^{\frac{1}{4}} \quad (31)$$

これが所要の (22) 式の解である。

定数 A は上に与えられた条件 (18) から決定することができる。すなわち $\zeta = 1$ の場合には (31) 式より

$$U_1^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} J_\nu^{\frac{1}{2}}(\beta) \quad (32)$$

$$U_1^{\frac{1}{2}'} = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{2} \left[-\frac{1}{2} J_\nu^{\frac{1}{2}}(\beta) + \beta J_\nu'(\beta) / J_\nu^{\frac{1}{2}}(\beta) \right] \quad (33)$$

が得られるので

$$A = \frac{2H}{\alpha} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}J_\nu(\beta) + \beta J_\nu'(\beta)} \quad (34)$$

で与えられることが分かる。これを(31)式に代入すれば(22)式の解は次の如く表わすこともできる。

$$U^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{v_*} = \sqrt{\frac{2H}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}J_\nu(\beta) + \beta J_\nu'(\beta)}} \cdot \frac{J_\nu^{\frac{1}{2}}(\beta\zeta)}{\zeta^{\frac{1}{2}}} \quad (35)$$

次に実際の数値について考えよう。Bessel関数の次数 ν は上述の如く

$$\nu = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2C}{\alpha} H^2 + \frac{1}{4}} \quad (36)$$

であるが、前報告に述べられた如く

$$\alpha = 1.6 \text{ cm}, \quad C = 0.12 \text{ 1/cm}$$

であるから、もし

$$H = 100 \text{ cm} \quad (37)$$

とすれば

$$\nu \approx \beta = 38.73 \quad (38)$$

となる。 ν および β の値が与えられると上式の Bessel関数の値が求まる。Bessel関数の表および公式により

$$J_\nu(\beta) = 0.1315, \quad J_\nu'(\beta) = 0.0350 \quad (39)$$

が得られた。ただし表²⁾には次数 ν の整数値の場合しか考えられていないので、これらの値は内挿法によつて求めたものである。これより

$$-\frac{1}{2}J_\nu(\beta) + \beta J_\nu'(\beta) = 1.29$$

となり、また

$$2H/\alpha = 125$$

であるから

$$A = 96.91 \quad (40)$$

となる。従つて(31)式より

$$U^{\frac{1}{2}} = u/v_* = 9.84 J_\nu^{\frac{1}{2}}(\beta\zeta)/\zeta^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

さらに

$$U_1^{\frac{1}{2}} = 3.57 \quad (42)$$

となるから(16)、(17)より

$$d = 85.7 \text{ cm} \quad (43)$$

$$z_0 = 3.42 \text{ cm} \quad (44)$$

が得られる。かくの如く風速分布(41)式には(43)、(44)の如き d 、 z_0 の値が対応することが分かる。

第1図には繁茂度が

$$F = 1 - \zeta^2 \quad (45)$$

で与えられた場合の(1)式および(41)式の示す風速分布が描かれている。(45)式は地面附近における植物の繁茂がかなり大きな場合に相当し、それに従つて風速は群落内で急激に弱まっていることが示されている。

3. 層流底層について

実際に植物群落の内部に入つて見ると風は甚だおだやかで流れが層流に近くなつていてと感じられる場合が多い。それならば今の場合に層流底層の厚さ z_1 はどの位になるであろうか。

いろいろの取り扱い方があるであろうがここでは次の如く考えて見よう。すなわちうず粘性は(8)式に与えられるように、地表面に接近すると共に風速が減少すると同時に減少するわけだが、いま

$$K = \mu/\rho \approx 0.15 \text{ cm}^2/\text{sec} \quad (46)$$

(μ は分子粘性係数)になつた z_1 をもつて層流底層の厚さであると考えれば今の場合

$$U^{\frac{1}{2}} \zeta_1^2 = 9.84 J_\nu^{\frac{1}{2}}(\beta\zeta_1) \zeta_1^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{K}{\alpha v_*} = \frac{\mu/\rho}{\alpha v_*} \quad (47)$$

であつて、 ζ_1 の小さな値に対して左辺は ζ_1 と同様な変化をし、また右辺は v_* と逆の変化をするから結局 ζ_1 は v_* に対して逆の変化をすることが分かる。

例えば

$$v_* = 50 \text{ cm/sec} \quad (48)$$

とするならば

$$\frac{\mu/\rho}{\alpha v_*} = 0.00188 \quad (49)$$

となるので、やはり Bessel関数の表を使用して

$$\zeta_1 = 0.580 \quad \text{または} \quad z_1 = 58 \text{ cm} \quad (50)$$

が得られる。

実際に果してどの程度となるか分からないが、考える繁茂度が地面附近でかなり大きな値を与えていることを思い出すならばこの z_1 の値も大体妥当なところかも知れない。なおここでは K の値が減少して分子粘性の値をもつようになつた高さをもつて層流底層の高さと考えたが、式の上では(8)式に示される如く K の値は地表面に接近すると共にさらに減少するわけである。厳密には z_1 以下の層中では

$$K = \text{const.} = \mu/\rho$$

と考えるべきであろう。しかしそれによる差異は小さいと考えられる。

4. あとがき

前報告において得られた植物群落層内部の風速分布を規定する微分方程式を、繁茂度が高度の2次式で与えられる場合に解いて Bessel 関数を含む分布式を得た。そしてこれに応ずる粗度定数および零面変位の値を求めた。さらに層流底層の厚さが摩擦速度に対して逆の変化をすることを明らかにした。

次報告においては繁茂度の高度変化 $F=1-\zeta^m$ における m の一般な値の場合について植物群落内部の風の分布、粗度定数および零面変位の値を数値的に論じる予定である。

文 献

- 1) 武田京一 (1964) : 植物群落内部の風について (1) 農業気象, 20, 1~5.

- 2) The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Vol. X, XI. (1948) (Tables of the Bessel Functions of the First Kind of Orders Twenty-Eight through Thirty-Nine, Tables of the Bessel Functions of the First Kind of Orders Forty through Fifty-One.)

Summary

A differential equation, which prescribes velocity distribution in plant canopies and was derived in a previous paper, is solved for a given plant density-height relation, i.e. a parabolic relation. The obtained solution contains a Bessel function of ν th order and represents a probable profile which is connected to a logarithmic profile in the space over the plant canopy. Correspondingly, the roughness parameter and the zero-plane displacement are determined uniquely. Also the depth of the laminar sublayer is discussed and is proved to vary inversely with the frictional velocity.

日本農業気象学会 賛助会員名簿 (受付順)

会 員 名	所 在 地	主なる事業	会 員 名	所 在 地	主なる事業
産業気象研究会	東京都千代田区神田錦町1の2 平和ビル内 Tel (291) 5512, 6479	産業気象知識の普及	OED推進中央会	東京都台東区浅草柳橋1の29 (農産会館内) Tel (851) 1488, 4080	水田水温上昇法の普及
財団法人 電力中央研究所 農 電 研 究 所	千葉県東葛飾郡我孫子町妻子原 1634 Tel 柏 (04716) 4114-5	農用電力に関する研究調査	株式会社 佐野屋鉄工所	栃木県鹿沼市中田町1064 Tel (鹿沼) 2257	小型ロビンソン風速計の製作販売
飯尾電機 株式会社	東京都渋谷区代々木2の27 Tel (370) 6241	測器の製作販売	静岡計器商会	静岡市用宗石部 421 Tel (静岡) 52~5500	寺田武テンションメーター, 製作販売
英弘精機産業 株式会社	東京都千代田区大手町2の4 新大手町ビル3階327 Tel (211) 6691~6694	測器の製作販売	日本製線 株式会社	東京都千代田区神田富上町5 Tel (251) 6624~5	各種電熱線
株式会社 中野製作所	三重県上野市東三田1525 Tel (上野) 1597	測器の製作販売	株式会社 池田計器製作所	東京都板橋区宮本町 35 Tel (960) 1665, 1956	パーソナル流量計他, 測器製作販売
株式会社太陽社	東京都大田区山王1の2523 Tel (771) 8171, 2156	横河電機 代理店	富士化成薬 株式会社	東京都千代田区神田多町1の7 Tel (254) 2587~8	各種燻煙剤の製作販売
合資会社 ウイジン工業社	東京都世田谷区玉川用賀町1の22 Tel (701) 0531	測器の製作販売	小糸工業 株式会社	東京都杉区並大宮前1の30 Tel (398) 3386	人工気象室の設計製作
株式会社 小笠原計器製作所	東京都目黒区清水町 583 Tel (714) 3551	気象測器の製作研究	株式会社 東亜技術センター	東京都墨田区江東橋4の32 Tel (633) 1084	各種放射計の製作販売
中浅測器 株式会社	東京都中央区日本橋通3の4 Tel (271) 6925~8	気象測器の製作販売			