都市空間における移動経路のパターンと流動量に 関する積分幾何学的考察

ANALYSIS OF THE PATTERNS OF PATHS AND THE QUANTITY OF FLOWS IN URBAN SPACE USING INTEGRAL GEOMETRY

及川 清 昭*

Kiyoaki OIKAWA

The objective of this study is to propose new geometrical methods for analyzing the probability distribution of paths and the quantity of flows in urban space. Regarding a path as a segment which links origin to destination, the middle points of paths are supposed randomly distributed in a two dimensional area. According to the patterns of paths intersecting a convex or circular area and the probability distribution of the length of paths, the equations for measuring the the quantity of flows are obtained using the theory of integral geometry. Proposed methods are tested by examining the traffic volume in Tokyo.

Keywords: *Patterns of Paths, Quantity of Flows, Integral Geometry, Random Distribution, Intrazonal Trips, Traffic Volume*

経路パターン, 流動量, 積分幾何学, ランダム分布, 内内交通, 交通量

1. はじめに

本研究の目的は、都市空間における人や車の移動現象を計量的に分析するために、新たな幾何学的モデルを提案し、移動経路の長さ・パターンと領域内の流動量に関して数理的な理論化をはかることにある。

従来から移動・交通現象を対象とした研究は数多くなされているが、そのなかのテーマのひとつとして、ゾーン内内交通量やゾーン間の内外交通量の計量的把握が試みられている。これらの研究の多くは、居住地の面積や人口密度、移動目的、就業者数、産業構造など、考えられうる要因を抽出し、OD調査などの結果をもとに、それらのパラメータを用いて交通量の推計・予測を行うというものである（例えば松浦[1987]¹⁾など）。人や車の移動現象には複雑な要因が絡み合っているため、現象をモデル化する際にも、様々な条件を加味せざるを得ないことは確かである。しかし、多くのパラメータを抽出して定式化をはかると、どれが本質的な要因になっているのか、

また、それぞれの要因がどのように関連するのか、判断が難しい面がある。さらに、パラメータの値が地域によって異なると一層把握しにくくなり、地域間の比較も容易ではない。むしろ、パラメータを限定し、単純化をはかったほうが、現象を理解しやすいことも多い。

幾何学的な観点からすると、内内、内外といった経路パターン別の交通量は対象とする領域の大きさに依存する。直観的にも理解されるように、対象領域が大きいほど内内交通量の割合が増加し、極端に大きな領域を設定すると、ほとんどが内内交通のみとなる。一方、通過交通についてみると、領域が小さくなるほど割合が増加してゆく。本論では、この点に着目してみる。すなわち、移動現象に関与する要因を領域の大きさと移動経路の長さのみに限定し、経路パターンと流動量に関する数理的性質を捉えてみる。例えば、領域が大きくなると内内・内外・通過交通量（トリップ数）の比率はどのように変化するのか、また、それぞれの流動量（トリップの総延

* 東京大学生産技術研究所 助手・工博

Research Assoc., Institute of Industrial Science University of Tokyo,
Dr. Eng.

図1. 凸領域と経路パターン

図2. 経路長が一定

図3. 経路長が確率分布

図4. 凸領域の交わり

長)はどのような値を示すか、といった移動現象を理解する上での基本的な量の把握を試みる。その際、現実の事象から計量モデルを構成するのではなく、幾何学的なモデルを演繹的に構築し、現象がそのモデルからどれだけ乖離しているかを分析するというアプローチをとる。ここで、理論化のための前提条件を次のように設定する。

- <1> 移動経路⁽¹⁾は起点と終点を結ぶ線分と仮定する。
- <2> 移動経路(線分)の midpoint は平面上において連続的に分布するものとし、midpoint の位置・線分の方角ともに、一様ランダムに分布するものとする。
- <3> 経路が交わる領域の形態は凸領域とし、特に円の場合を主たる対象とする。
- <4> 凸領域あるいは円と経路との交わり方を、経路の端点の位置に基づいて、「内内」・「内外」・「通過」という3つのパターンに分類する(図1)。

いうまでもなく、人や車の移動現象は鉄道や道路などのネットワーク上で展開されており、また、経路の発生・集中密度も場所によって異なっている。これに対して、ここで提案する幾何学的モデルは、“平面上においてランダムに分布する線分と凸領域(円)との交わり”が基本となっており、ランダムな移動現象をきわめて単純化したモデルである。ネットワークが比較的均質かつ密に分布していること、また、経路の発生・集中密度が一様であることが指定されている。したがって、モデルの適用にも限界があるが、流動量の分布を大局的に把握し、現実の移動現象と比較できる基本的な計量モデルとするには、ネットワークを直接扱うよりも、連続平面で理論展開をはかるほうが適していることがある。実際、連続平面上での流動量を対象とした研究では^{2)~6)}、重要な知見がいくつか見いだされている。また、本論でも論及するように、連続平面を対象とした流動量をネットワーク上の流動量に対応づけることも可能となる。

以下、本論では具体的に次の事項について議論する。

- [1] 領域の大きさとパターン別トリップ数の比率との関連を明らかにするために、円と交わる一様ランダムな経路のパターン別生起確率を導出する(2章)。
- [2] 領域内での流動量を計量するために、凸領域と交わる経路の長さの期待値を導出する。また、ネットワーク上の断面流動量との数理的関連(3章)、および、経路パターン別の流動量について定式化する(4章)。

[3] 導出した理論を車両のOD調査(東京都23区)に適用し、方法の検討と事例分析を行う(5章)。

理論化に際しては、経路の長さ(以下、単に「経路長」と呼ぶ)を一定とした場合(図2)と、ある確率密度分布にしたがって分布する場合(図3; 記号の添字として w を付す)とに分け、「積分幾何学(幾何確率)」の理論を援用しながら定式化する。なお、積分幾何学に関する理論については、Santaló[1976]⁷⁾や、それを都市解析の分野に導入している腰塚[1976]⁸⁾等を参照している。

2. 経路パターン別の生起確率

図1で示した3つの経路パターンの生起確率は、経路長と領域の形態・大きさに依存する。ここでは、簡単のために領域の形態を円とし、ランダムな線分が円と交わるときに(図2)、内内・内外・通過のどのパターンになるか、という生起確率を定式化してみる。

2.1 経路長を一定とした場合

いま、図4のように、平面上に2つの凸領域 K_0 、 K_1 があり、それぞれの面積を F_0 、 F_1 、周長を L_0 、 L_1 とする。また、 K_0 が固定され、 K_1 が動くものとする。 K_1 の運動学的密度を dK_1 とすると、 K_1 が K_0 に交わる全測度は Blaschke による積分幾何の主公式⁷⁾から、

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \phi} dK_1 = 2\pi(F_0 + F_1) + L_0 L_1 \quad (1)$$

と与えられる。ここで、凸領域 K_0 を半径 R の円とみなすと、 $F_0 = \pi R^2$ 、 $L_0 = 2\pi R$ であり、一方、 K_1 を長さ l の線分とすると、 $F_1 = 0$ 、 $L_1 = 2l$ であるから、上式は、

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \phi} dK_1 = 2\pi R(\pi R + 2l) \quad (2)$$

となる。つまり、線分が円と交わる⁽²⁾全測度が上式で表されることになる。

次に、経路パターン別の測度を求めてみる。線分が円の内部に含まれる測度を M_0 、1点で交わる測度を M_1 、2点で交わる測度を M_2 とする。それぞれ、内内、内外、通過という3つの経路パターンに相当している。線分が円と交わる全測度が(2)式で表されるから、明らかに、

$$M_0 + M_1 + M_2 = 2\pi R(\pi R + 2l) \quad (3)$$

が成立している。積分幾何学においては、合同な図形の

① $0 < l \leq 2R$

図5.線分の位置の測度(1)

② $l > 2R$

図6.線分の位置の測度(2)

図7.経路長と生起確率

集合の測度は、図形上に定められた点 $P(x, y)$ と、その図形上で固定された方向と xy 座標軸とのなす角度 ϕ によって表される⁷⁾。つまり、線分の場合には、中点 $P(x, y)$ の位置と座標軸とのなす角度 ϕ で計量できる。例えば、面積 A の領域内部に中点をもち、かつ、あらゆる方向に分布している線分の集合の測度は、 $2\pi A$ となる。したがって、経路パターン別の測度 M_i ($i=0, 1, 2$)は、円と交わる線分の中点 $P(x, y)$ が占める面積 A_i を求め、それに 2π を乗ずればよい。すなわち、 M_i の定式化は以下ようになる(面積 A_i の領域を同じく A_i と表記する)。

$$M_i = \int_{P \in A_i} \int_{0 \leq \phi < 2\pi} dx dy d\phi = 2\pi A_i \quad (4)$$

それぞれの面積 A_i は、図5、図6に示すように図形から直接求めることができる(両図とも、線分を y 軸方向に固定した場合で、円の $1/4$ のみ(第1象限)を図示； $\sum_{i=0}^2 A_i = R(\pi R + 2l)$ となっていることに注意)。

よって、図2のように長さ l の線分が平面上にランダムに分布するとき、パターン別の生起確率 P_i は、(4)式を(3)式で除すことによって、次のように導かれる。

$$P_i = A_i / R(\pi R + 2l) \quad (i=0, 1, 2) \quad (5)$$

表1には経路パターン別に、中心点の占める面積 A_i および生起確率 P_i の導出結果をまとめて示している⁽³⁾。

図7は半径 R を固定したとき(図では $R=5$ 、 $R=10$ の2つの場合を例示)、経路長 l と生起確率 P_i の関係を、表1の諸式を用いて図化したものである。経路が長くなるほど(半径が小さいほど)内内経路の生起確率が著しく減少し、通過経路の確率が增大するという変化が計量的に明らかにされている。また、内外経路の生起確率は、極大値をもつことがわかる。

2.2 経路長が確率分布にしたがう場合

(1) 経路パターン別の定式化

図7から理解されるように、パターン別生起確率 P_i は経路の長さによって大きく左右される。そこで、次に、現実の移動現象を想定し、経路長がある確率分布にしたがって分布する場合について展開してみる。

いま、経路長が確率密度関数 $g(l)$ にしたがって、その中点が平面上に一様ランダムに分布しているものとする(図3参照； $g(l)$ は円と交わる確率ではないことに注意)。

表1. 線分の中心点が占める面積 A_i と経路パターン別の生起確率 P_i

① $0 < l \leq 2R$ のとき	② $l > 2R$ のとき
■面積 A_i [内内] $A_0 = 4 \int_0^q [(R^2 - x^2)^{1/2} - l/2] dx$ [内外] $A_1 = 4 \int_0^q l dx + 4 \int_q^R 2(R^2 - x^2)^{1/2} dx$ [通過] $A_2 = 4 \int_q^R [l/2 - (R^2 - x^2)^{1/2}] dx$	※ $q = (4R^2 - l^2)^{1/2} / 2$ [内内] $A_0 = 0$ [内外] $A_1 = 4 \int_0^R 2(R^2 - x^2)^{1/2} dx$ [通過] $A_2 = 4 \int_0^R [l/2 - (R^2 - x^2)^{1/2}] dx$
■確率 P_i [$P_i = A_i / R(\pi R + 2l)$] [内内] $P_0 = [2R^2 \cos^{-1}(l/2R) - l\alpha] / R(\pi R + 2l)$ [内外] $P_1 = [2\pi R^2 + 2l\alpha - 4R^2 \cos^{-1}(l/2R)] / R(\pi R + 2l)$ [通過] $P_2 = [2R^2 \cos^{-1}(l/2R) - l\alpha + 2lR - \pi R^2] / R(\pi R + 2l)$	※ $\alpha = (4R^2 - l^2)^{1/2} / 2$ [内内] $P_0 = 0$ [内外] $P_1 = 2\pi R / (\pi R + 2l)$ [通過] $P_2 = (2l - \pi R) / (\pi R + 2l)$

経路長の期待値を μ とすると、経路が半径 R の円と交わる全測度 M_W は、先の(3)式に $g(l)$ を乗じて積分し、

$$M_W = \int_0^{\infty} 2\pi R (\pi R + 2l) g(l) dl \quad (6)$$

と表される。ここで、期待値と確率密度関数の定義から、

$$\int_0^{\infty} l g(l) dl = \mu \quad \text{および} \quad \int_0^{\infty} g(l) dl = 1$$

であるから、(6)式は次のように簡単な式で表される。

$$M_W = 2\pi R (\pi R + 2\mu) \quad (7)$$

つまり、経路長がある確率密度関数にしたがって分布している場合、円と交わる全測度は、その関数の形態には依存せず、経路長の期待値のみで決定づけられる。ところが、経路パターン別の測度 M_{Wi} ($i=0,1,2$) については、

$$M_{Wi} = 2\pi \int_0^{\infty} A_i g(l) dl \quad (8)$$

となり、これは、表1に示した A_i の諸式からもわかるように、確率密度関数 $g(l)$ の形態に依存し、期待値のみで定式化することはできない。このときのそれぞれのパターン別生起確率 P_{Wi} ($=M_{Wi}/M_W$) は次式のように表される⁽⁴⁾。

$$P_{Wi} = \int_0^{\infty} A_i g(l) dl / R(\pi R + 2\mu) \quad (9)$$

これが、一般のランダムな移動現象を扱う際の基本式となるものであるが、残念ながら、この積分は陽に解けない場合が多い。例えば、 $g(l)$ が1次関数の場合は解けるが、多くは数値積分に依らざるを得ない。

(2) 経路長の確率分布とパターン別生起確率

経路長の確率分布を実際の交通センサス(車両)の結果⁹⁾から求めた例を図8に示す。図に示した8点が調査結果から求めた例を図8に示す。図に示した8点が調査結果から求めた例を図8に示す。

図8. 経路長の確率関数

図9. 半径と経路パターン別生起確率

らの累積頻度分布である(東京都平日の例。道路距離は直線距離の1.3倍として換算¹⁰⁾)。いま、この確率分布に適合する関数としてワイブル分布をあてはめてみる。ワイブル分布の確率密度関数は次式で与えられる。

$$g(l) = a l^{a-1} \exp[-(l/b)^a] / b^a \quad (10)$$

ここで、交通センサスの集計結果から、経路長の期待値を $\mu=8.5$ (km; 直線距離)とし、また、それぞれのパラメータは、図示した8点のデータをもとに、最小二乗法によって、 $a=0.78$ 、 $b=7.40$ と設定する。図8に示した曲線が、推定したワイブル分布の確率密度関数 $g(l)$ と累積分布関数 $F(l)$ である⁽⁵⁾。

(10)式のワイブル分布をあてはめた場合、経路パターン別生起確率 P_{Wi} を先の(9)式と表1の A_i の諸式から数値積分によって求めると、図9のような結果を得る。この図から、半径(領域の面積)が大きくなるほど内内経路の生起確率が高くなり、通過経路の確率が著しく減少してゆく傾向が把握できる。一方、内外経路の生起確率は単調な変化ではなく、極大値を持つことがわかる。この結果を用いた詳細な分析は5章で行うが、車両の移動経路(正確には経路の中心とその方向)がランダムに分布すると仮定した場合、半径にして約2.5km以内の都市領域では通過・内外・内内経路の順に比率が大きく、約5.5km以上になると通過経路が最も少なくなることがわかる。また、半径約13kmを境にして、最も比率が大きいのが内外経路から内内経路に変わるといった傾向も読みとることができる。

3. 経路の数・長さで流動量の期待値

前章では経路パターンという円と経路の交わり方の形態的側面について理論化を試みたが、次に、経路の数・長さといった量的な側面に焦点をあて、領域内に含まれる線分の長さ、すなわち流動量の期待値を求めてみる。また、連続平面上の流動量とネットワーク上の断面流動量との数理的連関について考察してみる。

3.1 凸領域内に含まれる線分の長さの期待値

(1) 経路長を一定とした場合

まず、凸領域と交わるランダムな線分の長さの期待値を求めてみる。先に示した図4において、凸領域 K_0 と K_1 の交わり部分($K_0 \cap K_1$)の境界の長さを L_{01} とすると、次式が成り立つことが知られている⁷⁾。

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \phi} L_{01} dK_1 = 2\pi (F_0 L_1 + F_1 L_0) \quad (11)$$

ここで、 K_1 を長さ l の線分とし、線分が領域 K_0 と交わる長さを s とする(図10)。線分の場合、周長 $L_1=2l$ 、面積 $F_1=0$ であり、また、境界の長さ $L_{01}=2s$ となるので、上式は次のように表される。

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \phi} s dK_1 = 2\pi F_0 l \quad (12)$$

一方、 K_1 が K_0 に交わる全測度はすでに(1)式で示したが、 K_1 が線分の場合、 $F_1=0$ 、 $L_1=2l$ を(1)式に代入すると、

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \phi} dK_1 = 2(\pi F_0 + l L_0) \quad (13)$$

となる。よって、凸領域に含まれる線分の長さの期待値を $E(s)$ とすると、(12)式を(13)式で除して、

$$E(s) = \pi F_0 l / (\pi F_0 + l L_0) \quad (14)$$

と定式化される。直観的にもわかることであるが、この式から、領域の面積 F_0 が大きくなるほど、期待値 $E(s)$ の値は l に漸近してゆくことが明らかになる。

(2) 経路長が確率分布にしたがう場合

次に、線分の長さが確率密度関数 $g(l)$ にしたがって分布する場合について展開してみる。このとき、内部に含まれる線分の集合の測度は、(12)式から、

$$\int_0^{\infty} 2\pi F_0 l g(l) dl = 2\pi \mu F_0 \quad (15)$$

と求められる。また、線分が K_0 と交わるときの全測度は、(13)式を用いて、次式のように導かれる。

$$\int_0^{\infty} 2(\pi F_0 + l L_0) g(l) dl = 2(\pi F_0 + \mu L_0) \quad (16)$$

よって、期待値を $E_W(s)$ とすると(15)式を(16)式で除して、

図10.凸領域と交わる線分の長さ

図11.ネットワークと経路の長さ

$$E_W(s) = \pi \mu F_0 / (\pi F_0 + \mu L_0) \quad (17)$$

と求められる⁶⁾。つまり、経路の midpoint が一様ランダムに分布するという仮定のもとでは、凸領域内部に含まれる経路の長さの期待値は、その確率分布 $g(l)$ の形態によらず、経路長の平均値 μ のみで決定づけられることがわかる。なお、経路長 l が一定の場合の(14)式に対し、単に l を平均値 μ に置き換えた式で表わされることに留意されたい。

3.2 ネットワーク上の断面流動量との関連

ここで、前項で導いた凸領域内部に含まれる経路の長さ(凸領域内部の流動量)の期待値と、ネットワーク上の断面流動量との数理的連関について定式化しておく。

いま、平面上に領域 D_0 を設定し、 D_0 内における移動経路の長さ(単位時間当たり)の総和を Σ とする(図11)。 Σ の値が一般にいう流動量である。同じ D_0 内に総延長 Λ の道路ネットワークがあるとき、道路上の断面流動量の期待値 η は、

$$\eta = \Sigma / \Lambda \quad (18)$$

であるから、 η は Λ と Σ から推定可能となる。

ここで、領域と交わる経路の総数を N とすると、(17)式は1本の線分あたりの期待値を表しているの、領域内部に含まれる経路の総延長 Σ は、その N 倍となるから、

$$\Sigma = N E_W(s) \quad (19)$$

となる。よって、断面流動量の期待値 η は、(17)~(19)式から次式のように表される。

$$\eta = \pi \mu F_0 N / \Lambda (\pi F_0 + \mu L_0) \quad (20)$$

このように、移動経路がランダムに分布している場合、道路ネットワーク上の断面流動量の期待値は、領域の面積・周長、経路の数、経路長の平均値、道路の総延長によって表わされる。

経路の総数 N については、実際は捉えにくい量であるが、例えば、OD調査によって内内経路数 N_0 がわかっている場合は、領域を円とみなし、(9)式で表される内内経路の生起確率 P_{W0} を用いて、

$$N = N_0 / P_{W0} \quad (21)$$

と求めることができる。したがって、(20)、(21)式を用いれば車両の断面交通量を推計できることになる⁷⁾。

4. 経路パターンと流動量の関連

前章では領域内部に含まれる経路の長さ、すなわち内部流動量の期待値を導出したが、この章では、経路パターン別にみた流動量の期待値について理論化を試みる。

4.1 経路長を一定とした場合

長さ l のランダムな線分が半径 R の円と交わるとき、円に含まれる長さの期待値を $E_C(s)$ とすると、(14)式に円の

図12. 経路パターン別流動量の期待値

面積($F_0 = \pi R^2$)と周長($L_0 = 2\pi R$)をあてはめて、

$$E_C(s) = \pi l R / (\pi R + 2l) \quad (22)$$

となる。実は、この値は内内・内外・通過の3つの経路パターンの条件付期待値が合成されたものとなっていることがわかる(図12)。すなわち、次式が成立している。

$$E_C(s) = P_0 \xi_0 + P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 \quad (23)$$

ここに、 ξ_i ($i=0,1,2$)は、経路パターンが既知のときの条件付期待値を表す。例えば、 ξ_1 は全事象を内外経路に限ったとき、円の内部に含まれる経路長の期待値である。また、 P_i は先に表1で示した経路パターン別の生起確率である。 $P_i \xi_i$ の値が、いうならば、全体の期待値 $E_C(s)$ に対する配分量を表しているといえる。

ここで、それぞれの $P_i \xi_i$ について定式化してみる。まず、内内経路については、線分が円に完全に含まれるから、明らかに、 $\xi_0 = l$ である。つまり、

$$P_0 \xi_0 = P_0 l$$

となる。また、通過経路の条件付期待値 ξ_2 は、先に示した図5、図6から解析的に求めることができる。両図において、中心が原点Oからxにある線分が円に含まれる長さは、 $2(R^2 - x^2)^{1/2}$ であるから、領域 A_2 を囲む曲線

$$l/2 - (R^2 - x^2)^{1/2}$$

を用いて、次式のように求めることができる。

図13. 円と交わる経路長の期待値 (経路長一定)

$$\xi_2 = \int_l^R 8 [l/2 - (R^2 - x^2)^{1/2}] (R^2 - x^2)^{1/2} dx / A_2 \quad (24)$$

- ① $t = [R^2 - (l/2)^2]^{1/2}$ ($0 < l \leq 2R$; 図5)
 ② $t = 0$ ($l > 2R$; 図6)

また、先に示した(5)式より、 $P_2 = A_2 / R(\pi R + 2l)$ であるから、 $P_2 \xi_2$ はこれらの積分を解けばよい。

一方、内外経路については、全体の期待値 $E_C(s)$ が(22)式から既知なので、 $E_C(s)$ から $P_0 \xi_0$ および $P_2 \xi_2$ を減ずればよい。以上の手続きによって得られた $P_i \xi_i$ の導出結果を表2に一覧して示す。

図13は経路長 l と流動量の経路パターン別配分量 $P_i \xi_i$ の値、およびその和、すなわち全体の期待値 $E_C(s)$ との関係を図化したものである(半径 $R=5$ と $R=10$ の2つの場合を例示)。経路長が円の直径よりも小さいときは、内内・内外経路が全体の期待値のほとんどを占めているが、経路長が増加にするにつれて、通過経路の割合が増大する傾向が見てとれる。

4.2 経路長が確率分布にしたがう場合

経路長が平均 μ で、確率密度分布 $g(l)$ にしたがって平面上に分布しているとき、円の内部に含まれる経路の長さの期待値 $E_W(s)$ とすると、(17)式の F_0 、 L_0 に円の面積と周長をそれぞれあてはめて、

$$E_W(s) = \pi \mu R / (\pi R + 2\mu) \quad (25)$$

と求められる。半径が大きくなるほど、 $E_W(s)$ は平均値 μ

表2. 流動量の経路パターン別配分量 $P_i \xi_i$

① $0 < l \leq 2R$ のとき	② $l > 2R$ のとき
[内内] $P_0 \xi_0 = l [2R^2 \cos^{-1}(l/2R) - l\alpha] / R(\pi R + 2l)$	$P_0 \xi_0 = 0$
[内外] $P_1 \xi_1 = [16R^3/3 + 2l^2\alpha - 8\alpha R^2 + 8\alpha^3/3] / R(\pi R + 2l)$	$P_1 \xi_1 = 16R^2/3(\pi R + 2l)$
[通過] $P_2 \xi_2 = [\pi l R^2 - 16R^3/3 - l^2\alpha + 8\alpha R^2 - 8\alpha^3/3 - 2lR^2 \cos^{-1}(l/2R)] / R(\pi R + 2l)$	$P_2 \xi_2 = R(\pi l - 16R/3) / (\pi R + 2l)$
	$\alpha = (4R^2 - l^2)^{1/2} / 2$

図14. 円と交わる経路長の期待値 (ワイブル分布)

に漸近する。一方、経路パターン別の配分量 $P_{Wi} \xi_{Wi}$ について定式化してみると、経路の中心点が占める領域の面積 A_i (表1参照)を用いて、次のように表すことができる。

$$P_{Wi} \xi_{Wi} = 2\pi \int_0^\infty g(l) A_i \xi_i dl / M_W \quad (26)$$

ここで、線分が半径 R の円と交わる全測度 M_W は、既に2章の(7)式で与えられており、また A_i と P_i は(5)式で表される関係にあるから、上式は、

$$P_{Wi} \xi_{Wi} = \int_0^\infty g(l) P_i \xi_i (\pi R + l) dl / (\pi R + 2\mu) \quad (27)$$

と表すことができ、これは表2の $P_i \xi_i$ を用いて積分を解けばよい。ただし、関数 $g(l)$ によっては、この積分も陽に解けないことが多く、数値積分を用いざるを得ない。

経路長の確率分布としてワイブル分布(図8; 車両の移動現象)をあてはめた場合、(27)式で表わされるパターン別の期待値を図示すると、図14のようになる。この図から、経路がランダムに分布している場合、半径にして約5 km以下の都市領域では通過交通による流動量が多いことがわかる。例えば、半径3 kmの場合(次章で示すが、東京都の行政区は半径にして2~5 km程度である)、円に含まれる経路長の期待値 $E_W(s)$ は3.07 kmで、そのうち、通過経路の配分量($P_{W2} \xi_{W2}$)は1.68 kmである。つまり、領域内の交通量は過半が通過交通で占められていることになる。また、半径が5 km~10 km程度では内外交通による流動量が支配的で、一方、内内交通による流動量は、領域が大きくなるにつれて増加するものの、半径10 km以下の都市領域の場合、全体の流動量に対して占める割合は非常に少ないことがわかる。

5. 理論の適用方法と事例分析

これまでの導出結果の適用事例として、東京都23区における車両のOD調査の結果¹¹⁾をとりあげ、各行政区ごとに、経路パターン別生起確率[(9)式]の検証を試みる。

5.1 対象領域の形態

本論で導出した理論式は対象領域を主に円と設定しているので、適用に際しては、まず、行政区の形状が円に対応づけられるかどうかという問題がある。一般に、行政区の形状は非凸であるから、何らかの図形処理を施さなければならない。ここでは、領域の凸包を求め、凸包と面積が等しい円(以下「等価円」と呼び、その半径を「等価半径」と呼ぶ)との対応を検討してみる⁽⁸⁾。

最初に、図15のように各行政区の凸包を求め、ランダムシミュレーションを行ってみた。すなわち、平面上にランダムに線分を発生させ、凸包と交わる線分がどのパターンになるか、その確率を計量してみた。線分の長さを0.5 kmずつ増分し、それぞれ10,000回の試行を行った。図16はその結果の一例である。図示した曲線が等価円の理論値 P_i (表1参照)であり、点でプロットした値がシミュレーションの平均値である。凸包は多角形であるから、全般的に、等価円に比して通過経路となる確率が幾分大きくなることは認められたが、各区ごとに平均誤差(線分の長さあたりの理論値との誤差の平均)を求めてみると、最大で0.0011、最小が0.0002となり、いずれの区においても理論値との誤差は極めて小さいことが実証された。すなわち、凸包における経路パターン別生起確率は、等価円の理論式によく近似できることが明らかになった⁽⁹⁾。

5.2 内内経路数と内外経路数の比率による分析

行政区の凸包が等価円に対応づけられる見通しが得られたので、次に、本論で導出した経路パターン別の生起確率の適用方法について検討する。

OD調査の結果を分析する際、例えば、内内経路数の比率が大きいほど、内部での結びつきが高いと判断できる。しかし、これを地域間相互に比較する場合には、単純にその比率のみでは評価できない。なぜなら、繰り返し主張しているように、面積の大きい地域ほど内内経路数の比率が大きくなるからである。つまり、内内経路数の比率を指標とするためには、領域の面積を考慮した基準値が必要となり、その基準値のひとつとして、本論で導出した経路パターン別の生起確率 P_{Wi} が考えられる。そこで、各行政区ごとに、等価円に対して経路がランダムに分布

図15. 領域の凸包

図16. 理論値との適合性

表3. 23区における計量結果

区 名	実面積 面積 (km ²) S	凸包		等価 半径 (km) R_E	交通調査			等価円			内内経路 集中度	
		面積 (km ²) S_h	周長 (km) L_h		経路数	内内 比率	生起確率		内内 比率			
							内内 N_0	内外 N_1		内内 P_{w0}		内外 P_{w1}
							ρ_E					ψ
1 千代田	11.64	13.37	13.83	2.06	148603	520667	0.222	0.071	0.410	0.519	0.148	1.495
2 中 央	10.15	11.92	13.69	1.95	140019	520598	0.212	0.066	0.398	0.536	0.142	1.489
3 港	20.22	24.61	18.65	2.80	272303	622119	0.304	0.107	0.469	0.424	0.185	1.642
4 新 宿	18.25	25.67	19.75	2.86	179937	454214	0.284	0.110	0.473	0.417	0.188	1.508
5 文 京	11.31	13.56	14.03	2.08	47788	223613	0.176	0.072	0.411	0.517	0.149	1.180
6 台 東	10.08	12.09	13.69	1.96	130028	317105	0.291	0.067	0.399	0.534	0.143	2.032
7 墨 田	13.75	17.09	16.77	2.33	69899	249256	0.219	0.084	0.435	0.481	0.162	1.348
8 江 東	39.02	57.20	29.80	4.27	147041	331433	0.307	0.176	0.530	0.294	0.250	1.232
9 品 川	22.71	30.14	20.69	3.10	87488	295567	0.228	0.121	0.487	0.392	0.199	1.146
10 目 黒	14.71	23.70	18.77	2.75	44706	213846	0.173	0.104	0.466	0.430	0.183	0.946
11 大 田	55.93	76.74	34.91	4.94	210313	371086	0.362	0.207	0.542	0.251	0.276	1.312
12 世田谷	58.08	74.69	33.21	4.88	189379	403334	0.320	0.204	0.541	0.255	0.273	1.169
13 渋 谷	15.08	18.76	17.13	2.44	94790	362122	0.207	0.090	0.444	0.467	0.168	1.235
14 中 野	15.58	24.62	19.68	2.80	46777	183905	0.203	0.107	0.469	0.424	0.185	1.094
15 杉 並	34.03	39.46	23.08	3.54	93491	250348	0.272	0.142	0.507	0.350	0.219	1.240
16 豊 島	13.00	17.45	16.38	2.36	69091	239542	0.224	0.085	0.437	0.478	0.164	1.368
17 北 川	20.57	30.73	22.68	3.13	69386	195464	0.262	0.123	0.488	0.389	0.201	1.305
18 荒 川	10.20	14.10	14.95	2.12	28831	140046	0.171	0.074	0.415	0.511	0.151	1.128
19 板 橋	32.16	41.94	24.95	3.65	115636	308293	0.273	0.148	0.511	0.341	0.224	1.218
20 練 馬	48.17	61.44	30.02	4.42	110584	300295	0.269	0.183	0.533	0.283	0.256	1.052
21 足 立	53.14	70.63	31.01	4.74	189229	344224	0.355	0.198	0.539	0.263	0.268	1.323
22 葛 飾	34.85	47.84	26.21	3.90	87660	244878	0.264	0.159	0.520	0.320	0.235	1.124
23 江戸川	49.73	66.23	31.94	4.59	171097	286368	0.374	0.191	0.537	0.272	0.262	1.426
23区	617.38	757.90	101.68	15.53	5601962	1662551	0.771	0.522	0.440	0.038	0.542	1.422

するときの理論値 P_{Wi} と、OD調査の値との比較を試みる。

まず、OD調査では通過経路数は把握し得ないので、これを除外して指標化してみる。いま、調査結果による内内経路数と内外経路数をそれぞれ、 N_0 、 N_1 とすると、

$$\rho_E = N_0 / (N_0 + N_1) \quad (28)$$

で表される ρ_E を「内内比率」と呼び⁽¹⁰⁾、また、等価円における内内比率を ρ_C とし、同様に、

$$\rho_C = P_{W0} / (P_{W0} + P_{W1}) \quad (29)$$

で表す。このとき両者の比を「内内経路集中度」と呼び、

$$\psi = \rho_E / \rho_C \quad (30)$$

で定義する。内内経路集中度 ψ はランダムな移動現象からの乖離の度合いを表す指標でもあり、 ψ の値が大きいほど地域内での結びつきが高いことを示している。

図17の曲線は半径の変化に伴う内内比率の理論値 ρ_C を図化したものであり、また、各点は行政区の内内比率 ρ_E の値(表3)をプロットしたものである。なお、経路長の確率分布には2章で示したワイブル分布[(10)式;図8]をあてはめて生起確率 P_{Wi} [(9)式]を求めている⁽¹¹⁾。この図をみると、等価円の理論値 ρ_C は半径にほぼ比例して増大することがわかる。各行政区においても、面積が大きいほど内内比率 ρ_E が増加する傾向を大まかには見てとれるが、地域的な差異もみられる。最も特徴的なのは、ほと

図17.内内比率

図18.内内経路集中度

んどの行政区において内内経路集中率 ψ が1を超えていることである(表3)。つまり、一部の行政区を除くと、ランダムな場合と比較して、経路が自区内に集中しており、内部での結びつきが高いことがわかる。

図18は行政区別に ψ の値によって図化したものである。千代田・中央・港の都心3区は内内経路集中率の卓越性が顕著であり、また、新宿・豊島の副都心地区や江戸川・墨田区も高くなっており、都心部ほど内内経路集中率が高いことがわかる。また、台東区が特化しており、自区内での移動が極端に多いことが注目される。

6. おわりに

本論では移動経路を起終点を結ぶ一本の線分とみなし、線分の中点と方向がランダムに分布するモデルを提案し、積分幾何学の知見を援用しながら理論化を試みた。理論化の内容と分析結果を以下に簡単にまとめる。

①円と交わる経路のパターン別(内内・内外・通過)生起確率を導出し[表1の諸式と(9)式]、それぞれの経路の割合が領域の大きさ(半径)によってどのように変化するかについて明らかにした。

②凸領域内および円に含まれる経路長(流動量)の期待値を定式化し[(14)・(17)・(22)・(27)式]、流動量と領域の大きさとの数理的連関を明示した。特に、経路長が確率分布にしたがう場合、流動量は確率分布の形態に依存せず、経路長の平均値のみで決定されることを示した。また、経路パターン別の流動量を導出し[表2の諸式と(27)式]、それぞれの流動量とその配分量が領域(円)の大きさによってどのように変化するかについての計量的特性を明らかにした。

③連続平面上の流動量とネットワーク上の断面流動量との関連を定式化し[(20)式]、OD調査による内内(あるいは内外)経路数をもとに、道路上の断面交通量の期待値が推計可能[(20)・(21)式]であることを示した。

④導出した理論値と、東京都23区における車両のOD調査結果を比較し(厳密にはワイブル分布の適合性を検証する必要があるが)、おしなべて、ランダムな移動現象と比較して内内経路の割合が大きいことを実証した。

本論で提案した移動現象の幾何学的モデルは、あくまでも理論モデルにすぎないが、経路パターン別生起確率や領域内部流動量の期待値は移動現象を把握するための基本的な量として有用であると考えている。また、交通現象(車両)に限っては内内経路集中率による地域内部の結合性の計量化や、道路上の断面交通量の推定など、現実の移動現象に適用可能であることが確認されたと考える。しかしながら、ごく単純な設定のもとに議論してみたものの、得られた理論式は多少複雑である。特に、積分による結果が煩雑になっており、実際の交通現象に適用するには近似化の方法を考案するなど、まだ

多くの改良を施さなければならない。また、本論では平面上に一様ランダムに分布する経路のみを扱ったが、密度分布を組み入れた理論の展開をはかる必要があると考える。いずれも今後の課題としたい。

注

(1)本論においては移動経路・線分・トリップという用語は同義とみなし、単に“経路”と略す。

(2)円の内部に線分が含まれる場合(通過)も“交わる”と表現する。

(3)Santalo[1976]⁷⁾には、円と交わる線分の測度について、 $l \leq 2R$ のときの M_0 のみが定式化されている。なお、多角形と交わる線分の測度については導出されている。

(4) P_{wi} は l が所与のもとでの条件付き確率ではない。すなわち、

$$P_{wi} = \int \{ A_i / R(\pi R + 2l) \} g(l) dl$$

とはならないことに注意されたい。 $g(l)$ は平面上に一様分布している線分の長さの確率密度関数であって、長さ l の線分が円と交わる確率を表しているわけではない。直観的にもわかるように、 l が長い線分ほど、円と交わる確率は $g(l)dl$ よりも高くなるのである。この点は、以降の論証においても重要なので、ここで、条件付き確率を用いた定式化について議論しておく。

いま、半径 R の円を含む十分大きな領域を D とし、その面積を F とする。このとき、 D の内部に中点をもつ線分がランダムに分布しているものとする。簡単のために、線分の総数を N とする。 D の内部に中点をもつ長さ l の線分の測度は $2\pi F$ であり、また、半径 R の円と交わる測度が本文(2)式で表されるから、円と交わる確率は

$$2\pi R(\pi R + 2l) / 2\pi F = R(\pi R + 2l) / F \quad (A1)$$

と表される。線分の長さの確率密度関数が $g(l)$ であるから、全体の N 本の中で、長さ l の線分は $Ng(l)dl$ 本あることになる。さらに、 $Ng(l)dl$ 本のうち、半径 R の円と交わる線分は、上式の確率を乗じて

$$Ng(l)dl R(\pi R + 2l) / F \quad (A2)$$

本あることになる。したがって、 N 本のうち円と交わる線分の数は、

$$\int Ng(l)dl R(\pi R + 2l) / F = NR(\pi R + 2\mu) / F \quad (A3)$$

となる(μ は長さの期待値)。ここで、全事象を円と交わる線分に限定したときの確率密度関数を $h(l)$ とすると、長さ l の線分が円と交わる確率 $h(l)dl$ は、(A2)式を(A3)式で除して、

$$h(l)dl = g(l)dl (\pi R + 2l) / (\pi R + 2\mu) \quad (A4)$$

と求められる。上式からわかるように、期待値 μ よりも長い線分は、円と交わる確率が $g(l)dl$ よりも大きくなるのである。

P_{wi} を、全事象を円と交わる線分という条件付き確率 $h(l)$ を用いて定式化すると、本文(5)式の P_i に(A4)式を乗じて、

$$\begin{aligned} P_{wi} &= \int \{ A_i / R(\pi R + 2l) \} h(l)dl \\ &= \int A_i g(l)dl / R(\pi R + 2\mu) \end{aligned} \quad (A5)$$

となり、本文で導出した(9)式と同じ結果を得る。以上の手続きは、本文における論証のように、経路パターン別測度 M_{wi} と全測度 M_w を、それぞれ $g(l)dl$ で重みづけしてから P_{wi} を導出する方法と同義である。

(5)通常こういった移動距離の確率密度分布においては、期待値よりも小さい方に密度が偏った分布形態をなすことが多い。

そこで、ガンマ分布、対数正規分布、ワイブル分布という3つの典型的な確率密度関数をあてはめてみて、その中で最も適合性のよいワイブル分布を用いることにした。

交通センサス⁹⁾によると平均経路長(道路距離)は11.1kmである。道路ネットワーク上の2点間の実距離は、直線距離の約1.3倍という研究報告¹⁰⁾があるので、平均経路長は直線距離に補正すると、 $\mu=8.5\text{km}(=11.1/1.3)$ となる。本文(9)、(17)、(26)式等で示されるように、 μ の値が重要な役割を果たしており、この値によって、パターン別の生起確率や領域内部に含まれる線分の長さが決定づけられる。そこで、パラメータ a 、 b については、まず、 $\mu=8.5$ を固定してから推定した。すなわち、ワイブル分布の期待値は、

$$\mu = b \Gamma(1/a) / a \quad (\text{A6})$$

であるから、 $b=8.5a/\Gamma(1/a)$ として、パラメータ a を推定するという方法を採用した。交通センサス⁹⁾には経路長別の頻度と平均値のみしか集計されていないので、精度の低い適合をせざるを得ないが、パラメータの推定に際しては、ワイブル分布の累積分布関数

$$F(l) = 1 - a l^{a-1} \exp[-(l/b)^a] / b^a \quad (\text{A7})$$

と、表2に示した交通センサスのデータ(8点)から、最小二乗法によって a の値を求め、 $a=0.78$ 、 $b=7.40$ という結果を得た。なお、通常のように、期待値 μ を固定せずに最小二乗法によって推定すると、 $a=0.81$ 、 $b=7.27$ となり(この場合 $\mu=8.1$)、上記の方法での結果と大きな差異はみられなかった。

- (6) 注(4)での説明と同様、 $E_w(s)$ を求めるとき、(14)式に $g(l)dl$ を乗じて、

$$E_w(s) = \int \{ \pi F_0 l / (\pi F_0 + l L_0) \} g(l) dl$$

とはならないことに注意されたい。全事象を凸領域と交わる線分に限定したときの確率密度関数を $h'(l)$ とすると、

$$h'(l)dl = g(l)dl (\pi F_0 + l L_0) / (\pi F_0 + \mu L_0) \quad (\text{A8})$$

となる(注(4)の(A4)式では円を対象としているが、凸領域の場合についても同様に議論できて、結果的に上式が得られる)。したがって、 $E_w(s)$ を条件付き確率 $h'(l)$ を用いて定式化すると、本文(14)式に(A8)式を乗じて積分し、

$$E_w(s) = \int \{ \pi F_0 l / (\pi F_0 + l L_0) \} h'(l) dl \\ = \pi \mu F_0 / (\pi F_0 + \mu L_0) \quad (\text{A9})$$

となる。つまり、本文(17)式と同一の結果を得る。

- (7) (20)式を用いた断面交通量の期待値の推計方法を以下に示す。まず、対象領域の形状を凸包とし(5章参照)、(20)式における F_0 と L_0 に凸包の面積 S_h と周長 L_h をあてはめる。この場合、凸包にすると面積が増加するので、道路の総延長については、補正のために、

$$\gamma = S_h / S \quad (S: \text{実面積})$$

を実際の総延長 Λ に乘じ、 $\gamma \Lambda$ として修正する必要がある。一方、凸包と交わる経路の総数 N については、内内経路数 N_0 も γ 倍になるとみなし、

$$N = \gamma N_0 / P_{w0}$$

となる。これらの値を(20)式にあてはめると、断面流動量の期待値 η の推計値 $\hat{\eta}$ は次式のように求められる。

$$\hat{\eta} = \pi \mu N_0 S_h / \Lambda P_{w0} (\pi S_h + \mu L_h) \quad (\text{A10})$$

5章で示すように、東京都23区において、車両の移動経路がランダムに分布しているとみなされる行政区は数少ない。そのなかで、練馬区については比較的ランダムに近い分布をしていると推定されるので、これを例にとり、(A10)式から

断面交通量の期待値を推計してみると、道路総延長 $\Lambda=1020\text{km}$ 、 $\mu=11.1\text{km}$ (この場合は道路距離)、 S_h 、 L_h 、 N_0 、 P_{w0} (5章表3参照)の各値をあてはめて、 $\hat{\eta}=2411$ (台/日)と求められる。

一般の交通量(車両)調査は主要な道路上において実施されているため、すべての道路を対象とした断面交通量の期待値は把えきれないが、その点、この方法にはOD調査の結果を用いて推計できるという利点がある。

- (8) 本来ならば、実際の行政区の形状(非凸)と円との結果を比較しなければならない。しかし、非凸の形状と対応させるためには、面積 S だけではなく、周長 L も考慮せざるを得ない。実際にいくつかの行政区でシミュレーションをしてみると、面積が等しい場合(半径 $R_1=\sqrt{S/\pi}$)と、周長が等しい場合(半径 $R_2=L/\pi$)との間に、最も適合する半径 R ($R_1 \leq R \leq R_2$)が見いだされた。しかし、各行政区ごとに面積と周長をパラメータとした半径を用いるとなると煩雑さが伴う上、そもそも、シミュレーションの値のほうを用いればよいことになってしまう。理論を適用する際の手続きは単純なほうが望ましいので、ここでは、凸包と面積が等しい円と対応させている。

- (9) 行政区によっては大きな公園があったり、千代田区のように皇居が中央部に位置している場合がある。厳密に言えば、こういった領域を除外したときの理論値と比較しなければならない。この理論値は、有孔図形(ドーナツ型)を対象として、図5、6と同様な方法によって解析的に求めることができるが、かなり煩雑になるので本論では省略している。なお、数値的な見通しを得るために、ドーナツ型の領域に対して、シミュレーションによって内内比率を求めてみると、千代田区(皇居に相当する半径0.7kmの同心円をくり抜いた形)で0.155、渋谷区(代々木公園に相当する半径0.5kmの同心円をくり抜いた形)で0.174となった。等価円における内内比率の理論値がそれぞれ0.148、0.168(表3)であるから、大きな差異は見られないことが確認された。

- (10) 精度を期すためには、 ρ_E は凸包の場合に換算しなければならないが、経路数 N_0 、 N_1 ともに、実面積に対して同一の割合で増加するものと仮定し、 ρ_E の値は不変であるとしている。

- (11) OD調査¹¹⁾では平均トリップ長が11.3kmであり、交通センサス⁹⁾の結果(11.1km)より大きい。この差は無視できるものとし、(10)式のワイブル分布と整合性をもたせるためにも後者の値を採用している。

参考文献

- 1) 松浦義満, 沼田道代(1987): 都心周辺部における通勤目的の内内交通量の推計方法に関する考察, 土木学会論文集, 383号/IV7, pp.45-53.
- 2) 腰塚武志(1992): 都市域の流動に関する理論的考察, 都市計画論文集No.27, 日本都市計画学会, pp.343-348.
- 3) 及川清昭(1993): 平面上の流動量に関する計量幾何学的モデル, 日本建築学会関東支部研究報告集, pp.385-388.
- 4) 及川清昭(1993): 都市空間における流動量の幾何確率的考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.751-752.
- 5) 栗田治(1993): 移動量の減衰関数に基づいた領域間距離の近似公式, 都市計画論文集No.28, 日本都市計画学会, pp.391-396.
- 6) 及川清昭(1994): 都市空間における経路と流動量に関する計量幾何学的分析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.505-506.
- 7) L.A.Santalo(1976): Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley Publishing Company.
- 8) 腰塚武志(1976): 積分幾何学について(1)~(4), オペレーションズリサーチ, vol.21, pp.524-529, 591-596, 654-659, 711-717.
- 9) 建設省道路局(1991): 平成2年道路交通センサス, 自動車起終点調査集計表.
- 10) 腰塚武志, 小林純一(1983): 道路距離と直線距離, 学術研究発表会論文集, 都市計画別冊, No.18, 日本都市計画学会, pp.43-48.
- 11) 東京都建設局道路建設部(1987): 東京都の自動車交通の実態.

(1996年2月10日原稿受理, 1996年6月20日採用決定)