霜柱の生長方程式について

金光 達太郎*・白井 清恒**

(*千葉大学園芸学部造園工学研究室
** 東京大学農学部農業地水学研究室)

On the Growth Equation of Frost-pillars

Tatsutarō KONKŌ* and Kiyotsune SHIRAI**

(* Lab. of Landscape Engineering, Faculty of Horticulture,
Chiba University, Matsudo 271
** Lab. of Soil Hydrology, Faculty of Agriculture,
University of Tokyo, Tokyo 113)

1. はじめに

地表の霜柱の生長曲線を説明する方程式としては、さきに金光(1980)が述べたように、熱伝導型と放射冷却型の二つのタイプがある。

霜柱は、快晴無風の夜には、Fig.4の例のように、長くなるほど生長速度が減少する。熱伝導型方程式は、この現象を原理的にはほぼ説明し得たものといえよう。川野(1932)、田島ら(1942)は、このタイプの生長方程式に気象データ等を入れて生長速度の計算を試みている。その結果算出された生長曲線は、実測されたそれと形はよく似たものとなった。しかし、両者の絶対値は桁違いに異なるものであった。

これに反し、放射型生長方程式を用いると、霜柱の生長初期には計算値と実測値がかなりよく合致する。また、生長曲線が雲の去来に敏感に反応する現象などもよく説明することができた。だが、霜柱が長くなるにつれて生長速度が減少する現象については、説明が困難であった。

このように、従来の二つのタイプの生長方程式は、それぞれに一面の真理を含みながら、なお相補的な欠陥を有していた。そこで、本研究では、これらを統合して、長短いずれの霜柱にもよく適合する生長方程式を誘導することを試みた。以下、その説明を行ない、次いで実測値との比較を記述することにする。

2. 生長方程式の誘導

Fig.1において、霜柱の表面($x=l$)における熱収支を考えよう。まず、霜柱の水柱を通じて流入する熱量は、

$$q_I = -\alpha k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \quad (1)$$

ここに、 α ：霜柱の密生度(氷柱群内の氷の固相率)、 k_i ：氷の熱伝導度、 θ_i ：氷の温度。

次に霜柱の水柱群の間隙の空気を伝って流入する熱量は、狭い間隙中で対流は少ないと考えれば、

$$q_{Ia} = -(1-\alpha)k_a \frac{\partial \theta'_a}{\partial x} \quad (2)$$

ここに、 k_a ：空気の熱伝導度、 θ'_a ：霜柱の間隙内の空気の温度。

次に、霜柱表面(氷柱の頂点を連ねた面)から天空に向かっての純放射は

Fig. 1. Heat balance at the surface of frost-pillars. Heat flux by (net radiation; q_R , radiation near the ground; q_{Ra} , sublimation; q_L , convection; q_C , conduction through the ice-pillar; q_I , and conduction through the air; q_{Ia}).

昭和56年4月3日 全国大会にて発表

昭和57年2月2日 受理

$$q_R = \varepsilon_l R_n \quad (3)$$

ここに、 ε_l ：霜柱表面からの長波放射率、 R_n ：霜柱表面における黒体の純放射。

R_n の計算式は種々あるが、Berljand [ブドウ・イ (1956) 参照] によれば、

$$R_n = (a - b\sqrt{e}) \sigma T^4 \quad (4)$$

ここに、 a ：係数 (0.39)、 b ：係数 (0.058)、 e ：大気中の水蒸気圧 (mmHg)、 T ：霜柱の表面温度 (°K)、 σ ：Stefan-Boltzmann 定数。

(4) 式を (3) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} q_R &= \varepsilon_l (a - b\sqrt{e}) \sigma T^4 \\ &= \varepsilon_l (a - b\sqrt{e}) \sigma (T_0 + \theta_l)^4 \\ &\doteq \varepsilon_l (a - b\sqrt{e}) \sigma T_0^4 \left(1 + \frac{4\theta_l}{T_0}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 T_0 ：0°Cの絶対温度表示、 θ_l ：霜柱の表面温度 (°C)。

ここで、 $(a - b\sqrt{e}) \sigma T_0^4 = R_{n0}$ とおけば、

$$q_R \doteq \varepsilon_l R_{n0} + 4\varepsilon_l \frac{R_{n0}}{T_0} \theta_l \quad (6)$$

次に、霜柱表面から接地気層への放射は、

$$q_{Ra} = 4\varepsilon_l \sigma T_a^3 (\theta_l - \theta_a) \quad (7)$$

ここに、 T_a ：気温の絶対温度表示 (°K)、 θ_a ：気温 (°C)。

次に、表面から対流による上方への熱流は、

$$q_C = h(\theta_l - \theta_a) \quad (8)$$

ここに、 h ：熱伝達係数。

次に、表面から氷の昇華による放熱は、

$$q_L = L_i h_v (\rho_l - \rho_a) \quad (9)$$

ここに、 L_i ：氷の昇華の潜熱、 h_v ：水蒸気の伝達係数、 ρ_l ：霜柱の表面温度に対する飽和水蒸気密度、 ρ_a ：大気の水蒸気密度。

さて、霜柱の表面 ($x=l$) では、この面に入る熱量と出る熱量は等しいとして次式が成立する。

$$q_I + q_{La} = q_R + q_{Ra} + q_C + q_L \quad (10)$$

上式に、(1)～(3)および(6)～(9)式を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} -\alpha k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x} - (1-\alpha) k_a \frac{\partial \theta_a'}{\partial x} \\ = \{ \varepsilon_l R_{n0} + 4\varepsilon_l \frac{R_{n0}}{T_0} \theta_l \} + \{ 4\varepsilon_l \sigma T_a^3 (\theta_l - \theta_a) \} \\ + \{ h(\theta_l - \theta_a) \} + \{ L_i h_v (\rho_l - \rho_a) \} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、最後の項で、温度変化の小さい範囲では、湿潤空気の飽和水蒸気密度は、温度の一次関数として与えられるとすれば、次式が成立する。

$$\rho_l - \rho_a = a'(\theta_l - \theta_a) + \zeta \rho_{as} \quad (12)$$

$$a' : \frac{d\rho}{dT} \Big|_T$$

ここに、 $\zeta = 1 - \rho_a \rho_{as}^{-1}$ 、 ρ_{as} ：気温に対する飽和水蒸気密度。

ここで、霜柱の氷柱および、その間隙の空気の上方向の温度分布を直線とすれば、霜柱の下底面の温度 θ_0 は、水と氷の接する面であるから $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ とすれば、

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} = \frac{\partial \theta_a'}{\partial x} = \frac{\theta_l - \theta_0}{l} = \frac{\theta_l}{l} \quad (13)$$

(12)、(13) 式を (11) 式に代入して整理すると、 θ_l が次式で表わされる。

$$-\theta_l = \frac{A_1 l}{A_2 l + k_i} \quad (14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_1 &= -\theta_a (h + 4\varepsilon_l \sigma T_a^3 + L_i h_v a') \\ &\quad + \varepsilon_l R_{n0} + L_i h_v \zeta \rho_{as} \end{aligned} \quad (15)$$

$$A_2 = h + 4\varepsilon_l \frac{R_{n0}}{T_0} + 4\varepsilon_l \sigma T_a^3 + L_i h_v a' \quad (16)$$

$$\bar{k}_i = \alpha k_i + (1-\alpha) k_a \quad (17)$$

ここで $\bar{k}_i$ は、間隙の空気も考慮に入れた霜柱全体の熱伝導係数と考えられる。 A_2 、 $\bar{k}_i$ は勿論正であり、 A_1 も霜柱の生長する状況では一般に正である。

さて、こんどは、霜柱の下底面 ($x=0$) における熱収支を考えてみよう。

地中から霜柱の底面に送られる熱流束は、

$$q_{s0} = -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (18)$$

ここに、 k_s ：土の熱伝導度、 θ_s ：土の温度 (°C)。

$x=0$ においても、 q_{s0} と霜柱の生長速度に相当する水の凝固の潜熱との和が、霜柱中を通して上方に出ていく熱流束に等しいとおけるから、次の熱収支式が成立する。

$$\begin{aligned} q_{s0} + L \rho_i \alpha \left\{ \frac{dl}{dt} + \frac{h_v}{\rho_i} (\rho_l - \rho_a) \right\} \\ = -\alpha k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x} - (1-\alpha) k_a \frac{\partial \theta_a'}{\partial x} \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、 L ：水の凝固熱、 ρ_i ：氷の密度、 dl/dt ：霜柱の生長速度。

この式で、左辺 { } の中の第2項は、霜柱表面からの昇華による生長速度の補正項である。

$x=0$ でも、(13) 式の仮定が成立するとすれば、(19) 式は次のように書ける。

$$q_{s0} + L \rho_i \alpha \left\{ \frac{dl}{dt} + \frac{h_v}{\rho_i} (\rho_l - \rho_a) \right\} = -\bar{k}_i \frac{\theta_l}{l} \quad (20)$$

また、 $(\rho_l - \rho_a)$ に (12) 式を用いれば、

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = \frac{1}{L \rho_i \alpha} \left(-q_{s0} - \bar{k}_i \frac{\theta_l}{l} \right) \\ - h_v' \{ a'(\theta_l - \theta_a) + \zeta \rho_{as} \} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $h_v' = h_v / \rho_i$

そこで、(21) 式の θ_l に、(14) 式を用いると、霜柱の生長速度を表わす次式を得る。

$$\frac{dl}{dt} = \frac{A_1 \bar{k}_i}{L \rho_i \alpha (A_2 l + \bar{k}_i)} + \frac{A_1 l h'_0 a'}{A_2 l + \bar{k}_i} + A_0 \quad (22)$$

ここに、

$$A_0 = h'_0 (a' \theta_a - \zeta \rho_{as}) - \frac{q_{s0}}{L \rho_i \alpha} \quad (23)$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = \frac{A_3 l + A_4}{A_2 l + \bar{k}_i} \quad (24)$$

$$\text{ここに、} A_3 = A_1 h'_0 a' + A_0 A_2 \quad (25)$$

$$A_4 = \bar{k}_i \left(\frac{A_1}{L \rho_i \alpha} + A_0 \right) \quad (26)$$

$t = t_0$ のとき、 $l = l_0$ とし、式中の諸係数が一定と見なせる短時間内では次式が成立する。

$$\int_{t_0}^{t_0+dt} dt = \int_{l_0}^{l_0+dl} \frac{A_2 l + \bar{k}_i}{A_3 l + A_4} dl \quad (27)$$

$$\therefore \Delta t = \frac{A_2}{A_3} \Delta l + \frac{1}{A_3} \left(\bar{k}_i - \frac{A_2 A_4}{A_3} \right) \ln \left(1 + \frac{A_3}{A_2 l_0 + A_4} \Delta l \right) \quad (28)$$

この式を用いると、 t と l の関係が求められる。計算は、まず、霜柱の発生した時刻を $t=0$ 、このときの l_0 を 0 とし、(28) 式を用いて Δt 時間の霜柱の伸び Δl を例えば Newton の反復法によって算出し、これを次の Δt 時間のはじめの l_0 として同じく (28) 式により次の Δt 時間内の Δl を計算し、これを直前の l_0 に加えて次の l_0 にするという順序で繰返せばよい。

この際、 A_1 、 A_2 、 q_{s0} 、 A_0 、 A_3 、 A_4 などの諸係数は、それぞれ Δt 時間のはじめと終りの時間における値をその都度算出して、両者の平均値を採用する。

なお、 Δt は、諸係数の変化が大きいときは短く、変化が小さいときは長くすることは勿論である。

3. 新方程式と従来の方程式との関連

3.1 熱伝導型方程式との関連

(21) 式で、 $\bar{k}_i$ の代わりに、空気熱伝導度 k_a を無視できるとして αk_i を用い、昇華の項を無視し ($h'_0=0$)、さらに q_{s0} を無視すれば、

$$\frac{dl}{dt} = \frac{-k_i \theta_l}{L \rho_i l} \quad (29)$$

となる。また θ_l を一定とし、 $t=0$ のとき $l=0$ として上式を積分すれば、次式を得る。

$$l^2 = -\frac{2 k_i \theta_l}{\rho_i L} t \quad (30)$$

これが熱伝導型方程式である。すなわち、この式は、次の 3 条件が満たされる場合にのみ満足に適用できるのである。

1) 霜柱の下底面は、氷柱を通じての熱伝導のみによ

って熱を失う。

2) 地中からの熱流は、無視しうるほど小さい。

3) 霜柱の表面温度は一定である。

3.2 放射冷却型方程式との関連

(24) 式において、 $l \neq 0$ のときは

$$\frac{dl}{dt} \doteq \frac{A_4}{\bar{k}_i} \quad (31)$$

上式の A_4 に (26) 式を入れると、

$$\frac{dl}{dt} \doteq \frac{A_1}{L \rho_i \alpha} + A_0 \quad (32)$$

A_1 の中では R_{n0} が特に大きいとして、他を無視すると、

$$A_1 \doteq R_{n0} \quad (33)$$

また、(23) 式で昇華の項を無視すれば

$$A_0 \doteq -\frac{q_{s0}}{L \rho_i \alpha} \quad (34)$$

この式を (32) 式に入れると

$$\frac{dl}{dt} \doteq \frac{1}{L \rho_i \alpha} (R_{n0} - q_{s0}) \quad (35)$$

これが、放射冷却型方程式である。すなわち、この式は、霜柱の短い生長初期に近似的に成立することが理解されよう。

以上、従来の二つのタイプの生長方程式は、いずれも (24) 式の一部を省略した近似式として与えられることが理解されよう。

4. 計算値と実測値の比較

4.1 実測値

さて、これから、新方程式による計算値と実測値の比較を試みることにする。データとしては、1953 年以來の霜柱の生長記録の中から、計算の比較的容易なものとして、次の条件を満たすものを選ぶことにした。

- 1) 快晴無風に近い夜のものであること。
- 2) なるべく長い霜柱のものであること。

この 2 条件になるべく沿うものとして、1955 年 1 月 27 日の夜から翌朝にかけて、茨城県阿見町の茨城大学農学部職員宿舎「若竹荘」の北側空地で観測したデータを取りあげることにした。当夜は夕刻から快晴で、翌朝 8 時にはじめて高積雲が出現するまで、終夜一片の雲も見られなかった。当夜の霜柱の長さ、および地上 150 cm で観測した気温、湿度、風向、風速を Table 1 に示す。なお、霜柱の表面温度は後に Table 2 に示す。

4.2 諸係数

(1) 諸係数の算出

霜柱の表面温度 θ_l や、生長曲線を、(14) 式や (28) 式を用いて算出するには、まず、それらの式に含まれる A_1 、 A_2 、 q_{s0} 等の諸係数を計算する必要がある。

Table 1. Height of frost-pillars and observed meteorological elements (during the night of 27 to the morning of 28, in Jan., 1955).

Time	Height of frost-pillars cm	Air temperature °C	Humidity %	Wind direction	Wind speed m·sec ⁻¹
18:18	0.00	+1.8	57	—	0.0
19:00	0.60	+1.0	61	—	0.0
20:00	1.35	0.0	65	W	0.6
21:00	1.96	-1.1	72	W	0.7
22:00	2.40	-1.2	72	W	1.2
23:00	2.82	-1.3	73	W	0.6
24:00	3.22	-2.4	80	W	0.2
1:00	3.57	-3.0	84	—	0.0
2:00	3.92	-3.8	90	—	0.0
3:00	4.24	-4.3	93	—	0.0
4:00	4.54	-4.8	98	—	0.0
5:00	4.83	-4.9	99	—	0.0
6:00	5.09	-5.2	100	—	0.0
7:00	5.36	-5.4	100	—	0.0
8:00	5.50	+0.2	65	—	0.0

そのうち、 q_{s0} の計算についてはすでに発表(金光・白井, 1982)したので略すが、他の A_1 , A_2 , $\bar{k}_i$, A_0 , A_3 , A_4 を算出するには、それぞれ(15)~(17), (23), (25), (26)式を用いねばならない。これらの式に用いた係数や物性値の値や単位は次の通りである。

α' : $\bar{T}$ における $d\rho/dT$ の値, $0.28 \times 10^{-6} (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{deg}^{-1})$, e : 大気中の水蒸気圧(mmHg), e_{as} : 気温に対する飽和水蒸気圧(mmHg), h : 熱伝達係数($\text{cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$), 算出法は後述する, h_v : 水蒸気の伝達係数($\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$), 算出法は後述する, h'_v : h_v/ρ_i , k_i : 氷の熱伝導度(0°C付近で) $5.28 \times 10^{-8} (\text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1})$, k_a : 霜柱内の氷柱間の空気熱伝導度(0°C付近で) $5.81 \times 10^{-8} (\text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1})$, $\bar{k}_i$: 霜柱全体の平均的熱伝導度, (17)式参照, L : 氷の融解の潜熱(0°C付近で) $79.7 (\text{cal} \cdot \text{g}^{-1})$, L_i : 氷の昇華の潜熱(0°C付近で) $678 (\text{cal} \cdot \text{g}^{-1})$, l : 霜柱の長さ(cm), q_{s0} : 地中からの熱流($\text{cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}$)算出法は金光・白井(1982)参照, R_{n0} : 0°Cの黒体の純放射($\text{cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$) (4)式で算出, T_0 : 273.15 (°K), T_a : ($T_0 + \theta_a$), α : 霜柱の密生度(当夜の実測値は0.058), ε_l : 霜柱表面の長波放射率, 0.97, $1-\zeta$: 大気の相対湿度, θ_a : 気温(°C), θ_l : 霜柱の表面温度(°C), ρ_{as} : 気温に対する飽和水蒸気密度($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$), ρ_i : 氷の密度(0°C付近で), 0.90 ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$), σ : Stefan-Boltzmannの放射定数, $1.3546 \times 10^{-12} (\text{cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{K}^{-4})$ 。

以上のうち、 h は次のように算出した。今の場合、無風状態に近いので自然対流とすると、Jakobの式(日本機械学会, 1972)が成立する。

$$Nu = 0.129 (Gr \cdot Pr)^{1/3} \quad (36)$$

ここに、 Nu : Nusselt 数($Nu = l_1 h k_a^{-1}$), l_1 : 表面の代表長, Gr : Grashoff 数($Gr = g l_1^3 \Delta T \nu^{-2} T_a^{-1}$), ν : 空気の動粘性係数($0.132 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$), g : 重力の加速度, Pr : Prandtl 数($Pr = \nu \kappa_a^{-1}$), κ_a : 空気の熱拡散係数($0.172 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$)。

以上から

$$h = 0.129 k_a \left| \frac{g \Delta T}{\nu \kappa_a T_a} \right|^{1/3} \quad (37)$$

次に、 h_v についても、(36)式の Nu を Sh (Sherwood 数= $0.129 (Ar \cdot Sc)^{1/3}$), Gr を Ar (Archimedes 数= $g l_1^3 \nu^{-2}$) $|(\rho'_l - \rho'_a)/\rho'_a|$, Pr を Sc (Schmidt 数= νD^{-1})でおきかえると、次式を得る。

$$h_v = 0.129 \left(\frac{g D^3}{\nu} \right)^{1/3} \left| \frac{\rho'_l - \rho'_a}{\rho'_a} \right|^{1/3} \quad (28)$$

ここに、 D : 水蒸気の空気中における拡散係数($0.22 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$), ρ'_l : 表面における湿潤空気の密度, ρ'_a : 大気の密度($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)。

以上、 h および h_v の、無風の場合の算出法を記したが、有風の場合も、 Gr , Ar の代りに Reynolds 数などを用いれば、類似の算出法が可能である。

(2) 諸係数の計算値

上記の計算法で求めた諸係数を Fig.2, Fig.3 に示す。

なお、 $\bar{k}_i$ は、(17)式に、 α の実測値 0.058 を入れて得た $3.61 \times 10^{-4} (\text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1})$ なる値を、当夜中一定と見なし使用した。

4.3 霜柱表面温度の計算値と実測値の比較

Table 1 に示した霜柱の実測長 l を用い、Fig.2 に示した A_1 , A_2 および上記の $\bar{k}_i$ の値を用いて (14) 式によって計算した霜柱表面温度を、実測値と比較したのが Table 2 である。

Table 2 に示されたように、計算値は常に実測値より低温になっているが、熱電対による実測値そのものが、放射冷却のはげしい快晴夜では真の温度より高く測られやすいことを考慮すれば、計算値と実測値のこの程度の差異は、止むを得ないものと考えられる。

4.4 生長曲線の計算値と実測値の比較

(28)式を用いて、 Δt 時間の霜柱の伸び Δl を、Newton の反復法によって計算して得た生長曲線と、実測の生長曲線を比較したのが Fig.4 である。さきに Fig.2, Fig.3 に示したように、諸係数は時間によって変化している。特に霜柱生長の初期には、 q_{s0} が急激に変化し、その影響で A_0 , A_3 , A_4 も初期変化が大きかった。そこで (28)

Fig. 2. Calculated values of A_1 , A_2 , q_{s0} .
 A_1 ; from Eq. (15), A_2 ; from Eq. (16), and
 q_{s0} ; from the previous paper (Konkō and
 Shirai, 1982).

Table 2. Calculated and observed temperatures
 at the surface of frost-pillars (during
 the night of 27 to the morning of 28,
 in Jan., 1955).

Time	Measured temperature °C	Calculated temperature °C	Difference (M-C) °C
18:18	-0.2	—	—
19:00	-1.9	-2.62	0.7
20:00	-3.7	-4.57	0.9
21:00	-5.2	-5.82	0.6
22:00	-5.2	-6.35	1.2
23:00	-5.8	-6.77	1.0
0:00	-5.9	-7.56	1.7
1:00	-7.4	-8.26	0.9
2:00	-7.7	-8.94	1.2
3:00	-8.1	-9.14	1.0
4:00	-8.3	-9.81	1.5
5:00	-9.0	-10.01	1.0
6:00	-9.2	-10.33	1.1

Fig. 3. Calculated values of A_0 , A_3 , A_4 .
 A_0 ; from Eq. (23), A_3 ; from Eq. (25), and
 A_4 ; from Eq. (26).

式による計算においては、はじめの Δt は、僅か 60 sec
 とし、以後次第に長くとり、19時以降はすべて 3600
 sec を Δt とし、その時間内の伸び Δl を順次算出して加
 算した。

Fig.4 において、計算値と実測値との一致は、数值的
 には良好であるが、時間の経過に伴って、計算値が上に

Fig. 4. Growth curves of frost-pillars.
 ○; observed values, curve B_0 ; calculated
 curve from Eq.(28) using h , h_v by Eqs.(37)
 and (38), curve B_1 ; calculated curve, using
 half values of h , h_v in curve B_0 , and curve
 B_2 ; calculated curve, using two fold values
 of h , h_v in curve B_0 .

離れていく傾向が見られた。これについての検討を試みる。

a) h , h_v について h も h_v も実測しないで Jakob の式をそのまま用いたものである。そこで, h と h_v を共に 2 倍又は 1/2 にした場合の生長曲線も Fig.4 に示した。図により, 3 種の計算値の間に大差はない。すなわち, h , h_v によって大きな変化はないといえよう。

b) $\bar{k}_i$ について $-\bar{k}_i$ の計算は (17) 式に示したように霜柱の水柱の断面が上から下まで均一と仮定されている。だが, 霜柱の断面は, 1 本ずつ, 上下方向に変化が見られるのが普通である。このことを考慮すれば, $\bar{k}_i$ には 1 より小さい係数を乗すべきであったかも知れない。これは今後のひとつの課題である。

5. ま と め

霜柱の表面と底面で, それぞれ熱収支を考え, これを結合する方法で生長曲線を求める方程式 (28) を誘導した。

また, 従来の熱伝導型方程式と放射冷却型方程式は, いずれも誘導された方程式の一部を省略した近似式として与えられることを明らかにした。すなわち, 熱伝導型方程式は, (21) 式から地中からの熱流 q_{s0} などを省略し, 霜柱の表面温度を一定として得られた近似式であり, 放

射冷却型方程式は, (24) 式の A_1 に含まれる純放射以外の項を無視して A_1 の代りに R_n を用いたものである。

次に, (28) 式による計算値と実測値とを比較するために, 式の中に, 従来用いられている物理定数等を入れて, 生長速度を計算してみた。その結果, その計算値は実測値とほぼ一致することが認められた。ただ, 今後の課題として, 霜柱群の上下方向の熱伝導度 $\bar{k}_i$ を正確に把握することの必要が認められた。

引用文献

- 1) ブドウィコ・エム・イ, 1956: 内島善兵衛訳: 地表面の熱収支, 河川水温調査会, 31.
- 2) 福田仁志・金光達太郎, 1948: 霜柱の生成と熱輻射について, 応用物理, **17**, 21~25.
- 3) 川野昌美, 1932: 霜柱の生長速度の研究, 気象集誌 II, **10**, 221~225.
- 4) 金光達太郎, 1980: 放射冷却型霜柱生長方程式について, 農業気象, **36**, 37~41.
- 5) 金光達太郎・白井清恒, 1982: 霜柱生長中の地中熱流束について, 農業気象, **38**, 51~54.
- 6) 日本機械学会, 1972: 伝熱工学資料, 改訂第 2 版, 18.
- 7) 田島節夫ほか 6 氏, 1942: 霜柱, 中央気象台彙報, **19**, 442~459.

Summary

Traditionally two types of equations for representing frost-pillars have been used: One type is based on considering heat conduction through the pillars, while the other is considering only the effect of long wave radiation at the surface of the frost-pillars. The former is inappropriate for describing short pillars of frost, while the shortcoming of latter is inadequate description of the long frost-pillars.

Unifying above two equations, we intended to derive one that could apply to both long and short frost-pillars. In this study, we have taken into consideration the heat balances that occur at both the pillars' surface and base, and from the viewpoint of unifying both, have derived the following equation:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{A_3 l + A_4}{A_2 l + \bar{k}_i}$$

where

$$A_1 = -\theta_a (h + 4 \varepsilon_l \sigma T_a^3 + L_i h_v \alpha') + \varepsilon_l R_{n0} + L_i h_v \zeta \rho_{as}$$

$$A_2 = h + 4 \varepsilon_l \frac{R_{n0}}{T_0} + 4 \varepsilon_l \sigma T_a^3 + L_i h_v \alpha'$$

$$A_3 = A_1 h_v' \alpha' + A_0 A_2$$

$$A_4 = \bar{k}_i \left(\frac{A_1}{L \rho_i \alpha} + A_0 \right)$$

$$A_0 = h_v' (\alpha' \theta_a - \zeta \rho_{as}) - \frac{q_{s0}}{L \rho_i \alpha}$$

$$\bar{k}_i = \alpha k_i + (1 - \alpha) k_a$$

where dl/dt ; growing velocity of frost columns, θ_a , T_a ; air temperature ($^{\circ}\text{C}$), ($^{\circ}\text{K}$), h ; heat-transfer coefficient, ϵ_i ; emissivity of long wave radiation from surface of frost columns, σ ; Stefan-Boltzmann constant, L_i ; latent heat of ice sublimation, h_v ; transfer coefficient of water vapor, a' ; $d\rho/dT$, R_{n0} ; net radiation of black body at 0°C , ζ ; $(1-\zeta)$ =relative humidity of air, ρ_{as} ; density of water vapor saturation at a given temperature, T_0 ; 0°C ($^{\circ}\text{K}$), h'_v ; $h_v/\rho_i \cdot \rho_i$; density of ice, q_{s0} ; heat flux from ground, L ; latent heat of water freezing, k_i ; heat conductivity of ice, and k_a ; heat conductivity of air between columns of ice.

The existing two equations can be obtained as approximations by simplifying given conditions of our equation.

The calculated values obtained by our equation correspond values of both short and long frost-pillars.