間欠空調時の室温・熱負荷の確率性状に関する研究

—非正規外乱の場合の解析—

AN ANALYSIS OF STOCHASTIC PROPERTIES OF ROOM
AIR TEMPERATURE AND HEATING LOAD

—Effect of Non-Gaussian Noise—

銚井修一*, 松本 衛**

Shuichi HOKOI and Mamoru MATSUMOTO

A new method is proposed which gives the probability density function of room air temperature and heating load taking account of non-Gaussian external climates such as outdoor temperature and solar radiation. This method is a simple extension to the second-order analysis already shown in another article. A thermal system composed of one mass is used to analyze the relationship between the eigenvalue of the system and the degree of non-Gaussianity. Next, the similar calculation using a simple room clarifies the influence of non-Gaussianity on room air temperature and heating load. The utility of the previously proposed thermal calculation method, which gives only the mean and variance of the heating load, is discussed through comparison with the present results.

keywords : heating load, external climates, stochastic properties, non-Gaussian noise, ARMA model, characteristic function

熱負荷、外界気象、確率性状、非正規外乱、ARMAモデル、特性関数

1. はじめに

省エネルギー的な建築壁体・空調装置設計および運転を行うには、負荷の正確な算定・予測が必要となる。これに対しては、適切な気象データを用いること、気象データの特性を考慮した室及び装置負荷の計算法が必要である。

負荷を決定する主要因である外気温・日射量等の外界気象条件は、確率的に変動し、負荷の計算にはこれらを考慮する必要がある¹⁾²⁾。そのような観点より、これまで間欠空調時の室温・熱負荷の確率分布を求める方法に関する検討を行ってきた³⁾⁴⁾。これらの解析においては、外気温・日射量は確定成分とランダム成分の和より構成され、更にランダム成分は正規白色雑音を入力とする線形モデルにより表現されるものとして、室温・熱負荷の平均・分散を求めた。系が線形で入力雑音が正規分布する場合には室温・熱負荷も正規分布となり、得られた平均・分散から室温・熱負荷の(正規)確率密度を同時に決定

することができる。この確率密度関数を用いて、設計用の最大負荷・積算負荷・負荷分布が定められる。

気象データを整理した結果によれば、外気温・絶対湿度はほぼ正規分布する⁵⁾⁶⁾。日射量は必ずしもきれいな正規分布ではないが⁵⁾⁶⁾⁷⁾、多くの実用的な目的に対しては、正規分布近似は十分な精度を有する。

しかし、外乱を正規分布と近似して得られる室温・熱負荷の近似的な確率分布(正規分布)では不十分な場合も考えられる。例えば、窓を通しての射入日射はその大部分が瞬時に室負荷となるため、射入日射の正規分布からのずれはそのまま室負荷・装置負荷の分布となる可能性がある。この場合、平均と分散により与えられる近似的な正規分布では不十分であり、正確な確率密度関数を求める必要がある。これは、装置の非線形な部分負荷特性を適切に考慮する場合には特に重要である。

以上の観点より、本論文は入力外乱が非正規分布の場合の室温・熱負荷の確率分布の解析法を示し、気象デー

本論文は、平成元年度建築学会近畿支部研究報告集に発表したものを基に、加筆修正したものである。

* 京都大学工学部建築学科 教授・工博

** 神戸大学工学部建設学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Civil Eng., Faculty of Engineering, Kobe University, Dr. Eng.

タが有する非正規性が結果に及ぼす影響を把握することを目的とする。

2. 解析法

2-1 系の状態方程式表現と平均・分散

外気温・日射量をARMAモデルで表現し、線形の建物熱的系に適当な離散化を施すと、一般にこれらは次の状態方程式で表現される⁹⁾。

$$\mathbf{X}^{j+1} = [\mathbf{A}]^j \mathbf{X}^j + [\mathbf{B}]^j \mathbf{G}^j + [\mathbf{C}]^j \mathbf{E}^j \quad [1]$$

ここで、

$$\mathbf{X}^j = \begin{bmatrix} X_1^j \\ X_2^j \\ \vdots \\ X_n^j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^j = \begin{bmatrix} G_1^j \\ G_2^j \\ \vdots \\ G_m^j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^j = \begin{bmatrix} E_1^j \\ E_2^j \\ \vdots \\ E_k^j \end{bmatrix} \quad [2]$$

$\mathbf{X}^j$ は室温・壁体温度・熱負荷などを表す n 次の状態変数ベクトル、 $\mathbf{G}^j$ は外気温・日射量等の確定入力成分を表す m 次ベクトル、 $\mathbf{E}^j$ はランダム成分を表す k 次ベクトルである。又、 $[\mathbf{A}]^j, [\mathbf{B}]^j, [\mathbf{C}]^j$ は、 $(n \times n), (n \times m), (n \times k)$ の行列であり、壁体の熱特性及び外気温・日射量のARMAモデルより導出される。上付き添字 j は時刻を表す。

既報では⁹⁾、[1]式に平均化操作を施し、平均・共分散に関する式

$$\mathbf{m}_x^{j+1} = [\mathbf{A}]^j \mathbf{m}_x^j + [\mathbf{B}]^j \mathbf{G}^j \quad [3]$$

$$[\Lambda_x]^{j+1} = [\mathbf{A}]^j [\Lambda_x]^j [\mathbf{A}]^j + [\mathbf{C}]^j [\Lambda_x]^j [\mathbf{C}]^j \quad [4]$$

を作成し、これを解くことにより各状態変数の平均・分散を求めた。ここで、 $\mathbf{m}_x^j$ は $\mathbf{X}^j$ の平均(ベクトル)を、 $[\Lambda_x]^j, [\Lambda_x]^j$ はそれぞれ $\mathbf{X}^j, \mathbf{E}^j$ の共分散行列を表す。この計算においては気象データの雑音成分 $\mathbf{E}^j$ の平均と共分散のみが用いられており、 $\mathbf{E}^j$ が正規分布する必要は無い。当然、 $\mathbf{E}^j$ の確率密度が与えられなければ室温・熱負荷の確率密度を求めることはできない。 $\mathbf{E}^j$ が正規分布する場合には室温・熱負荷も正規分布となり、その平均と分散のみで確率密度は求められる。以下においては、白色雑音 $\mathbf{E}^j$ が正規分布でない場合に関して、室温・熱負荷の確率密度関数を求める方法について検討する。

2-2 確率密度関数と特性関数の変換

先ず、§2-3以下の解析の基礎として、確率変数に線形変換を施した場合の確率密度関数の変化、特性関数について述べる。

(1) 線形変換による確率密度関数の変化

n 次元確率変数ベクトル $\mathbf{X}$ が、

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{A}]\mathbf{X} + [\mathbf{B}]\mathbf{G} \quad [5]$$

なる線形変換により n 次元確率変数 $\mathbf{Z}$ に変換されるものとする。 $\mathbf{G}$ は m 次元確定ベクトル、 $[\mathbf{A}]$ は $(n \times n)$ 次の行列、 $[\mathbf{B}]$ は $(n \times m)$ 次の定数行列とする。 $\mathbf{X}$ の確率密度関数を $f_x(\mathbf{x})$ とすると、 $\mathbf{Z}$ の確率密度関数 $f_z(\mathbf{z})$ は、

$$f_z(\mathbf{z}) = |J| \cdot f_x[\mathbf{x} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{z})] \\ = |\partial \mathbf{x}^T / \partial \mathbf{z}| \cdot f_x[[\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{z} - [\mathbf{B}]\mathbf{G})] \quad [6]$$

となる¹⁰⁾。ここで、上付き添字 T は転置を、添字 -1 は逆関数および逆行列を、関数 $\mathbf{h}$ は[5]式の関係を表す。 J はヤコビアンであり、[5]式の場合には、

$$J = |[\mathbf{A}]^{-1}| \quad [7]$$

つまり、 $|\partial \mathbf{x}^T / \partial \mathbf{z}|$ は、線形変換においては定数(一般的には時変の)となる。

(2) 特性関数の変換

$\mathbf{X}$ の特性関数、すなわちフーリエ変換を $\phi_x(\mathbf{u})$ とする。

つまり、

$$\phi_x(\mathbf{u}) = \int \cdots \int f_x(\mathbf{x}) \cdot \text{EXP}(i\mathbf{x}^T \mathbf{u}) d\mathbf{x} \quad [8]$$

i は虚数単位である。このとき、 $\mathbf{Z}$ の特性関数 $\phi_z(\mathbf{u})$ は、[6]式を用いると、

$$\phi_z(\mathbf{u}) = \int \cdots \int f_z(\mathbf{z}) \cdot \text{EXP}(i\mathbf{z}^T \mathbf{u}) d\mathbf{z} \\ = \int \cdots \int |J| \cdot f_x[[\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{z} - [\mathbf{B}]\mathbf{G})] \cdot \text{EXP}(i\mathbf{z}^T \mathbf{u}) d\mathbf{z} \quad [9]$$

で与えられる。ここで、変数変換

$$\mathbf{y} = [\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{z} - [\mathbf{B}]\mathbf{G}) \quad [10]$$

を行うと、

$$\mathbf{z} = [\mathbf{A}]\mathbf{y} + [\mathbf{B}]\mathbf{G} \quad [11]$$

であるから、

$$\phi_z(\mathbf{u}) = \int \cdots \int |\partial \mathbf{x}^T / \partial \mathbf{z}| \cdot f_x(\mathbf{y}) \\ \cdot \text{EXP}\{i([\mathbf{A}]\mathbf{y} + [\mathbf{B}]\mathbf{G})^T \mathbf{u}\} \cdot |\partial \mathbf{z}^T / \partial \mathbf{y}| d\mathbf{y} \\ = \int \cdots \int f_x(\mathbf{y}) \cdot \text{EXP}\{i\mathbf{y}^T [\mathbf{A}]^T \mathbf{u}\} \cdot \text{EXP}\{i\mathbf{G}^T [\mathbf{B}]^T \mathbf{u}\} d\mathbf{y} \\ = \text{EXP}\{i\mathbf{G}^T [\mathbf{B}]^T \mathbf{u}\} \cdot \int \cdots \int f_x(\mathbf{y}) \cdot \text{EXP}\{i\mathbf{y}^T [\mathbf{A}]^T \mathbf{u}\} d\mathbf{y} \\ = \text{EXP}\{i\mathbf{G}^T [\mathbf{B}]^T \mathbf{u}\} \cdot \phi_x([\mathbf{A}]^T \mathbf{u}) \quad [12]$$

(3) 独立な確率変数ベクトルの和の確率密度関数

独立な n 次元確率変数 $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{W}$ との和 $\mathbf{Q} (= \mathbf{Z} + \mathbf{W})$ の確率密度関数 $f_o(\mathbf{q})$ は、

$$f_o(\mathbf{q}) = \int \cdots \int f_z(\mathbf{q} - \mathbf{s}) \cdot f_w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad [13]$$

で与えられる⁹⁾。これに対する特性関数は、

$$\phi_o(\mathbf{u}) = \int \cdots \int f_o(\mathbf{q}) \cdot \text{EXP}(i\mathbf{q}^T \mathbf{u}) d\mathbf{q} \\ = \int \cdots \int \left[\int \cdots \int f_z(\mathbf{q} - \mathbf{s}) \cdot f_w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \right] \\ \cdot \text{EXP}(i\mathbf{q}^T \mathbf{u}) d\mathbf{q} \\ = \int \cdots \int f_z(\mathbf{q} - \mathbf{s}) \cdot \text{EXP}[i(\mathbf{q} - \mathbf{s})^T \mathbf{u}] d\mathbf{q} \\ \cdot \int \cdots \int f_w(\mathbf{s}) \cdot \text{EXP}(i\mathbf{s}^T \mathbf{u}) d\mathbf{s} \\ = \int \cdots \int f_z(\mathbf{q}) \cdot \text{EXP}(i\mathbf{q}^T \mathbf{u}) d\mathbf{q} \\ \cdot \int \cdots \int f_w(\mathbf{s}) \cdot \text{EXP}(i\mathbf{s}^T \mathbf{u}) d\mathbf{s} \\ = \phi_z(\mathbf{u}) \phi_w(\mathbf{u}) \quad [14]$$

つまり、 $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{W}$ の特性関数の積で表される。

(4) 変換前後の確率変数の次元が異なる場合

[1]式の系では、一般には $\mathbf{X}^{j+1}$ と $\mathbf{E}^j$ の次元は異なる(これまで扱ってきた外気温・日射モデルではそうであった)。すなわち、

$$\mathbf{W} = [\mathbf{C}] \mathbf{E} \quad [15]$$

$$\begin{matrix} n & n \times k & k \end{matrix}$$

この場合、行列 $[\mathbf{C}]$ の逆行列が存在しないので、(1)(2)の

演算をそのまま適用することはできない。従って、これを、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}, \dots, c_{1k} & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1}, \dots, c_{kk} & \dots & \varepsilon & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}, \dots, c_{nk} & \dots & 0 & \dots & \varepsilon & \dots & \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \quad [16]$$

$$\mathbf{W}' = [\mathbf{C}'] \mathbf{E}' = [\mathbf{C}, \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_A \\ \mathbf{E}_B \end{bmatrix} = [\mathbf{C}, \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_A \\ \mathbf{E}_B \end{bmatrix} \quad [17]$$

と、微小な値 ε 及び $\mathbf{E}_A (= \mathbf{E})$ とは独立な白色雑音 $\mathbf{E}_{k,1}, \dots, \mathbf{E}_n$ を導入することにより全てを n 次元に拡張する。但し、最終的には $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることにより、 $\mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{W}$ とする。このとき、[17] 式の $[\mathbf{C}']$ の逆行列は存在するので、(1)(2)の操作を、従って結果としての[12]式を用いることができる。[5]式において、 $[\mathbf{A}] \rightarrow [\mathbf{C}']$ 、 $[\mathbf{B}] \rightarrow [\mathbf{0}]$ とした場合に対応するので、

$$\phi_{\mathbf{W}'}(\mathbf{u}) = \phi_{\mathbf{E}'}([\mathbf{C}']^T \mathbf{u}) \quad [18]$$

となる。この段階で $\varepsilon \rightarrow 0$ とおくと、 $\phi_{\mathbf{W}'} \rightarrow \phi_{\mathbf{W}}$ 、 $[\mathbf{C}'] \rightarrow [\mathbf{C}; \mathbf{0}]$ となるので、

$$\phi_{\mathbf{W}}(\mathbf{u}) = \phi_{\mathbf{E}'}([\mathbf{C}; \mathbf{0}]^T \mathbf{u}) \quad [19]$$

となる。ところで、 $\mathbf{E}'$ を $\mathbf{E}_A$ (k 次元) と $\mathbf{E}_B$ ($n-k$ 次元) に分割し、それぞれの確率密度関数を $f_{\mathbf{E}_A}(\mathbf{e}_A)$ 、 $f_{\mathbf{E}_B}(\mathbf{e}_B)$ とすると、これらは独立なので、

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{E}'}([\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) &= \int \dots \int f_{\mathbf{E}'}(\mathbf{e}') \cdot \text{EXP}(i \mathbf{e}'^T [\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) d \mathbf{e}' \\ &= \int \dots \int f_{\mathbf{E}_A}(\mathbf{e}_A) \cdot f_{\mathbf{E}_B}(\mathbf{e}_B) \\ &\quad \cdot \text{EXP}(i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A^T \\ \mathbf{e}_B^T \end{bmatrix} [\mathbf{C}; \mathbf{0}]^T \mathbf{u}) d \mathbf{e}_A d \mathbf{e}_B \\ &= \int \dots \int f_{\mathbf{E}_A}(\mathbf{e}_A) \cdot f_{\mathbf{E}_B}(\mathbf{e}_B) \\ &\quad \cdot \text{EXP}(i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A^T & \mathbf{e}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{C}]^T \mathbf{u} \\ [\mathbf{0}]^T \mathbf{u} \end{bmatrix}) d \mathbf{e}_A d \mathbf{e}_B \\ &= \int \dots \int f_{\mathbf{E}_A}(\mathbf{e}_A) \cdot \text{EXP}(i \mathbf{e}_A^T [\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) \\ &\quad \cdot f_{\mathbf{E}_B}(\mathbf{e}_B) \cdot \text{EXP}(i \mathbf{e}_B^T [\mathbf{0}]^T \mathbf{u}) d \mathbf{e}_A d \mathbf{e}_B \\ &= \phi_{\mathbf{E}_A}([\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) \cdot \phi_{\mathbf{E}_B}([\mathbf{0}]^T \mathbf{u}) \\ &= \phi_{\mathbf{E}_A}([\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) \cdot \phi_{\mathbf{E}_B}(\mathbf{0}) \\ &= \phi_{\mathbf{E}_A}([\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) = \phi_{\mathbf{E}}([\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) \end{aligned} \quad [20]$$

ここで、 $\mathbf{u}_A$ 、 $\mathbf{u}_B$ は、それぞれ k 、 $n-k$ 次元のベクトルである。また、任意の特性関数 $\phi(\mathbf{u})$ に対して $\phi(\mathbf{0})=1$ が成立することを利用した。[20] 式を[19]式に代入して、

$$\phi_{\mathbf{W}}(\mathbf{u}) = \phi_{\mathbf{E}}([\mathbf{C}]^T \mathbf{u}) \quad [21]$$

結果的には、この場合にも[12]式を形式的に利用すれば良いことが判る。

2-3 $\mathbf{X}^{j+1}$ の特性関数

§2-2 の関係式を利用して、[1]式において $\mathbf{X}^j$ の確率密度関数が与えられた場合に、 $\mathbf{X}^{j+1}$ の確率密度関数を求めることを考える。まず、

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{A}]^j \mathbf{X}^j + [\mathbf{B}]^j \mathbf{G}^j \quad [22]$$

の特性関数 $\phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{u})$ は、[12]式より、

$$\phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{u}) = \text{EXP}\{i \mathbf{G}^{jT} [\mathbf{B}]^j \mathbf{u}\} \cdot \phi_{\mathbf{X}^j}([\mathbf{A}]^j \mathbf{u}) \quad [23]$$

次に、

$$\mathbf{W} = [\mathbf{C}]^j \mathbf{E}^j \quad [24]$$

の特性関数は、[21]式より、

$$\phi_{\mathbf{W}}(\mathbf{u}) = \phi_{\mathbf{E}^j}([\mathbf{C}]^j \mathbf{u}) \quad [25]$$

$\mathbf{W}$ と $\mathbf{Z}$ は独立なので、 $\mathbf{X}^{j+1}$ の特性関数は、[14]式に[23]

[25]式を代入して、

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{X}^{j+1}}(\mathbf{u}) &= \text{EXP}\{i \mathbf{G}^{jT} [\mathbf{B}]^j \mathbf{u}\} \\ &\quad \cdot \phi_{\mathbf{X}^j}([\mathbf{A}]^j \mathbf{u}) \cdot \phi_{\mathbf{E}^j}([\mathbf{C}]^j \mathbf{u}) \end{aligned} \quad [26]$$

2-4 各変数の確率密度が正規分布の場合

§2-3 において $\mathbf{X}^{j+1}$ に対する特性関数が得られたので、雑音成分 $\mathbf{E}^j$ の確率密度関数に具体的な形を入れることにより、 $\mathbf{X}^{j+1}$ の確率密度関数を求める。

まず、各変数の確率密度が正規分布の場合について検討する。正規分布の特性関数は、

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \text{EXP}(i \mathbf{m}^T \mathbf{u} - 1/2 \cdot \mathbf{u}^T \Lambda \mathbf{u}) \quad [27]$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{m}$ は平均ベクトル、 Λ は共分散行列である。この式は、特性関数が変数 $\mathbf{u}$ の 2 次式を指数とする指数関数で表現されるならば、[27]式の形式に表現することによりその平均・分散がただちに得られることを示している。初期状態 $\mathbf{X}^0$ 、雑音 $\mathbf{E}^0$ は全て正規分布で、その平均・共分散が与えられるので、それらの特性関数を次と置く。

$$\phi_{\mathbf{X}^0}(\mathbf{u}) = \text{EXP}(i \mathbf{m}_{\mathbf{X}^0}^T \mathbf{u} - 1/2 \cdot \mathbf{u}^T [\Lambda_{\mathbf{X}^0}] \mathbf{u}) \quad [28]$$

$$\phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) = \text{EXP}(i \mathbf{m}_{\mathbf{E}}^T \mathbf{u} - 1/2 \cdot \mathbf{u}^T [\Lambda_{\mathbf{E}}] \mathbf{u}) \quad [29]$$

但し、雑音 $\mathbf{E}^0$ については時刻により変化しないとし、添字の 0 は省略した。

[26]式で $j=0$ とし（つまり、初期状態が与えられて、次の時刻の値を求める）、[28][29]式を用いると、

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{X}^1}(\mathbf{u}) &= \text{EXP}\{i \mathbf{G}^{0T} [\mathbf{B}]^0 \mathbf{u}\} \cdot \phi_{\mathbf{X}^0}([\mathbf{A}]^0 \mathbf{u}) \cdot \phi_{\mathbf{E}}([\mathbf{C}]^0 \mathbf{u}) \\ &= \text{EXP}\{i \mathbf{G}^{0T} [\mathbf{B}]^0 \mathbf{u}\} \\ &\quad \times \text{EXP}\{i \mathbf{m}_{\mathbf{X}^0}^T [\mathbf{A}]^0 \mathbf{u} - 1/2 \cdot \mathbf{u}^T [\mathbf{A}]^0 [\Lambda_{\mathbf{X}^0}] [\mathbf{A}]^0 \mathbf{u}\} \\ &\quad \times \text{EXP}\{i \mathbf{m}_{\mathbf{E}}^T [\mathbf{C}]^0 \mathbf{u} - 1/2 \cdot \mathbf{u}^T [\mathbf{C}]^0 [\Lambda_{\mathbf{E}}] [\mathbf{C}]^0 \mathbf{u}\} \\ &= \text{EXP}\{i (\mathbf{G}^{0T} [\mathbf{B}]^0 + \mathbf{m}_{\mathbf{X}^0}^T [\mathbf{A}]^0 + \mathbf{m}_{\mathbf{E}}^T [\mathbf{C}]^0) \mathbf{u} \\ &\quad - 1/2 \cdot \mathbf{u}^T ([\mathbf{A}]^0 [\Lambda_{\mathbf{X}^0}] [\mathbf{A}]^0 + [\mathbf{C}]^0 [\Lambda_{\mathbf{E}}] [\mathbf{C}]^0) \mathbf{u}\} \\ &= \text{EXP}\{i \mathbf{m}_{\mathbf{X}^1}^T \mathbf{u} - 1/2 \cdot \mathbf{u}^T [\Lambda_{\mathbf{X}^1}] \mathbf{u}\} \end{aligned} \quad [30]$$

従って、 $\mathbf{X}^1$ の平均・共分散（次の時刻 $j=1$ における平均・分散）は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\mathbf{X}^1} &= (\mathbf{G}^{0T} [\mathbf{B}]^0 + \mathbf{m}_{\mathbf{X}^0}^T [\mathbf{A}]^0 + \mathbf{m}_{\mathbf{E}}^T [\mathbf{C}]^0)^T \\ &= [\mathbf{A}]^0 \mathbf{m}_{\mathbf{X}^0} + [\mathbf{B}]^0 \mathbf{G}^0 + [\mathbf{C}]^0 \mathbf{m}_{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad [31]$$

$$\Lambda_{\mathbf{X}^1} = [\mathbf{A}]^0 [\Lambda_{\mathbf{X}^0}] [\mathbf{A}]^0 + [\mathbf{C}]^0 [\Lambda_{\mathbf{E}}] [\mathbf{C}]^0 \quad [32]$$

[31][32]式は、従来の平均・分散の式と一致する⁴⁾。同様の操作により $\phi_{\mathbf{X}^2}$ 、 $\phi_{\mathbf{X}^3}$ 、…が得られる。よって、正規分布のときは従来の結果と一致することが判る。

2-5 雑音 $\mathbf{E}^j$ の確率密度関数が 2 個の正規分布の和で与えられる場合

このとき、[29]式は(添字jは省略)

$$\begin{aligned}\phi_E(u) &= d_1 \cdot \phi_{E1}(u) + d_2 \cdot \phi_{E2}(u) \\ &= d_1 \cdot \text{EXP}\{i m_{e1}^T u - 1/2 \cdot u^T [\Lambda_{e1}] u\} \\ &\quad + d_2 \cdot \text{EXP}\{i m_{e2}^T u - 1/2 \cdot u^T [\Lambda_{e2}] u\} \quad [33]\end{aligned}$$

と表される。但し、 $d_2 = 1 - d_1$ である。これに対して、[30]式と同様の操作を施すと、

$$\begin{aligned}\phi_{x1}(u) &= \text{EXP}\{i G^T [B]^T u\} \cdot \phi_{x0}([A]^T u) \cdot d_1 \cdot \phi_{E1}(u) \\ &\quad + \text{EXP}\{i G^T [B]^T u\} \cdot \phi_{x0}([A]^T u) \cdot d_2 \cdot \phi_{E2}(u) \\ &= d_1 \cdot \text{EXP}\{i (G^T [B]^T + m_{x0}^T [A]^T + m_{e1}^T [C]^T) u \\ &\quad - 1/2 \cdot u^T ([A]^T [\Lambda_{x0}] [A]^T + [C]^T [\Lambda_{e1}] [C]^T) u\} \\ &\quad + d_2 \cdot \text{EXP}\{i (G^T [B]^T + m_{x0}^T [A]^T + m_{e2}^T [C]^T) u \\ &\quad - 1/2 \cdot u^T ([A]^T [\Lambda_{x0}] [A]^T + [C]^T [\Lambda_{e2}] [C]^T) u\} \\ &= d_1 \cdot \text{EXP}\{i m_{x1}^T u - 1/2 \cdot u^T [\Lambda_{x1}] u\} \\ &\quad + d_2 \cdot \text{EXP}\{i m_{x2}^T u - 1/2 \cdot u^T [\Lambda_{x2}] u\} \quad [34]\end{aligned}$$

となる。つまり、次の時刻 $j=1$ における特性関数 $\phi_{x1}(u)$ が[34]式で与えられる。これを逆 Fourier 変換すると、 X^1 の確率密度関数が得られる。[34]式より明らかなように、 ϕ_{x1} は正規分布の特性関数の和となっているので、 X^1 の確率密度関数は、平均・分散が、それぞれ m_{x1} 、 Λ_{x1} と m_{x2} 、 Λ_{x2} なる2個の正規分布の和で与えられる(従って、確率密度関数が陽に表現できたことになる)。又、 X^1 の平均・分散はこれらを用いて容易に得られ、以下となる。

$$\int \cdots \int x_i f(x) dx = d_1 \cdot m_{x1} + d_2 \cdot m_{x2} = m_i \quad [35]$$

$$\begin{aligned}\int \cdots \int (x_i - m_i)(x_j - m_j) f(x) dx \\ = d_1 \cdot \sigma_{i1}^2 + d_1 d_2 (m_{x1} - m_i)(m_{x2} - m_j) \\ + d_2 \cdot \sigma_{i2}^2 + d_2 d_1 (m_{x2} - m_i)(m_{x1} - m_j) \quad [36]\end{aligned}$$

全く同様に ϕ_{x2} が得られる。初期条件、即ち X^1 の確率密度関数が2個の正規分布の和で表されるため、 X^2 の確率密度関数は4個の正規分布の和となる。つまり、本解析法においては、時間が進むにつれて項数が2倍ずつ増加し、それら各項に対して従来の平均・分散を求める演算が必要となる。

以上の操作より、雑音 E^j の確率密度関数が正規分布の数項の和で与えられる場合への一般化は明らかである。

2-6 E^j の確率密度の作成

以上の解析には E^j の確率密度関数が必要となるが、これは ARMA モデル (Autoregressive Moving Average Model) の同定過程において同時に決定される。本論文で提案する方法の適用に当っては、 E^j の確率密度関数が重要な役割を果たすため、以下にその決定法について述べる。

説明の都合上、まず時系列 y^j が次の AR(ℓ) モデル、すなわち ℓ 時刻前までのそれ自身の値と現時点での雑音の和で表される場合を考える。

$$y^j + \sum_{i=1}^{\ell} a_i y^{j-i} = e^j \quad [37]$$

ここで、 y^j は外気温、日射量などの外界条件を、 e^j は

白色雑音を表す。 a_i は時刻 j での外界条件 y^j をそれ以前の値 y^{j-1} の線形結合で近似する際、モデルの値が観測値に最も良く一致するように決められるべき定数である。

ところで、通常は、観測データ y^j からのモデル推定値 $-\sum a_i y^{j-i}$ のずれ、すなわち[37]式右辺の雑音 e^j の(分散の)期待値を最小にすることにより最良の一致が得られたとみなされる。観測データしか利用できないので、この期待値は時間平均で代用される。すなわち、

$$J = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^j(a)^2 \quad [38]$$

を最小とする係数(ベクトル) $\mathbf{a}$ を決定する問題となる。ここで、 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_\ell]$ である。

係数 $\mathbf{a}$ は最小自乗法により容易に決定されるが⁹⁾、これを e^j 、すなわち E^j の確率密度関数の決定という立場より説明すると以下ようになる。まず適当な初期仮定値 $\mathbf{a}^{(1)}$ を仮定する。この値と観測値 y^{j-1} ($i=0,1,\dots$) を用いることにより、[37]式の左辺が各時刻 j に対して計算され、その結果 e^j も求められる。このような e^j の出現頻度分布が上述の雑音成分の確率密度関数に対応する。但し、この計算で用いた $\mathbf{a}^{(1)}$ は近似値であり、[38]式の J の値がより小となるように、次の近似値 $\mathbf{a}^{(2)}$ へと修正がなされる。この修正された $\mathbf{a}^{(2)}$ に対しても同様に e^j が得られる。本論文で用いる確率密度関数は、このような係数推定の反復過程が収束し、最終的な収束値 $\mathbf{a}^{(n)}$ を用いて得られるものである。

以上は AR(ℓ) モデルに関して E^j の確率密度関数の決定法を述べた。一般的な ARMA モデルについても考え方は同様であり、最尤推定法を用いた解法については文献⁹⁾に詳しく示されている。

更に、こうして得られた確率密度関数を数項の正規分布の和で表現する必要があるが、これについてはエルミート関数による直交関数展開¹⁰⁾を利用すれば良い。

3. 解析例

3-1 1 変数の場合

ここでは、先ず以上の考え方の検討、非正規分布の影響の特性・程度をみるため、単純な1質点系について、予備的な検討を行う。§2の基礎式を1質点の場合について示すと次式となる。

$$X^{j+1} = a X^j + E^j \quad [39]$$

[39]式の X^j は、[2]式の後で述べたように、一般的には室温・壁体温度・熱負荷さらには外界気象を表現する状態変数であるが、次に示す例では1質点近似された室温を表している。以下では、まず簡易な室モデルを例として、その関係を説明する。

瞬時定常の薄壁で囲まれた単室を考える。内部発熱は無く、壁を通しての熱貫流と換気により外気温が室温に

影響を及ぼす状況を想定する。このとき、室温 θ_i の変化は次式で表される。

$$C \frac{d\theta_i}{dt} = (\sum K_i S_i + c\gamma Vn)(\theta_o - \theta_i) \quad [40]$$

ここで、

θ_i : 室温、 θ_o : 外気温、 C : 室の熱容量
 K_i, S_i : 壁面 i の熱貫流率と面積、 $c\gamma$: 空気熱容量
 V : 室容積、 n : 換気回数

[40]式を、例えば時間刻み Δt で差分化すると、

$$C \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \overline{KS}(\theta_o^j - \theta_i^j) \quad [41]$$

ここで、 $\overline{KS} = \sum K_i S_i + c\gamma Vn$ 、 j は時間を表す添字である。[41]式を整理すると、

$$\theta_i^{j+1} = (1 - \frac{\Delta t \cdot \overline{KS}}{C})\theta_i^j + \frac{\Delta t \cdot \overline{KS}}{C}\theta_o^j \quad [42]$$

となる。ここで、

$$a = 1 - \frac{\Delta t \cdot \overline{KS}}{C} \quad [43]$$

とおき、更に外気温 θ_o^j が白色雑音で与えられるものとする、

$$E^j = \frac{\Delta t \cdot \overline{KS}}{C} \theta_o^j \quad [44]$$

と置ける。

θ_i^j を改めて X^j と表示すると、[42]式は[39]式の形の状態方程式となる。この場合、 a は室の熱容量と熱損失係数により定まり、室温の変化速度を決定する。その値が 1 に近い程室温の変化は遅い。 a は系の熱的な時定数の逆数を表すものと言える。以下の計算例題では、この a の値と入力雑音 E^j (外気温に対応) の非正規性が X^j (室温に対応) に及ぼす影響との関係に注目している。

雑音成分の確率密度関数は、次式で与えられるものとする。

$$f_{e^j}(e^j) = b \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{e1}} \cdot \text{EXP}\left[-\frac{(e^j - m_{e1})^2}{2\sigma_{e1}^2}\right] + (1-b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{e2}} \cdot \text{EXP}\left[-\frac{(e^j - m_{e2})^2}{2\sigma_{e2}^2}\right] \quad [45]$$

雑音 E^j は、図 1 の破線 ($j=1$) に示す確率密度をもつものとした。2つのピークをもつ、正規分布からかなりはずれた分布形といえる。

$a = 0.99$ の場合の X^j の確率密度の時間的な変化を図 1 に示す。入力とした雑音の確率密度がかなりの非正規性を有するにも拘らず、 X^j の確率密度は 3 ステップ目以降正規分布に非常に近くなる。これは大数の法則に対応する。すなわち、 a が 1 に非常に近いため、前の時刻の非正規分布雑音の影響がほぼそのまま残り、これと現時点での雑音の和をとることになっている。

図 1 X^j の確率密度関数の時間的な変化 ($a = 0.99$)

図 2 X^j の確率密度関数の時間的な変化 ($a = 0.99 \times 0.5$)

図 3 X^j の確率密度関数の時間的な変化 ($a = 0.99 \times 0.1$)

$a = 0.99 \times 0.5$ の場合の結果を図 2 に示す。3 ステップ以降の分布は、ほぼ同じである。雑音の 2つのピークは消え 1 山の分布となっているが、 $a = 0.99$ の場合に比して正規分布からのずれは大きい。

$a = 0.99 \times 0.1$ の場合の結果を図 3 に示す。 $a = 0.99$ の場合とは対照的に、前の時刻の雑音の影響がほとんど消え、雑音の非正規性はそのまま残る。

以上の結果より、系の固有値 (この場合は a) と非正規性との対応は明確である。つまり、減衰の遅い系では正規分布に近くなり、減衰の速い系では入力の非正規性が残る。

図4 計算対象

図5 外気温と日射の時刻別平均値

3-2 建物の場合

次に、単純な室の場合の結果を示す。

(1) 計算対象および入力条件

計算対象は図4に示す単室であり、床は断熱、5 m²の南に面した窓を持つものである。

外気温・日射の時刻別平均値は、東京の夏期のデータを整理したものであり⁵⁾、それらを図5に示す。日射・外気温のランダム成分 z^j 、 y^j は、それぞれ次のARMA及びARMAXモデル⁶⁾により表現される。

$$z^j + a_1 z^{j-1} + a_2 z^{j-2} + a_3 z^{j-3} = e^j + b_1 e^{j-1} + b_2 e^{j-2} + b_3 e^{j-3} \quad [46]$$

$$y^j + c_1 y^{j-1} + c_2 y^{j-2} + d_0 z^j + d_1 z^{j-1} + d_2 z^{j-2} = e^{ij} + g_1 e^{ij-1} + g_2 e^{ij-2} \quad [47]$$

ここで、

$$z^{ij} = \sigma_j(j) z^j \quad [48]$$

であり、 $\sigma_j(j)$ は日射の1日周期の時刻別標準偏差である。また、日射のランダム成分と呼んでいる[46]式の z^j は無次元であり、これに時刻別標準偏差 $\sigma_j(j)$ [kcal/m²h] を乗じることにより、本来の日射量の単位を有する日射ランダム成分となる。なお、係数 a_i 、 b_i 等の値および $\sigma_j(j)$ については文献4、5を参照されたい。これらの確率時系列モデルにおける入力外乱である e^j 、 e^{ij} の確率密度は、外気温については正規分布、日射については2個の正規分布の和よりなるもの(図6)とした。 e^j については、本解析法の説明に重点をおき、3-1で用いたものに近いものとした。

(2) 日射・外気温の確率密度関数

まず、建物熱系への入力である日射量・外気温のランダム成分 z^j 、 y^j の確率密度関数を、§2の計算法を用いて求めた。すなわち、式[46][47]を e^j 、 e^{ij} を入力雑音、 z^j 、 y^j を出力とする基礎方程式とみなし、出力の確率密度関数を求めた結果を図7、8に示す。

日射については、雑音成分に比して正規分布からのはずれは小さいが、まだ非正規性が残っている。

(3) 室温・熱負荷の確率密度関数

結果の室温を図9に、熱負荷を図10に示す。計算時間

図6 日射ARMAモデルの入力白色雑音の確率密度関数

図7 日射の確率密度関数

図8 外気温の確率密度関数

図9 室温の確率密度関数

図10 熱負荷の確率密度関数

は、9時から14時(空調時)である。空調時間帯なので、室温は1℃前後の狭い温度範囲の中に入っている。従って、平均と分散が与えられれば、正規分布とみなして十分であろう。一方、熱負荷については時間とともに増加しているが、これは外気温・日射の平均成分が時間と共に増加しているためである。熱負荷の確率密度関数は、正規分布よりも高負荷側になだらかな形となっており、図7の日射のそれに対応している。空調制御を行っているので系の応答が速く、射入日射が直接負荷に反映されるためである。しかし、正規分布からのずれは小さく、従来の平均・分散の結果から正規分布で推定しても誤差は小さい。更に§3-1の結果より判断すると、非空調時は系の減衰は遅く、正規分布と考えて問題はなかろう。

以上の結果より判断すると、既報の計算により平均と分散を求め、ここで得た結果を考慮して正規分布からのずれをある程度考慮することが可能となろう。

4. 結論

建物熱的系・外気温・日射が線形モデルで表され、かつ外気温・日射のランダム成分が非正規分布の場合の室温・熱負荷の確率密度関数を求める方法を示した。この方法は、入力雑音が正規分布数項の和で表現される場合に対するものであり、既報で示した平均と分散のみを求める方法を拡張したものとなっている。本解析法により、非正規性が及ぼす影響と建物の熱特性との関係・正規分布近似の妥当性の検討が可能となった。

1 質点で表される系を対象として、系の固有値と非正規性の程度との関係を明確にした。すなわち、応答の遅い系では入力雑音の非正規性は小さく、既報の平均・分散のみを求める方法は十分な精度を有する。

次に単純な室に関して同様の解析を行い、非正規性の影響の程度を明かにした。又、この結果より、既報の計

算により平均と分散のみを求め、本報の結果を考慮して正規分布からのずれを考慮することの可能性についても論じた。

ここでは、ランダム成分が正規分布の2項の和で表される場合を対象として本解析法を例示したが、この方法はランダム成分がより多くの正規分布項の和で表現される場合にも容易に拡張される一般的なものである。

参考文献

- 1) 寺井、新田、平岡：室温の統計的予測について、日本建築学会近畿支部研究報告集・計画系、第18号、PP.65-68、1978
- 2) 中沢、岡田：自然室温の確率的評価法(建築の熱的性状の確率的評価法その2、3)、日本建築学会建築環境工学論文集、PP.131-136、PP.137-140、1982
- 3) 鉾井、松本：外気温及び日射が作用する場合の空調負荷・室温の確率分布・離散時系列による解析-、日本建築学会大会学術講演梗概集、PP.747-748、1986
- 4) S.Hokoi, K.Niwa, M.Matsumoto: An Analysis of Stochastic Properties of the Cooling Load in an Intermittently Air-conditioned Building: Analysis of Discrete-Time Systems, ASHRAE Transactions, Vol.95, Part 2, 3322, 1990
- 5) 松本、鉾井、香川：日射、外気温のARMAモデルによる解析(2)-外気温と日射の相関及び形成室温によるモデルの検討-、日本建築学会近畿支部研究報告集計画系、第26号、PP.181-184、1986
- 6) 吉田、寺井：時系列モデルによる熱負荷計算用気象データの同定(全天、直達、拡散日射のモデル化について)、日本建築学会近畿支部研究報告集・計画系、第27号、PP.205-208、1987
- 7) 新田、中沢、岡田：気象データの確率性状及び確率モデル(建築の熱的性状の確率的評価法その1)、日本建築学会建築環境工学論文集、PP.125-130、1982
- 8) T.T. Soong: Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, 1973
- 9) 砂原善文編：確率システム理論 I 基礎編、朝倉書店、1981
- 10) 日野幹雄：スペクトル解析、朝倉書店、1977

(1994年10月24日原稿受理、1995年4月20日採用決定)