有限要素法による弾性板の音響入射に対する応答解析

VIBRO/ACOUSTIC ANALYSIS OF ELASTIC PLATES

BY FINITE ELEMENT METHOD

大鶴 徹*

Toru OTSURU

Here presented is a method to analyze the vibro/acoustic characteristics of plates with complex boundary conditions. The interaction between plate and air is taken into account in the form of radiation impedance. A matrix equation to compute the radiation impedance is set up through the finite elemental procedure with the help of the element selecting matrix. The transmitted sound pressure and the transmission loss can also be obtained by solving the matrix equation presented here. Several example computations on a plate showed good agreement between the values derived by this method and those by the classic analytical solutions.

Keywords : elastic plate, finite element method, acoustic radiation, sound transmission loss, specific radiation impedance

弾性板、有限要素法、音響放射、透過損失、比放射インピーダンス

1. 序

建築空間で用いられる壁体は、通常、空間並びに支持形態ともに単純とはいえない。特に屈曲振動を行う弾性板の振動及び音響放射性状は、単純支持等の円形板や矩形板に関しては、古くから解析が行われているものの¹⁻⁵⁾、形態が複雑な場合、詳細な解析は容易ではない。

筆者らは既報⁶⁾⁷⁾⁸⁾で、無限大バツフル内に設置された弾性壁体の透過損失に関する基礎的研究の報告を行い、有限要素法による弾性壁体の透過損失解析手法の基礎部分を提示してきた（なおバツフルの振動やバツフルからの反射音の影響は、上記の諸研究と同様に、無視している）。筆者らのこの手法は、複雑な形態を有する弾性板の解析へ適用可能な手法ではあるものの、簡単のため、比放射インピーダンスを介したモードの連成を無視していた。さらに、板振動と空気の連成を処理する際に重要となる比放射インピーダンスは、他の解析方法で求めた値を適用しており、有限要素解析の過程を利用したその

導出方法については触れていない。従って、モードの連成まで考慮した弾性板の音響透過損失解析手法及び、弾性板の比放射インピーダンスをマトリクス演算により効率的に求める手法の開発は、筆者らの解析の完備化にとって重要な課題としていた。

一方、比放射インピーダンスを用いることなく、室空気まで含めて有限要素解析を適用し、板振動と空気の連成を求める方法も試みられ⁹⁾¹⁰⁾筆者らも一部検討している¹¹⁾が、3次元空間の有限要素分割に多くの自由度を必要とする。さらに本研究においては、板の音響特性の解明に焦点を絞る目的で、前述のように板は無限大バツフル内に設置され、その両側の空間は無限大と仮定している。従って、その有限要素解析には無限要素¹²⁾等の特殊な要素の適用が必要となる。

また、無限空間への音響放射を含む問題については境界要素法が適しており、近年、種々の研究が試みられ成果をあげている^{12)~14)}。しかし、阪上ら¹⁴⁾が「反射音場

* 大分大学工学部建設工学科 助教授・工博

Assoc. Prof., Dept. of Architectural Engineering, Faculty of Engineering, Oita Univ., Dr. Eng.

を解析するためには、板の弾性振動を考慮する必要がある」と指摘するように、多自由度の共振系である有限大弾性板を含んだ空間の解析には、板の振動方程式を解くための配慮が重要と思われる。

そこで本論文では、板の振動についてはモード解析法で解を求め、各モードと空気の連成を比放射インピーダンスで処理する有限要素解析手法を提示する。即ち、上記の設定の弾性板の音響入射に対する応答を、板要素のみを用いる有限要素法によりモードの連成を含めて求める手法である。また、板の各モードに関する比放射インピーダンス算定式の導出も行う。これはモードベクトルとして数値的に得られる情報を用い、マトリクス演算により算定するものである。最後に、これらの手法をアルミニウム板の透過損失解析へ適用し、解析解との比較等から、その妥当性を明らかにする。

記号表

- A, B : 板の長さ[m]
 a, b : 板要素の要素長[m]
 c : 音速 [m/sec]
 E : 板のヤング率 [kg/m²]
 h : 板厚 [m]
 h_n : n 次の減衰比
 i : $\sqrt{-1}$
 k : 波長定数
 M_n : n 次の等価質量
 N : 離散系の総自由度数
 p_i : 入射音圧
 t : 時間
 z_0 : 空気特性インピーダンス ($=\rho_0 c$)
 η : 板の損失係数
 ρ : 板の密度 [kg/m³]
 ρ_0 : 空気密度 [kg/m³]
 σ : 板のポアソン比
 ω : 外力の角周波数
 ω_n : n 次の固有振動数

- $[], \{ \}$: マトリクス、ベクトル
 $[]^T, []^{-1}$: 転値及び逆行列
 $[C]$: 減衰マトリクス
 $\{d\}$: 節点変位ベクトル
 $\{d\}_e$: 要素 e の節点変位ベクトル
 $\{F\}$: 外力ベクトル (入射音圧ベクトル)
 $[K]$: 剛性マトリクス
 $[M]$: 質量マトリクス
 $\{\phi_n\}$: n 次のモードベクトル
 $\text{Re}\{x\}$: x の実部
 $\text{Im}\{x\}$: x の虚部
 $\dot{x}$: $\frac{\partial x}{\partial t}$
 x^* : x の共役複素数

2. 有限要素法による板振動・音響放射解析手法

2.1 問題設定と座標系

本論の解析対象とする系を図1に、また、弾性板を有限要素に分割した例とその座標系を図2に示す。以下の解析では、簡単のため、密度や厚さ等が一様な板を仮定した上で議論を展開している。なお板の周辺や内部の支持条件は、用いる板要素の自由度を適宜固定する、あるいは梁要素等を組み合わせる、等により固定や単純支持、自由端等、柔軟に対応できる。但し、既往の研究と同様、板は無限大バツフル内に設置され、その両側は半無限大空間とし、入射音や板と無限大バツフルの間の振動等の相互作用は無視している。

2.2 弾性板の振動解析

弾性系の離散的運動方程式は、一般に次式で表わされる¹³⁾。

$$[M]\{\dot{d}\} + [C]\{d\} + [K]\{d\} = \{F\} \quad (1)$$

減衰項が比例減衰の形式を満たす場合、角周波数 ω の調和外力に対するこの系の定常状態の応答は、モード解析法により次式で求められる。

$$\{d\} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \{\phi_n\} \quad (2)$$

但し、

$$\alpha_n = \frac{\{\phi_n\}^T \{\bar{F}\} e^{i\omega t}}{\{(\omega_n^2 - \omega^2) + i 2 h_n \omega_n \omega\} M_n} \quad (3)$$

$$M_n = \{\phi_n\}^T [M] \{\phi_n\}, \quad h_n = \frac{\{\phi_n\}^T [C] \{\phi_n\}}{2 \omega_n M_n} \quad (4)$$

$$\{F\} = \{\bar{F}\} e^{i\omega t} \quad (5)$$

図1 解析対象の弾性板と全体座標系、板は無限大バツフル内に設置されている

図2 $Z=0$ 平面 (板) 上に設定した全体座標系 (X, Y) 及び、要素 e, e_2 に関する局所座標系 $(x, y)_e, (x_2, y_2)_{e2}$

また $\{\phi_n\}$ と ω_n は、(1)式に関する次のMK型固有値問題¹⁴⁾の解である。

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = \{0\}. \quad (6)$$

2.3 減衰項：板の内部損失と空気反力

有限要素法では一般に、板曲げ要素 e 内部の点 $(x, y)_e$ における z 方向変位 $w(x, y)_e$ を要素節点変位ベクトル $\{d\}_e$ と w に関する形状関数 $[N_w(x, y)_e]$ により次式のように近似する。なお $[N_w(x, y)_e]$ は行ベクトルである。また $(x, y)_e$ は要素 e に関する局所座標系であることを示す。

$$w(x, y)_e = [N_w(x, y)_e] \{d\}_e. \quad (7)$$

ここで、系の減衰を、板の内部損失と空気の反力（即ち、音）の2者によるものとして次のように仮定する。

$$[C] \{d\} = [C_p] \{d\} + [C_a] \{d\} \quad (8)$$

内部損失による減衰マトリクス $[C_p]$ は、構造減衰として次式で与える。

$$[C_p] = \frac{\eta}{\omega} [K] \quad (9)$$

一方、(8)式右辺の第2項は以下のように求められる。まず、屈曲振動板の片側表面に生じる節点音圧ベクトル $\{P_t\}$ を、比放射インピーダンスを用い、

$$\{P_t\} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m \zeta_n z_0 \dot{\alpha}_m \{\phi_n\} \quad (10)$$

と表わす。音圧についても w と同一の形状関数を適用すれば点 $(x, y)_e$ における音圧 $p_t(x, y)_e$ は次式で得られる。

$$p_t(x, y)_e = [N_w(x, y)_e] \{P_t\}_e \quad (11)$$

なお既報⁸⁾では、モードの連成を無視し、以下、 $m = n$ の仮定の下で処理していた。

続いて、 n モードの要素節点変位ベクトル、 $\alpha_n \{\phi_n\}_e$ を $\{d_n\}_e$ と記せば、要素に関する空気のなす仕事 W_e は、板両面の媒質が等しい場合、

$$\begin{aligned} W_e &= \{d\}_e^T \iint_e [N_w(x, y)_e]^T [N_w(x, y)_e] dx dy \times \\ &\quad \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N 2 m \zeta_n \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_n} \right) z_0 \{d_n\}_e \\ &= \{d\}_e^T \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [C_{a, m, n}]_e \{d_n\}_e \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{但し、} [C_{a, m, n}]_e = 2 m \zeta_n \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_n} \right) z_0 \frac{[M]_e}{\rho h} \quad (13)$$

である。さらに、(12)式を板面全体へ拡張することによって次式が成立する。

$$[C_a] \{d\} = \sum_m \sum_n [C_{a, m, n}] \{d_n\} \propto [M] \quad (14)$$

即ち、上述の内部損失に関する仮定と合わせ、この系

の減衰項が比例減衰の形式を満たすことが明らかとなった。これは、系の振動解析へ2.2のモード解析法を適用するための論理的基盤である。

以上によって(4)式の h_n は、

$$h_n = \frac{\{\phi_n\}^T ([C_p] + [C_{a, n, n}]) \{\phi_n\}}{2 \omega_n M_n} \quad (15)$$

$$\therefore h_n = \frac{\eta \omega_n}{2 \omega} + \frac{n \zeta_n z_0}{\omega_n \rho h} \quad (16)$$

となる。

このように本論の解析手法では、入射音圧については外力ベクトルとして、反射及び透過音圧に関しては比放射インピーダンスを利用した減衰マトリクス中で、それぞれ独立に処理し、以て、板振動のモード解析を可能としている。

2.4 要素選定マトリクス

以降の解析では、全体マトリクス（ベクトル）と要素マトリクス（ベクトル）の変換を効率的かつ明確に行う必要がある。この変換は、有限要素法の文献^{15)~17)}では、通常、暗黙裏に行われている。一部の文献¹⁸⁾でブールマトリクスの一種として特別な名称を付けずに、同様のマトリクスを使用した例もあるが、これとは別個に筆者らは、要素選定マトリクス(element selecting matrix)と称して下式を満たすマトリクス $[S_e]$ を導入してきた¹⁹⁾。

$$\{d\}_e = [S_e] \{d\} \quad (17)$$

$$[M] = \sum_e [S_e]^T [M]_e [S_e] \quad (18)$$

以下、この $[S_e]$ を用いて議論を進める。

2.5 放射音響パワー算定式

屈曲振動板上の点 $(x, y)_e$ から放射される単位面積あたりの音響パワー $\Pi(x, y)_e$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Pi(x, y)_e &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_t(x, y)_e \cdot \dot{w}(x, y)_e^* \} \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 z_0 \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m \zeta_n \alpha_m \{\phi_n\}_e^T \right) [N_w(x, y)_e]^T \times \right. \\ &\quad \left. [N_w(x, y)_e] \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \{\phi_k\}_e \right) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

従って、板面全体から板の片側空間へ放射される音響パワー E_t は次式で求められる。

$$\begin{aligned} E_t &= \sum_e \iint_e \Pi(x, y)_e dx dy \\ &= \sum_e \frac{1}{2} \omega^2 z_0 \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m \zeta_n \alpha_m \{\phi_n\}_e^T \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\iint_e [N_w(x, y)_e]^T [N_w(x, y)_e] dx dy \right) \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \{\phi_k\}_e \right) \right\} \\ &= \sum_e \frac{1}{2} \omega^2 z_0 \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m \zeta_n \alpha_m \{\phi_n\}_e^T \right) \times \right. \\ &\quad \left. \frac{[M]_e}{\rho h} \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \{\phi_k\}_e \right) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

さらにこの式は、 $[S_e]$ を利用して以下の通り変形できる。

$$E_t = \sum_e \frac{1}{2} \omega^2 z_0 \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m \zeta_n \alpha_m \{\phi_n\}^T \right) \times \frac{[S_e]^T [M]_e [S_e]}{\rho h} \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \{\phi_k\} \right) \right\} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 z_0 \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m \zeta_n \alpha_m \{\phi_n\}^T \right) \times \frac{[M]}{\rho h} \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \{\phi_k\} \right) \right\}$$

よって最終的に次式を得る。

$$E_t = \frac{1}{2} \omega^2 z_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m \zeta_n \alpha_m \alpha_n^* \frac{M_n}{\rho h} \right\} \quad (22)$$

なお音響パワー E_t が入射する際の透過損失 TL は、この E_t を透過側空間への放射音響パワーとみなすことにより、次の通り算定できる。

$$TL = -10 \log_{10} \frac{E_t}{E_i} \quad (23)$$

3. 比放射インピーダンス算定式

このように、比放射インピーダンス $m \zeta_n$ が何らかの方法で求められている場合、弾性板からの放射音の音圧や音響パワーが求められる。従って、上記の解析過程と整合的な手法による $m \zeta_n$ の導出が必要となる。そこで本章では古典的手法^{1)~4)}を基礎に、(6)式から離散的に得られるモードベクトル $\{\phi_m\}$ と $\{\phi_n\}$ に関する $m \zeta_n$ のマトリクス演算による算定式の導出を行う。

板面上の任意点、全体座標系で (X, Y) 、局所座標系で、ある要素 e 内の $(x, y)_e$ 、における板の面外方向変位成分 w は、(2)(7)及び(17)式から、次のように表わされる。

$$w(X, Y) = w(x, y)_e = [N_w(x, y)_e] \sum_{n=1}^N \alpha_n \{\phi_n\}_e$$

$$= [N_w(x, y)_e] [S_e] \sum_{n=1}^N \alpha_n \{\phi_n\} \quad (24)$$

この点(板の透過側表面)に生じる音圧 p_t は、それぞれ $m \zeta_n$ 及びグリーン関数を用い、次の2式で表わすことができる。なお (X_2, Y_2) を局所座標系では $(x_2, y_2)_e$ と記す。

$$p_t(X, Y) = p_t(x, y)_e$$

$$= i \omega \rho_0 c [N_w(x, y)_e] [S_e] \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m \zeta_n \alpha_m \{\phi_n\} \quad (25)$$

及び

$$p_t(X, Y) = p_t(x, y)_e$$

$$= \sum_{e_2} \frac{i^2 \omega^2 \rho_0}{2 \pi} \times \int \int_{e_2} [N_w(x_2, y_2)_{e_2}] [S_{e_2}] \sum_{l=1}^N \alpha_l \{\phi_l\} \frac{e^{-ikr}}{r} dx_2 dy_2 \quad (26)$$

$$\text{但し、} \quad r = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}$$

なお上式に現われる2点 (X, Y) 及び (X_2, Y_2) を図2に例示している。この2式が成立する条件は、

$$i \omega \rho_0 c [N_w(x, y)_e] [S_e] \sum_{n=1}^N m \zeta_n \alpha_m \{\phi_n\}$$

$$= \sum_{e_2} \frac{i^2 \omega^2 \rho_0}{2 \pi} \times \int \int_{e_2} [N_w(x_2, y_2)_{e_2}] [S_{e_2}] \alpha_m \{\phi_m\} \frac{e^{-ikr}}{r} dx_2 dy_2 \quad (27)$$

である。ここでこの式の両辺に次の演算を施す。

$$\sum_e \int \int_e \left\{ ([N_w(x, y)_e] [S_e] \{\phi_n\})^T \times (Eq.(27)) \right\} dx dy \quad (28)$$

この演算の結果をモードベクトルの直交性を利用して整理すると、次のような比放射インピーダンスの算定式が導出される。

$$m \zeta_n = \frac{i k \{\phi_n\}^T [I_1] \{\phi_m\}}{2 \pi \{\phi_n\}^T [I_2] \{\phi_n\}} \quad (29)$$

但し、

$$[I_1] = \sum_e \sum_{e_2} [S_e]^T \int \int_e [N_w(x, y)_e]^T [I_{e_2}] [S_{e_2}] dx dy$$

また、

$$[I_{e_2}] = \int \int_{e_2} [N_w(x_2, y_2)_{e_2}] \frac{e^{-ikr}}{r} dx_2 dy_2$$

$$[I_2] = \frac{[M]}{\rho_0 h}$$

なお(26)式の構成は、グリーン関数と形状関数の積を要素面で積分し重畳しており、板面を含む半無限空間について境界要素法を適用したものと意味的に等価と解釈できる。

4. 解析例

4.1 解析対象と有限要素

本章では以上の解析手法の具体的な適用例を提示する。なお対象とする板の形態は、上述のように相互作用のない無限大パツフル内に設置された均一な平板であり、周辺支持条件や平面形状は特に制限していない。ここでは、手法の妥当性の検討を目的に、従来から解析対象としてきた周辺固定長方形アルミニウム板の平面波垂直入射($E_i = AB |p_i|^2 / 2z_0$)に対する透過損失を解析し、解析解等と比較する。表1に解析対象の物性値を示しておく。

解析に用いた有限要素及び分割数も、既報⁸⁾と同様、各節点に $(w, \partial w / \partial y, \partial w / \partial x)$ の3自由度を持つ長方形板曲げ要素、 10×6 分割、即ち135自由度、を採用した。

4.2 比放射インピーダンスの具体的算定方法

(29)式を用い比放射インピーダンスを具体的に算定するため、ここでは、有限要素法や境界要素法等で多用されるガウス積分を以下の方法で適用している。

まず、 $e \neq e_2$ の場合には(29)式の積分へガウスの2点法を直接適用する。次に $e = e_2$ の場合、積分の際に $r = 0$ の特異点の処置が必要となるため、

$$\begin{cases} x - x_2 = r \cos \Theta \\ y - y_2 = r \sin \Theta \end{cases} \quad (30)$$

の変数変換を施した後、ガウスの3点法を適用する。なお、この変数変換により(29)式中の $[I_1]$ は次のように変形できる。

$$[I_1] = \left\{ \sum_e \sum_{e_2 \neq e} [S_e]^T \int \int_e [N_w(x, y)_e]^T [I_{e_2}] dx dy [S_{e_2}] \right\} + \left\{ \sum_e [S_e]^T \int \int_e [N_w(x, y)_e]^T [J_e] dx dy [S_e] \right\} \quad (31)$$

但し、

$$[J_e] = \int \int_e [N_w(r \cos \Theta + x_2, r \sin \Theta + y_2)_e] e^{-ikr} d\Theta dr \quad (32)$$

さらに、(32)式の算定にあたっては、次式のように図3の各象限 v ($v=1, 2, 3, 4$) 毎の積和を行っている。

$$[J_e] = \sum_{v=1}^4 [J_v] \quad (33)$$

$$[J_v] = \sum_{\kappa=1}^3 \int_{r_v'}^{r_v''} \int_{\Theta_v'}^{\Theta_v''} [N_w(r \cos \Theta + x_2, r \sin \Theta + y_2)_e] e^{-ikr} d\Theta dr \quad (34)$$

積分領域 $((r', \Theta') \sim (r'', \Theta''))$ は、長方形要素の形状によって異なる。これを要素長 a, b と特異点 (x_2, y_2) の関係毎に示したものが表2である。ここで κ は、図3における各象限の積分領域を、 Θ の始点または終点が座標軸上に存在するか否かによって、 $[\kappa=1: \Theta$ の始点及び終点とも

に座標軸上にある、 $\kappa=2: \Theta$ の始点又は終点の一方が座標軸上にある、 $\kappa=3: \Theta$ の始点及び終点ともに座標軸上にある]、という各場合に依り3種に分類する記号である。

この方法によれば、 $e \neq e_2$ の場合4点、 $e = e_2$ の場合108 ($= 3 \times 3 \times 4 \times 3$) 点における積和により積分を近似することになる。なお、今回のように分割パターンが規則的な場合、要素形状が同一なため、全要素 e に関する $[J_e]$ (及び $[J_v]$) が全て同一の値となる。

4.3 結果及び考察

今回の解析に用いた有限要素の要素長は、ほぼ4kHzの音波長程度となっているため、本節では1kHz以下の領域の解析を主眼としている。

4.3.1 固有値解析結果とモードの抽出

(6式)の固有値解析によって、既報⁸⁾と同一の、135個の ω_n 及び $\{\phi_n\}$ が得られた(表3)。これら全てのモードに関する連成の組み合わせ数は9180組である。しかし本章での解析の入射条件(平面波垂直入射)の場合、幾何学的に逆対称のモードの放射音圧は(3式)の分子が0となるためその影響を無視でき、組み合わせから除外できる。

図3 (x, y) 座標系から (r, Θ) 座標系への変換、音源及び受音点は (x, y) 及び (x_2, y_2) 、 v は象限、 κ は各象限における領域の番号を示す

表1 解析対象(アルミニウム板)の物理定数

Young's modulus E [N/m ²]	mass density ρ [kg/m ³]	Poisson's ratio σ	loss factor η	dimensions A [m] B [m] h [m]
7.0×10^{10}	2.7×10^3	0.33	1.0×10^{-5}	0.75 0.39 1.2×10^{-3}

表2 (34)式の積分領域

$v=1$			$v=2$			$v=3$			$v=4$		
$\kappa=1$	$\kappa=2$	$\kappa=3$	$\kappa=1$	$\kappa=2$	$\kappa=3$	$\kappa=1$	$\kappa=2$	$\kappa=3$	$\kappa=1$	$\kappa=2$	$\kappa=3$
(IF $a - x_2 \geq b - y_2$)			(IF $x_2 \geq b - y_2$)			(IF $x_2 \geq y_2$)			(IF $a - x_2 \geq y_2$)		
r_v'	0	$b - y_2$	0	$b - y_2$	x_2	0	y_2	x_2	0	y_2	$a - x_2$
r_v''	$b - y_2$	$a - x_2$	$b - y_2$	x_2	$\sqrt{x_2^2 + (b - y_2)^2}$	y_2	x_2	$\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$	y_2	$a - x_2$	$\sqrt{(a - x_2)^2 + y_2^2}$
Θ_v'	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \sin^{-1} \frac{b - y_2}{r}$	$\pi - \sin^{-1} \frac{b - y_2}{r}$	π	π	$\pi + \cos^{-1} \frac{x_2}{r}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} + \cos^{-1} \frac{y_2}{r}$	$\frac{3\pi}{2} + \cos^{-1} \frac{y_2}{r}$
Θ_v''	$\frac{\pi}{2}$	$\sin^{-1} \frac{b - y_2}{r}$	π	π	$\pi - \cos^{-1} \frac{x_2}{r}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{y_2}{r}$	$\frac{3\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{y_2}{r}$	2π	2π	$2\pi - \cos^{-1} \frac{a - x_2}{r}$
(IF $a - x_2 < b - y_2$)			(IF $x_2 < b - y_2$)			(IF $x_2 < y_2$)			(IF $a - x_2 < y_2$)		
r_v'	0	$a - x_2$	0	x_2	$b - y_2$	0	x_2	y_2	0	$a - x_2$	y_2
r_v''	$a - x_2$	$b - y_2$	x_2	$b - y_2$	$\sqrt{x_2^2 + (b - y_2)^2}$	x_2	y_2	$\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$	$a - x_2$	y_2	$\sqrt{(a - x_2)^2 + y_2^2}$
Θ_v'	0	$\cos^{-1} \frac{a - x_2}{r}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \cos^{-1} \frac{b - y_2}{r}$	π	$\frac{\pi}{2} + \cos^{-1} \frac{x_2}{r}$	$\pi + \cos^{-1} \frac{x_2}{r}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} + \cos^{-1} \frac{y_2}{r}$
Θ_v''	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\pi - \cos^{-1} \frac{x_2}{r}$	$\pi - \cos^{-1} \frac{x_2}{r}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{y_2}{r}$	2π	$2\pi - \cos^{-1} \frac{a - x_2}{r}$	$2\pi - \cos^{-1} \frac{a - x_2}{r}$

従って、*a priori* に境界条件を設定し、逆対称モードを予め除外しておく方法等も考えられるが、ここでは、より汎用性の高い次のような数値的方法を適用した。

平板の振動では、低周波数からモードの出現順序をみた場合、 x, y 両方向共に対称な(1,1) モードから出現する。そこで、このモードによる(3)式分子の $\{ \phi_n \} \{ F \}$ の値を基準に、各モードの $\{ \phi_n \} \{ F \}$ の値が基準値の 10^{-6} 倍以下の場合、そのモードが振動及び音響放射へ与える影響を無視できるものとした。今回の場合、この方法で98個のモードが除外され、表3の37個が抽出された。なおこれは、

表3 解析に用いた37個のモードの
出現順序：No.、次数： n 、及び周波数： f [Hz]

No.	n	f [Hz]	No.	n	f [Hz]	No.	n	f [Hz]	No.	n	f [Hz]
1	1	48	11	36	599	21	73	1287	31	110	2395
2	3	89	12	37	605	22	75	1297	32	111	2428
3	8	177	13	39	632	23	77	1360	33	113	2455
4	12	241	14	44	720	24	82	1433	34	115	2507
5	14	266	15	47	788	25	85	1590	35	120	2610
6	17	313	16	51	880	26	87	1602	36	121	2653
7	18	328	17	52	913	27	88	1670	37	124	2728
8	27	441	18	66	1134	28	92	1784			
9	29	492	19	67	1155	29	103	2048			
10	34	596	20	69	1217	30	107	2295

× Re { 本論の手法 } ○ Re { 解析的手法 }
× Im { 本論の手法 } ○ Im { 解析的手法 }

図4 比放射インピーダンス算定結果
(上段): $1\zeta_1$ 、(下段): $3\zeta_3$

既報⁸⁾におけるモードベクトルのコンピュータによる次数識別方法(モードチェッカと呼称していた)で抽出された対称モードの個数と同一である。またこの手続きにより、モードの組み合わせ数は703組へと減じられる。

4.3.2 比放射インピーダンス算定結果

4.2の方法を用い、前節で抽出された703組のモードに関する比放射インピーダンスを求めた結果の一部を図4、5に示す。これらの結果の妥当性について、次の2面から検討している。

第一に、本論の手法によって得た値と田中³⁾⁴⁾による解析的手法を用いて得られた値との比較である。但し、板振動モードは x, y 2次元方向の次数の組み合わせせからなり、特に高次のモードでは用いる関数列や多項式近似の方法により、その出現順序やモードシェイプの細部に若干の相違が生じ得る。このため単に出現順序のみで照合した場合、 $\{ \phi_n \}$ と関数展開を用いた解析的手法で用いられているモードシェイプは必ずしも一致するとは限らない。そこで、モードシェイプが単純で形状として近いと推定される、1次及び3次のモードについて比較したものが図4である。なお比較するモード相互の x, y 両方向の次数の一致については、上記のモードチェッカによって別途、確認している。

図4では本論の手法による値を1/6 Oct.点毎に、解析的手法による値を1/3 Oct.点毎に、それぞれ求めて比較しているが、まず、 $1\zeta_1$ に関し良好な一致が得られている。また $3\zeta_3$ についても、値のピーク付近で若干の相違が見られるものの、全般にわたって良好な近似が得られている。

続いて第二の検討を行う。理論的には $m\zeta_n = n\zeta_m$ が成立する。以下これを比放射インピーダンスのモード間の相反性(reciprocity)と呼ぶ。しかし(29)式ではこの点が明確とは言えない。そこで、この比放射インピーダンスのモード間の相反性に着目し検討した結果の一例が図5である。第36次モードに関する場合にごくわずかな相違が認められるものの、全般にわたり、互いに独立に求められた数値がよく一致し、比放射インピーダンスのモード間の相反性が明瞭に出現している。また、各 $m\zeta_n$ と $n\zeta_m$ の実部と虚部に関し、ピアソンの積率相関係数を算定したところ、14次以下のモードについては31Hz～4kHzの全周波数領域ではほぼ0.99、全てのモードに関する相関についても、1kHz以下の領域ではほぼ0.90以上の値が得られた。従って以上の結果を総合すれば、今回解析対象とした弾性板の比放射インピーダンス算定にあたり、(29)式へ4.1節で示した方法を適用した場合、比放射インピーダンスのモード間の相反性が成立しているものとみなせよう。

4.3.3 透過損失解析結果

前節の結果を踏まえ、本節の透過損失算定では、 $m=n$

図5 比放射インピーダンスの
モード間の相反性
(上段) $1\zeta_3$ と $3\zeta_1$ (中段) $1\zeta_8$ と $8\zeta_1$ (下段) $1\zeta_{36}$ と $36\zeta_1$

図6 透過損失算定結果

の場合を除き、全体の半数の $m\zeta_n$ のみを求め、 $n\zeta_m = m\zeta_n$ として適用した。こうして求めた透過損失値を、前述の解析的手法による結果と比較して図6に示す。有限要素解と解析解の間に共振周波数に関し若干の相違が認められるものの、全般に両者の一致は良好である。なお、周辺固定板の共振周波数の解析解は得られておらず、また解析的手法といえども有限要素法同様に最終的には有限項からなる数値的な近似計算によって求められた値であることも考慮して、この相違については精密な実験との比較や他の有限要素を適用する等さらに本手法の精度面からの検討を重ねる必要があるものと思われる。但し今回の解析結果では、モード間の連成を無視した従来の手法⁸⁾で出現しなかった、「第1共振点を除いた低次の共振点より僅か低い周波数で透過損失が非常に大きくなる」²⁾箇所も算定されており、解析的手法による結果により近い値が得られている。

以上のように、比放射インピーダンスの近似精度、そのモード間の相反性、さらに透過損失算定精度の3点から検討した結果、それぞれ良好な結果が得られており、本論で提示した各式並びに具体的算定方法の妥当性が示されたものと結論できよう。

5. 結

無限大バッフル内に設置された屈曲振動板の音響入射に対する振動・音響放射性状に関し、板面のみを有限要素分割し、マトリクス演算により放射音エネルギーや比放射インピーダンス、透過損失等を算定するための各式の導出を行った。また、長方形アルミニウム板の透過損失解析への応用例から、比放射インピーダンスの具体的算定方法の提示と、本手法により得られる結果の妥当性を示した。なお本手法は、相互作用のない無限大バッフルを挟む半無限空間を仮定することにより室形状の影響を排除しているため、板の音響性状に焦点を絞った検討に適し、また板要素のみを用いた有限要素解析により得られる情報を活用することから、利用可能な自由度数を板の解析へ集中できる点も特徴である。本手法によれば、種々の複雑な周辺支持条件や形状の壁体の音響特性解析も可能であり、現在、各種の検討を行っている。解析には主に九州大学大型電算センターFACOM VP-2600を用いた。

謝辞

本研究を進めるにあたり多大のご助言やご協力を頂いた、九州大学工学部建築学科の中村洋先生、藤本一寿先生及び中村・藤本研究室の皆様へ、深謝の意を表します。

注

本報は、文献No.20,21,22,23で発表した論文に加筆、修正を加えたものである。

参考文献

- 1) J. W. S. Rayleigh : The Theory of Sound second edition, Dover Publications, Vol. I Chapter X, Vol. II Chapter XV, 1945
- 2) 川井孝雄：一重壁の遮音機構の解析 -円形平板の平面波垂直入射-, 音響学会誌29巻4号, pp.186~198, 1973年
- 3) 田中 洪：矩形中空壁の垂直入射波に対する透過損失の解析, 音響学会誌31巻7号, pp.441~448, 1975年
- 4) 田中 洪：矩形板の音響透過損失の算定に関する解析的研究, 東京工業大学学位論文, 昭和50年
- 5) 高橋大式、古江義弘、松浦邦男：球面波入射による板振動・音の透過, 音響学会誌35巻6号, pp.314~321, 1978年
- 6) 大鶴 徹、坂田展甫、山岸豪敏：緩やかな曲率を有する任意形態遮音板の音響入射に対する応答解析, 建築学会環境工学論文集6号, pp.35-42, 1984年
- 7) T. Otsuru, H. Yamamoto, H. Yanagita : Sound Transmission Analysis by Computational Mechanics on Cylindrical Curved Plates, Proc. of Inter-Noise 88, Vol.1, pp.351~354, 1988
- 8) 大鶴 徹、山本秀樹：計算力学的手法による板の音響透過特性解析, 音響学会誌44巻4号, pp.293~299, 1988年
- 9) A. Craggs : Sound transmission between enclosures - A study using plate and acoustic finite element -, ACOUSTICA, Vol.35 No.2, pp.89~98, 1976
- 10) J. Ramakrishnan, L. R. Koval : A finite element model for sound transmission through laminated composite plates, J. Sound Vib., 112 (3), pp.433~446, 1987
- 11) 大鶴 徹、高崎 強、鏑山裕倫：板の形態とその遮音特性に関する研究 -連成マトリクスと減衰マトリクスの構成-, 建築学会大会梗概集(東北), pp.1423~1424, 1991年
- 12) 加川幸夫：開領域問題のための有限/境界要素法, サイエンス社, 昭和58年
- 13) A. F. Seybert : APPLICATIONS OF THE BEM IN ACOUSTICS, NOISE-93 Proceedings, Vol.1, pp.255-262, 1993
- 14) 阪上公博、杉本理恵、高橋大式、森本政之：有限要素法・境界要素法を用いた弾性平板による反射音場解析, 音響学会誌48巻11号, pp.786~793, 1992年
- 15) 蔭津久一郎、宮本博、山田善之、川井忠彦：有限要素法ハンドブックII、応用編 培風館、1983年
- 16) 戸川隼人：有限要素法による振動解析, サイエンス社, 昭和57年
- 17) O. C. Zienkiewicz (吉識雅夫、山田嘉昭監訳)：マトリクス有限要素法, 培風館、1975年
- 18) J. C. Sabonnadière, J. L. Coulomb (神谷紀生訳)：有限要素法を使ったCAD, サイエンス社, 昭和63年
- 19) T. Otsuru, H. Yamamoto : Sound Transmission Analysis by Computational Mechanics using Characteristic Impedance of Mode Vectors, Proc. of Inter-Noise 90 Vol.1, pp.539~542, 1990
- 20) T. Otsuru : Sound Transmission Analysis by Computational Mechanics using Characteristic Impedance derived through a Finite Elemental Procedure, Proc. of Second International Congress on Recent Developments in Air- & Structure- Borne Sound and Vibration, Vol.1, pp.477~484, 1992
- 21) 大鶴 徹：室と空気の振動/音響連成解析-その1 壁体の比放射インピーダンス及び透過音エネルギーの計算力学的導出-, 建築学会九州支部研究報告, 第33号, pp.157~160, 1992年
- 22) 大鶴 徹：室と空気の振動/音響連成解析-その2 遮音解析への適用-, 建築学会九州支部研究報告, 第33号, pp.161~164, 1992年
- 23) 大鶴 徹、大久保光次：弾性壁体と室空気の音響振動解析-その1 解析手法の概要-, 建築学会大会梗概集(北陸), pp.177~178, 1992年

(1993年10月4日原稿受理, 1994年4月20日採用決定)