安定性解析に基づく MAC 法の時間刻み幅の設定法

A DETERMINATION METHOD OF THE TIME STEP
FOR THE MAC METHOD BASED
ON A STABILITY ANALYSIS

荘 達 民*, 赤 坂 裕**

Zhuang DAMIN and Hiroshi AKASAKA

When the Marker and Cell (MAC) method is applied to analyze three-dimensional flow problem numerically, small time step (Δt) is usually taken to avoid divergence of the computations. However, taking small time step often results in consuming large amount of computational time. Therefore, a possible large time step should be selected provided that it can give a convergent solution.

In this paper, the equations determining the time step are derived based on the Von Neumann's stability condition for the three-dimensional finite difference equations obtained by central difference, upstream difference, and Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics (QUICK) schemes. The proposed equations are adapted to determine the time steps for several flow problems and it is verified that they give reasonable and convergent results with reduced number of iteration calculations.

Keywords : three-dimensional flow problem, MAC method, stability analysis, time step, numerical analysis

3次元流れ問題, MAC法, 安定性解析, 時間刻み, 数値解析

1 はじめに

MAC法¹⁾は、室内気流分布の数値解を得るための収束解法として広く使用されている^{2) 3) 4) 5)}。同法は陽解法であるため、時間刻み幅 Δt が計算の安定性や収束解を得るための計算時間に大きく影響する^{6) 7)}が、適切な Δt 値を設定する方法は確立していない。そのため、 Δt の値は、安全をみて経験的に収束解が得られるような小さめの値に設定される場合が多い。そこで本報告では、計算の安定性条件を満たしつつ、かつできるだけ大きい Δt を設定する方法について考察することにする。

偏微分方程式の差分近似に関する安定性解析には、離散化した摂動に基づく安定性解析法⁸⁾、Neumann⁹⁾、Hirt¹⁰⁾による安定性解析法等があるが、その理論の明快さと多次元問題への拡張の容易さから、Neumannによる安定性解析法が最も有力な方法⁸⁾であろう。本報告ではNeumannの1次元安定性解析法^{9) 11)}を3次元に拡張して対流方程式、拡散方程式、および対流拡散方程式に適用し、中心差分、風上差分、およびQUICKスキームの安定性条件から Δt の制約条件、 Δt の許容最大値、およびその近似式を導く。さらに、 $\kappa-\varepsilon$ モデルによる3次元室内気流分布の計算例によって、 Δt が計算精度と収束解に至るまでの繰り返し計算回数に与える影響について吟味することにする。

2 Neumannの安定性解析に基づく時間刻み幅の条件式の導出

2. 1 Neumannの安定性解析法

Von Neumannは、偏微分方程式の近似解を差分方程式で求める際の誤差をフーリエ級数で表し、変数分離によってその成長を表すことにより、差分方程式の安定性を吟味した。

Neumannの方法は次のように説明される^{8) 9) 11) 12) 13)}。1次元の偏微分方程式に対して空間長を N 分割したひとつの分割点 $i(=0, \dots, N-1)$ における n 時の近似解 ϕ_i^n の誤差 $\bar{E}_i^n$ を次式で表す。

$$\bar{E}_i^n = \sum_{p=0}^{N-1} R^n C_p e^{I(2\pi i p/N)} \quad (1)$$

I は虚数単位、 C_p は複素フーリエ係数、 $C_p e^{I(2\pi i p/N)}$ は初期、すなわち、この分割点における時間 n が0のときの第 p 項による誤差成分である。式(1)は、この項と時間の関数 R^n の積の総和が、 i 点における誤差の時間変化を表すことを示している。

式(1)の右辺の p 項のみを取り出して式(2)のように表示する。

$$E_i^n = V^n e^{I\theta_p} \quad (2)$$

V^n は振幅関数($= R^n C_p$)、 θ_p は位相角($2\pi p/N$)である¹¹⁾。同様に、 $n+1$ 時間の誤差の p 項は次式で表される。

$$E_i^{n+1} = V^{n+1} e^{I\theta_p} \quad (3)$$

式(2)、(3)の比により振幅率 G を次式で定義する。

* 鹿児島大学大学院工学研究科 大学院生・工修

** 鹿児島大学工学部建築学科 教授・工博

Graduate Student, Graduate School of Engineering, Kagoshima University, M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kagoshima University, Dr. Eng.

$$G = \frac{V^{n+1}}{V^n} \quad (4)$$

Neumann の安定性条件は次式で表される。

$$|G| \leq 1 \quad (5)$$

誤差のひとつの成分 E_i^n は、近似解 ϕ_i^n に対して成立する差分方程式と同様な差分方程式を満たしながら、空間的、時間的に伝播していく。したがって、その差分方程式から G を求めることができる。

次に Neumann の安定性解析を 3 次元の偏微分方程式に適用する方法について考察する。式(2)を 3 次元に拡張すると、 n 時における x, y, z 方向それぞれの分割点 (i, j, k) における近似解 ϕ_{ijk}^n の誤差のひとつの成分として、次式で表される項が存在する。

$$E_{ijk}^n = V^n e^{I(i\theta_p + j\theta_q + k\theta_r)} \quad (6)$$

同様に $n+1$ 時に対しては

$$E_{ijk}^{n+1} = V^{n+1} e^{I(i\theta_p + j\theta_q + k\theta_r)} \quad (7)$$

3 次元の偏微分方程式に対しても、式(6)、(7)の比として式(4)と同じ振幅率を定義し、式(5)の安定性条件を適用する。

以下において、3 次元の拡散方程式、対流方程式および対流拡散方程式に適用される代表的な差分方程式について G を求め、式(5)の条件により、時間刻み幅 Δt に関する関係式を導くことにする。

その前提として注意すべき点は、Neumann の安定性解析は本来線形方程式に適用されるものであるが、本稿ではその安定性解析を非線形方程式に拡張適用し Δt の計算式を導出している点、および、導出された Δt の計算式は、Neumann による安定性の必要条件であっても必ずしも必要十分条件ではない点である。また、本稿で G を求める対象としたのは、一般形微分方程式¹⁴⁾の生成項を除いた方程式である点である。この点に関しては、Roache⁹⁾が被微分関数を含まない生成項は安定性に無関係であることを示している。また Leonard¹⁵⁾が生成項を除いた差分方程式についてその安定性を論じているように、生成項に被微分関数を含む場合もその項が安定性に与える影響は無視してよいと考えられる。

2. 2 拡散方程式の安定性条件

3 次元の拡散方程式は次式で表示される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

式(8)の非定常項を前進差分、拡散項を中心差分で離散化すると、

$$\begin{aligned} \phi_{ijk}^{n+1} &= \phi_{ijk}^n + d_x (\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{i-1,j,k}^n) \\ &+ d_y (\phi_{i,j+1,k}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{i,j-1,k}^n) + d_z (\phi_{i,j,k+1}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{i,j,k-1}^n) \end{aligned} \quad (9)$$

d_x, d_y, d_z はそれぞれ x, y, z 方向の拡散項に基づく係数で、次式で表される。

$$d_x = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}, \quad d_y = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}, \quad d_z = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta z^2} \quad (10)$$

ϕ_{ijk}^n の誤差の成分 E_{ijk}^n 等を式(9)と同様な差分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} G &= 1 + d_x (e^{I\theta_p} - 2 + e^{-I\theta_p}) + d_y (e^{I\theta_q} - 2 + e^{-I\theta_q}) \\ &+ d_z (e^{I\theta_r} - 2 + e^{-I\theta_r}) \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)にオイラーの式 $e^{\pm I\theta} = \cos \theta \pm I \sin \theta$ を適用すると

$$G = 1 - 2(d_x + d_y + d_z) + 2d_x \cos \theta_p + 2d_y \cos \theta_q + 2d_z \cos \theta_r \quad (12)$$

式(5)の条件を満たすためには、次式が成り立たなければならない。

$$-1 \leq 1 - 2(d_x + d_y + d_z) + 2d_x \cos \theta_p + 2d_y \cos \theta_q + 2d_z \cos \theta_r \leq 1 \quad (13)$$

右側の不等式は任意の θ に対して常に成立する。左側の不等式において $\cos \theta_p = \cos \theta_q = \cos \theta_r = -1$ の場合を考えると、

$$d_x + d_y + d_z \leq 0.5 \quad (14)$$

式(14)より拡散方程式の Δt に関する次式が導かれる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\alpha \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \quad (15)$$

2. 3 対流方程式の安定性条件

3 次元の非粘性流れの対流方程式は次式で表示される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

式(16)の非定常項に前進差分、対流項に風上差分を適用すると

$$\begin{aligned} \phi_{ijk}^{n+1} &= \phi_{ijk}^n - c_x (\phi_{ijk}^n - \phi_{i-1,j,k}^n) \\ &- c_y (\phi_{ijk}^n - \phi_{i,j-1,k}^n) - c_z (\phi_{ijk}^n - \phi_{i,j,k-1}^n) \end{aligned} \quad (17)$$

c_x, c_y, c_z は次式で示される x, y, z 方向のクーラン数である。

$$c_x = \frac{|u| \Delta t}{\Delta x}, \quad c_y = \frac{|v| \Delta t}{\Delta y}, \quad c_z = \frac{|w| \Delta t}{\Delta z} \quad (18)$$

振幅率 G は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} G &= (1 - c_x - c_y - c_z + c_x \cos \theta_p + c_y \cos \theta_q + c_z \cos \theta_r) \\ &- I(c_x \sin \theta_p + c_y \sin \theta_q + c_z \sin \theta_r) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 X, Y を次式のように定義すると、式(20)が成立する。

$$\begin{aligned} X &= 1 - c_x - c_y - c_z + c_x \cos \theta_p + c_y \cos \theta_q + c_z \cos \theta_r \\ Y &= -c_x \sin \theta_p - c_y \sin \theta_q - c_z \sin \theta_r \\ \{X - (1 - c_x - c_y - c_z)\}^2 + Y^2 &\leq c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 \\ &+ 2c_x c_y \cos(\theta_p - \theta_q) + 2c_x c_z \cos(\theta_p - \theta_r) + 2c_y c_z \cos(\theta_q - \theta_r) \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)の右辺の余弦関数の最大値は 1 であるから、

$$\{X - (1 - c_x - c_y - c_z)\}^2 + Y^2 \leq (c_x + c_y + c_z)^2 \quad (21)$$

式(21)により、振幅率 G は点 $(1 - c_x - c_y - c_z, 0)$ を中心とし、半径 $c_x + c_y + c_z$ の円内にあることがわかる。 $|G|^2 \leq 1$ より¹³⁾

$$c_x + c_y + c_z \leq 1 \quad (22)$$

式(22)より、対流方程式の Δt に関する次式が導かれる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z}} \quad (23)$$

2. 4 対流拡散方程式の安定性条件

3 次元対流拡散方程式は次式で表示される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (24)$$

式(24)に対して、中心差分、風上差分、QUICK スキームを適用する場合についてそれぞれの安定性条件を調べる。

2. 4. 1 対流項と拡散項を中心差分で離散化する場合

簡単のために、まず、式(24)に対応する 1 次元の対流拡散方程式

(25)の安定性条件について調べる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (25)$$

非定常項を前進差分, 対流項と拡散項を中心差分で離散化する。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - 0.5c_x(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + d_x(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (26)$$

このとき振幅率は次式で表せる。

$$G = 1 - 2d_x(1 - \cos\theta_p) - Ic_x \sin\theta_p \\ = (1 - 2d_x) + 2d_x \cos\theta_p - Ic_x \sin\theta_p \quad (27)$$

G は実軸上の $(1 - 2d_x)$ に中心を置き、短径 c_x 、長径 $2d_x$ の楕円と見なせる。この楕円が単位円の内側に入るという条件から⁸⁾、

$$d_x \leq 0.5 \quad (28)$$

$$c_x \leq 1 \quad (29)$$

次に $0 \leq |G| \leq 1$ における $|G|^2$ の挙動について調べる。

$$|G|^2 = \{1 - 2d_x(1 - \cos\theta_p)\}^2 + c_x^2(1 - \cos^2\theta_p) \quad (30)$$

式(30)に $\cos\theta_p = 1$ を代入すると $|G|^2 = 1$ 。したがって $|G|^2 \leq 1$ を満たすためには、次の関係式が成り立たなければならない。

$$\left. \frac{d|G|^2}{d\cos\theta_p} \right|_{\cos\theta_p=1} \geq 0 \quad (31)$$

ここで

$$\frac{d|G|^2}{d\cos\theta_p} = 2(4d_x^2 - c_x^2)\cos\theta_p + 4d_x(1 - 2d_x) \quad (32)$$

であるから、式(31)と式(32)から1次元の安定性条件として次の必要条件が得られる。

$$c_x^2 \leq 2d_x \quad (33)$$

次に3次元の対流拡散方程式の安定性条件について調べる。式(24)の対流項と拡散項を中心差分で離散化すると、

$$\phi_{ijk}^{n+1} = \phi_{ijk}^n \\ - 0.5c_x(\phi_{i+1jk}^n - \phi_{i-1jk}^n) + d_x(\phi_{i+1jk}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{i-1jk}^n) \\ - 0.5c_y(\phi_{ij+1k}^n - \phi_{ij-1k}^n) + d_y(\phi_{ij+1k}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{ij-1k}^n) \\ - 0.5c_z(\phi_{ijk+1}^n - \phi_{ijk-1}^n) + d_z(\phi_{ijk+1}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{ijk-1}^n) \quad (34)$$

このとき振幅率は次式となる。

$$G = 1 - 2d_x(1 - \cos\theta_p) - Ic_x \sin\theta_p - 2d_y(1 - \cos\theta_q) \\ - Ic_y \sin\theta_q - 2d_z(1 - \cos\theta_r) - Ic_z \sin\theta_r \quad (35)$$

式(35)において x, y, z 成分は同様な形で表されているから、極値は次式の条件が成立する場合に現れる。

$$\theta_p = \theta_q = \theta_r = \theta \quad (36)$$

式(36)を式(35)に代入すると、 G は次式となる。

$$G = 1 - 2D(1 - \cos\theta) - IC \sin\theta \quad (37)$$

$$D = d_x + d_y + d_z \quad (38)$$

$$C = c_x + c_y + c_z \quad (39)$$

したがって、3次元の対流拡散方程式に対しても、 $|G|^2 \leq 1$ を満たすためには、式(28)、(29)、(33)と同様な関係が成立することになる。

$$D = d_x + d_y + d_z \leq 0.5 \quad (40)$$

$$C = c_x + c_y + c_z \leq 1 \quad (41)$$

$$C^2 \leq 2D \quad (42)$$

図1(a)に式(40)、(42)の範囲を示すが、この図から式(42)が満たされれば式(41)も自動的に満たされることがわかる。式(40)による Δt は式(15)と同様であり、式(42)からは次式が得られる。

$$\Delta t \leq \frac{2\alpha \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)}{\left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right)^2} \quad (43)$$

2. 4. 2 対流項を風上差分、拡散項を中心差分で離散化する場合

式(25)について、非定常項を前進差分、対流項を風上差分、拡散項を中心差分で離散化する。離散化式と振幅率は次式となる。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c_x(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) + d_x(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (44)$$

$$G = 1 - (2d_x + c_x)(1 - \cos\theta_p) - Ic_x \sin\theta_p \\ = 1 - (2d_x + c_x) + (2d_x + c_x)\cos\theta_p - Ic_x \sin\theta_p \quad (45)$$

G は、中心が実軸上の $(1 - 2d_x - c_x)$ 、短径が c_x 、長径が $(2d_x + c_x)$ の楕円である。この楕円が単位円の内側に入るという条件から、

$$c_x + 2d_x \leq 1 \quad (46)$$

が得られる。3次元の場合は、式(38)と式(39)の D, C を用いて

$$C + 2D \leq 1 \quad (47)$$

が得られる。図1(b)に式(47)で囲まれる安定性範囲を示す。式(47)から Δt に関する次式が導かれる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\alpha \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z}} \quad (48)$$

2. 4. 3 対流項を QUICK スキーム、拡散項を中心差分で離散化する場合

式(25)の対流項を QUICK スキーム、拡散項を中心差分で離散化する。離散化式と振幅率は次のようになる。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c_x \left(\frac{1}{8}\phi_{i-2}^n - \frac{7}{8}\phi_{i-1}^n + \frac{3}{8}\phi_i^n + \frac{3}{8}\phi_{i+1}^n \right) \\ + d_x(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (49)$$

$$G = 1 - (2d_x + 0.5c_x)(1 - \cos\theta_p) + 0.25c_x \sin^2\theta_p \\ - Ic_x(1.25\sin\theta_p - 0.125\sin 2\theta_p) \quad (50)$$

式(50)に $\theta_p = 180^\circ$ を代入すると、 $|G|^2 \leq 1$ を満たすための必要条件として次式が得られる¹⁵⁾。

$$0.5c_x + 2d_x \leq 1 \quad (51)$$

次に $0 \leq |G| \leq 1$ における $|G|^2$ の挙動について調べてみる。

$$|G|^2 = (0.375c_x^2 - c_x d_x) \cos^3\theta_p \\ - (1.125c_x^2 - 4d_x^2 - 3c_x d_x + 0.5c_x) \cos^2\theta_p \\ - (0.875c_x^2 + 8d_x^2 + 3c_x d_x - c_x - 4d_x) \cos\theta_p \\ + (1.625c_x^2 + 4d_x^2 + c_x d_x - 0.5c_x - 4d_x + 1) \quad (52)$$

式(50)に $\cos\theta_p = 1$ を代入すると $|G|^2 = 1$ となる。これは式(25)を中心差分で離散化して得られたのと同様な関係であるから、 $|G|^2 \leq 1$ を満たすためには式(31)が成立しなければならない。

$$\begin{aligned} \frac{\partial |G|^2}{\partial \cos \theta_p} &= 3(0.375c_x^2 - c_x d_x) \cos^2 \theta_p \\ &\quad - 2(1.125c_x^2 - 4d_x^2 - 3c_x d_x + 0.5c_x) \cos \theta_p \\ &\quad - (0.875c_x^2 + 8d_x^2 + 3c_x d_x - c_x - 4d_x) \end{aligned} \quad (53)$$

であるから、これを式(31)に代入すると式(54)が得られる。

$$c_x^2 \leq 2d_x \quad (54)$$

3次元の場合は、式(38)と式(39)の D, C を用いて

$$0.5C + 2D \leq 1 \quad (55)$$

$$C^2 \leq 2D \quad (56)$$

となる。図1(c)に式(55)、式(56)で囲まれる範囲を示す。式(56)から導かれる Δt の条件式は式(43)と同様である。式(55)からは次式が導かれる。

$$\Delta t \leq \frac{2}{4\alpha \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z}} \quad (57)$$

3 時間刻み幅 $\Delta t_{\min}$ の定義とその予測最小値 $\Delta \bar{t}_{\min}$ の導出

以上により導かれた時間刻み幅 Δt の各式(15)、(23)、(43)、(48)、(57)の右辺は各メッシュ毎の Δt の最大値を与えるが、ある時間ステップに適用される Δt は、これらの中の最小値でなければならない。また、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が計算領域全体で一定でない場合には、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が一定の小領域毎にここで設定した式を適用して Δt を求めることができると考えられる。この考え方を一般化すると、ここでの Δt の設定式を非等間隔メッシュに適用できることになる。ただしこの場合も、各小領域毎に得られる Δt の最小値を適用しなければならない。ここでは、この最小値を $\Delta t_{\min}$ と表示することにする。また対流項を中心差分やQUICKスキームで離散化する場合は、複数の式が $\Delta t_{\min}$ を制約するが、用いる $\Delta t_{\min}$ はそれらの最小値でなければならない。

気流分布の問題を数値的に解く場合には、繰り返し計算を行う毎に α, u, v, w の値も更新され、 $\Delta t_{\min}$ もその都度変わる。したがって Δt として $\Delta t_{\min}$ を採用する場合は、気流分布の計算プログラムに逐次 $\Delta t_{\min}$ を更新するルーチンを組み込む必要が生じる。これに対して、計算初期から収束解に到達するまでに予想される $\Delta t_{\min}$ の最小値を用いれば、 $\Delta t_{\min}$ を毎回与え直す必要はなくなり計算が容易になる。 $\Delta \bar{t}_{\min}$ を $\Delta t_{\min}$ の予測最小値とし、次のように推定する。

まず、風速については、(23)、(43)、(48)、(57)式の $|u|, |v|, |w|$ を含

図1 対流拡散方程式の安定性範囲

む項について、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ をその最小値 Δl に置き換え次式のように表す。

$$\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \leq \frac{|u| + |v| + |w|}{\Delta l} \quad (58)$$

無次元速度 $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ の最大値を1とすると、 $|u| + |v| + |w|$ の最大値を求める。 $|u|, |v|, |w|$ は単位球面上における x, y, z 軸の正の座標値で、極座標 (γ, β, φ) と直角座標の関係は次式で表される。

$$\gamma = 1, x = \sin \beta \cos \varphi, y = \sin \beta \sin \varphi, z = \cos \beta \quad (59)$$

ただし、 $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ 、 $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ である。したがって、

$$|u| + |v| + |w| = \sin \beta (\cos \varphi + \sin \varphi) + \cos \beta \quad (60)$$

$\varphi = 45^\circ$ の時、式(60)の右辺の括弧内の項は最大値 $\sqrt{2}$ をとるので、この項を $\sqrt{2}$ で置き換えると、結局、 $|u| + |v| + |w|$ は $\beta \approx 60.8^\circ$ の時に最大値 $\sqrt{3}$ をとることがわかる。式(58)の $|u| + |v| + |w|$ を $\sqrt{3}$ で置き換えた項を式(23)、(43)、(48)、(57)の対応する項に代入する。

次に、式(15)、(48)、(57)については α をその予測最大値 $\alpha_{\max}$ で置き換え、式(43)については α をその予測最小値 $\alpha_{\min}$ で置き換える。 $\alpha_{\max}$ 、 $\alpha_{\min}$ の計算式を表2にまとめる。 α は自然対流の場合は一定であるが強制対流の場合は変数である。強制対流の場合は $\alpha_{\max}$ 、 $\alpha_{\min}$ とも吹出し口の値をとることとする。このように α をとった場合の計算の安定性は計算例で検討する。

以上により、式(15)、(23)、(43)、(48)、(57)に対応する $\Delta \bar{t}_{\min}$ の式を整理するとそれぞれ式(61)～式(65)となる。

$$\Delta \bar{t}_{\min} = \frac{1}{2\alpha_{\max} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \quad (61)$$

$$\Delta \bar{t}_{\min} = \frac{\Delta l}{\sqrt{3}} \quad (62)$$

$$\Delta \bar{t}_{\min} = \frac{2}{3} \alpha_{\min} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \Delta l^2 \quad (63)$$

$$\Delta \bar{t}_{\min} = \frac{1}{2\alpha_{\max} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{\Delta l}} \quad (64)$$

$$\Delta \bar{t}_{\min} = \frac{2}{4\alpha_{\max} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{\Delta l}} \quad (65)$$

4 計算例

以上の Δt 等を適用して気流分布を計算するための室モデル¹⁶⁾とそのメッシュ分割を図2に、境界条件と初期値を表1に示す。対流項の差分スキームと Δt の設定の組み合わせにより表3、表4のようなCASEを設定した。なお、拡散項の差分スキームはいずれも中心差分である。各スキームに対する $\Delta \bar{t}_{\min}$ の値を算出する。 $\Delta \bar{t}_{\min}$ 算出のためのメッシュ辺長は最小値をとる。したがって、CASE1～CASE12では、 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.25$ であり、CASE13～CASE16では $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$ である。表1の空気吹出し口の境界値¹⁷⁾より、

$$v_i = \kappa^{1/2} l = 0.02 \quad (66)$$

したがって、等温では

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{\text{Re}} + v_i \approx 0.02 \quad (67)$$

非等温では

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{v_t}{\sigma_\theta} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{v_t}{0.9} \approx 0.0223 \quad (68)$$

運動方程式に中心差分または QUICK を適用する場合

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{\text{Re}} + v_t \approx 0.02 \quad (69)$$

スカラー方程式に中心差分または QUICK を適用する場合

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{\text{Re}} + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} = \frac{1}{\text{Re}} + \frac{v_t}{1.3} \approx 0.015 \quad (70)$$

CASE1, CASE3, CASE5, CASE7, CASE9, CASE11, CASE13 と CASE15 の $\Delta \bar{t}_{\min}$ の値を表3と表4に示す。CASE2 と CASE4 では、 $\Delta \bar{t}_{\min}$ との比較のため、 Δt の値をそれぞれ式(48)と式(43)により毎回計算し、それらの Δt の最小値を次回計算の Δt とした。 $\Delta \bar{t}_{\min}$ による計算の高速化を検証するため、表4の各差分スキームに対応して、CASE6, CASE8, CASE10, CASE12 と CASE14 を設定して Δt を 0.01 として計算を行い、 $\Delta \bar{t}_{\min}$ による計算精度、収束にかかる回数と CPU 時間を比較した。

図3に、CASE1 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.11$) について、図2の対称断面上の速度ベクトル分布を示す。図4に比較のため CASE2 による Δt の最小値の変化を示す。表3のように CASE1 と CASE2 の収束時における諸量の空間平均値は一致している。

図5に、CASE3 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.04$) について、図2の対称断面上の速度ベクトル分布を示す。図6に比較のため CASE4 による Δt の最小値の変化を示す。3で述べたように、CASE3 では吹出し口で求めた Δt を $\Delta \bar{t}_{\min}$ の最小値として代用しているために、図6のように、 Δt の真の最小値はこの $\Delta \bar{t}_{\min}$ より小さくなる。しかし図5のように、このような $\Delta \bar{t}_{\min}$ を適用しても計算は安定することがわかる。以下に示すように、CASE3 と同様、式(63)によって $\Delta \bar{t}_{\min}$ が決定される CASE7, 9, 11, 13, 15 のいずれも安定な計算結果が得られた。

図7に、CASE5 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.11$) の、図2の対称断面上の速度ベクトル分布を示す。CASE5 は、CASE1 に対して非等間隔メッシュとして同じスキームを用いた場合であり、メッシュの総数、収束までの CPU 時間とも CASE1 より減少している。図8, 図9, 図10, 図11 は CASE5 の空間平均値 $U_i, U_i/2, \kappa, \epsilon$ と v_t の変化を示す。空間平均値 κ, ϵ, v_t は早い段階で一定値に接近しているが、 $U_i, U_i/2$ は

- 注1) 上図は非等間隔で最小メッシュ $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.25$ の場合である。
 注2) 上図は等温計算の場合に用いられるが、非等温計算の場合も分割数は同じで最小メッシュは $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$ とする。
 注3) 等間隔メッシュの場合は、メッシュ数 $60 \times 40 \times 30$ 、 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.25$ である。
 注4) 計算範囲は計算モデルの対称性により、室モデルの半分である。
 図2 室モデルと非等間隔メッシュ (22 × 26 × 22) の分割

一定値になるのに回数を要する。CASE5 と CASE6 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.01$) の収束時における諸量の空間平均値を表4に示す。

図12, 図13に、それぞれ、CASE7 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.04$) と CASE9 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.04$) の図2の対称断面上の速度ベクトル分布を示す。CASE9 において運動方程式に中心差分を適用すると、吸込み口周辺で逆流も含め数値的な振動が発生する。そのため、吸込み口周辺の領域 (吸込み口周辺 x と y 方向に 5 メッシュ、 z 方向に 15 メッシュの範囲) に風上差分を適用した¹⁹⁾。

図14, 図15に、それぞれ、CASE11 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.03$) と CASE13 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.03$) の図2の対称断面上の速度ベクトル分布を示す。等温計算の各速度ベクトル図は差分スキームによりわずかな相違が見られるところがあるが、全体的な流れのパターンは同様である。

CASE15 ($\Delta \bar{t}_{\min} = 0.03$) では、室内平均温度を 23℃、送風温度差を 4℃とし、吸込みによる排出熱量が図2の加熱面の発熱量に等しいという条件で気流分布を計算した。加熱面以外は断熱壁である。図16, 図17に、それぞれ速度ベクトル分布と温度分布を示す。

5 まとめ

- 1) Neumann の安定性解析を 3 次元対流拡散方程式に適用し、中心差分、風上差分および QUICK スキームの時間刻み幅 $\Delta t_{\min}$ の式を導いた。 $\Delta t_{\min}$ を用いて時間刻み幅を逐次更新すれば、安定な収束解を得ることができる。
- 2) $\Delta t_{\min}$ の式からその予測最小値である $\Delta \bar{t}_{\min}$ を導いた。 $\Delta \bar{t}_{\min}$ は全計算過程で定数であって逐次更新の必要が無いため、 $\Delta \bar{t}_{\min}$ を用いる方法は数値計算上の実用性に優れている。
- 3) 式(43)に対する近似式(63)に現れる $\alpha_{\min}$ としては吹出し口の値を代用したため、 $\Delta \bar{t}_{\min}$ の推定値は最小値にはならないが、多くの例によってこの推定値を用いても計算は安定することが確認された。これは式(43)による Δt の条件を緩和しても計算は安定することを意味する。したがって中心差分と QUICK 法に適用できる時間刻み幅 Δt の算定法については、今後 Neumann の安定性解析に限定しない観点からの検討が必要であると考えられる。
- 4) 2. 1 および 5 の 3) に述べた理由により、ここでまとめた時間刻み幅の計算式を使用すれば必ず収束解が得られるこ

表1 代表的な基準量、境界条件と初期値 (無次元数値)

基準量	$L_0 = 0.1m$ $U_0 = 3.75m/s$ $\Delta\theta = 4^\circ C$
空気入口	$u_N = 1.0$ $\kappa = 0.04$ $l = 0.1$ $\theta = -1.0$ $\text{Re} = 25000$
空気出口	$u_N = -1.0$ $\theta = 0$ κ, ϵ : free slip
固定壁	$u_N = 0.0$ u_T : 1/7 power law
対称面	$u_N = 0.0$ $u_T, \kappa, \epsilon, \theta$: free slip
初期値	$\kappa = 0.1$ $v_t = 0.02$

表2 拡散係数 α の値の選択

		強制対流		自然対流
		運動方程式	スカラー方程式	
$\alpha_{\max}$	等温	$1/\text{Re} + \nu_t$		$1/(\text{Re} \cdot \text{Pr})$
	非等温	$1/\text{Re} + \nu_t / \sigma_\theta$		
$\alpha_{\min}$	等温	$1/\text{Re} + \nu_t$	$1/\text{Re} + \nu_t / \sigma_\epsilon$	$1/\text{Re}$
	非等温			

とはならないが、これらの式が時間刻み幅を決定する際の有効な指標を与えることが計算例によって確かめられた。

謝辞 本研究を行うにあたり、東京理科大学工学部の倉淵隆助教授に有益な助言をいただいた。ここに感謝の意を表する。

図3 対称面上の速度ベクトル分布 (CASE1)

図4 Δt の最小値の変化 (CASE2)

図5 対称面上の速度ベクトル分布 (CASE3)

図6 Δt の最小値の変化 (CASE4)

図7 対称面上の速度ベクトル分布 (CASE5)

図8 $U_i U_i / 2$ の空間平均値の変化 (CASE5)

図9 κ の空間平均値の変化 (CASE5)

図10 ε の空間平均値の変化 (CASE5)

図11 v_t の空間平均値の変化 (CASE5)

図12 対称面上の速度ベクトル分布 (CASE7)

図13 対称面上の速度ベクトル分布 (CASE9)

図14 対称面上の速度ベクトル分布 (CASE11)

図15 対称面上の速度ベクトル分布 (CASE13)

図16 非等温流れの対称面上の速度ベクトル分布 (CASE15)

図17 非等温流れの対称面上の温度分布 (CASE15)

表3 各CASE(等間隔メッシュ)の計算条件の設定、室全体の空間平均値、収束回数とCPU時間

CASE 分類	移流項の差分スキーム		温度 条件	Δt の設定値	計算式 ^{注1)}	収束時の空間平均値				収束 回数 ^{注2)}	1000回 CPU時間 ^{注3)}
	運動方 程式	スカラー方程式				$U, U_i/2$	K	ε	v_t		
CASE1	風上		等温	$\Delta \bar{t}_{min}=0.11$	(64)	0.00890	0.00259	0.00022	0.00708	11420	1
CASE2				1回目 $\Delta \bar{t}_{min}=0.11$ 2回目以降 Δt 変動	(48)	0.00890	0.00259	0.00022	0.00708	7400	1.04
CASE3	QUICK	風上		$\Delta \bar{t}_{min}=0.04$	(63), (64), (65)	0.01044	0.00316	0.00027	0.00808	44980	0.9943
CASE4				1回目 $\Delta \bar{t}_{min}=0.04$ 2回目以降 Δt 変動	(43)	0.01044	0.00315	0.00027	0.00808	83760	1.0179

注1) 計算式が複数ある場合は、下線を付いた式による Δt_{min} の値が最も小さいのでこれを Δt_{min} の設定値とした。

注2) (a) 空間平均値 $U_i U_i / 2, \kappa, \varepsilon, v_t$ の値の小数点以下第5位の数値が変化した後5000回繰り返し計算を続行してもその値が変化しなれば、最終の小数点以下第5位の数値が変化した時点まで収束と判定する。(b) $U_i U_i / 2$ の値の小数点以下第5位の数値が変動している場合も、 κ, ε, v_t の値が(a)の条件を満たせば収束と見なす。

注3) CASE1の10000回繰り返し計算にかかる時間(富士通S-4/1000Eで12446s)を1とする。

表 4 各 CASE (非等間隔メッシュ) の計算条件の設定, 室全体の空間平均値, 収束回数と CPU 時間

CASE 分類	移流項の差分スキーム		温度 条件	Δ t の 設 定 値	計算式 注①	収束時の空間平均値				収 束 回 数 注②	10000 回 CPU時間 注③
	運動方程式	スカラー方程式				$U_i, U_j / 2$	K	ε	ν_t		
CASE5	風上		等 温	$\Delta \bar{t}_{min} = 0.11$	(64)	0.01363	0.00320	0.00038	0.00610	8380	1
CASE6				0.01	-	0.01363	0.00320	0.00038	0.00610	92260	0.9778
CASE7	QUICK	風上		$\Delta \bar{t}_{min} = 0.04$	(63), (64), (65)	0.01735	0.00420	0.00048	0.00784	29220	0.9952
CASE8				0.01	-	0.01735	0.00420	0.00048	0.00784	116920	0.9965
CASE9	中心 注④ +	風上		$\Delta \bar{t}_{min} = 0.04$	(63), (64)	0.01722	0.00422	0.00047	0.00778	32760	0.9728
CASE10	部分風上			0.01	-	0.01722	0.00422	0.00047	0.00778	98260	0.9731
CASE11	QUICK	QUICK + 1 時風上 注⑤		$\Delta \bar{t}_{min} = 0.03$	(63), (64), (65)	0.01586	0.00504	0.00059	0.01041	44780	1.0774
CASE12				0.01	-	0.01586	0.00503	0.00059	0.01041	102200	1.0813
CASE13	Hybrid 注⑥			$\Delta \bar{t}_{min} = 0.03$	(63), (64)	0.01279	0.00408	0.00051	0.00965	35620	1.1301
CASE14				0.01	-	0.01279	0.00408	0.00051	0.00965	89440	1.1256
CASE15			非等温	$\Delta \bar{t}_{min} = 0.03$	(63), (64)	0.01235	0.00397	0.00050	0.00939	298647	1.1380
CASE16				0.01	-	0.01235	0.00397	0.00050	0.00939	714580	1.1335

注 1), 注 2) は表 3 の脚注 1), 注 2) と同じ。注 3) CASE5 の 10000 回繰返し計算にかかる時間 (富士通 S-4/1000E で 1887s) を 1 とする。

注 4) 吸込み口周囲の領域のみで風上差分を適用することを意味する^{注5)}。

注 5) QUICK の計算途中で、あるセルの κ の値が κ の空間平均値の 1/100 未満となる場合、そのセルに関して、 κ 、 ε 輸送方程式移流項に風上差分が一時的に使用される。計算された κ が κ の空間平均値の 1/100 以上になれば、再び QUICK スキームが適用される^{注6)}。

注 6) セルベクレ数が 2 以下では中心差分、2 以上では拡散をゼロとした風上差分が適用される^{注7)}。

記号

C	: 3 次元のクーラン数 [-]
D	: 3 次元の拡散項に基づく係数 [-]
E_i, E_{ijk}	: 1 次元と 3 次元の近似解の誤差
G	: 振幅率
L_0	: 基準長さ (m)
Pr	: Prandtl 数
Re	: Reynolds 数
U_0	: 基準速度 (m/s)
c_x, c_y, c_z	: x, y, z 方向の 1 次元のクーラン数 [-]
d_x, d_y, d_z	: x, y, z 方向の 1 次元の拡散項に基づく係数 [-]
l	: 乱れ長さスケール [-]
u_N	: 法線方向の速度成分 [-]
u_T	: 切線方向の速度成分 [-]
u, v, w	: 速度成分 [-]
Δt	: 時間刻み幅 [-]
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	: x, y, z 方向のメッシュの辺長 [-]
$\Delta \theta$	: 基準温度差 (°C)
α	: 拡散係数
ε	: 乱流エネルギー散逸 [-]
$\theta_p, \theta_q, \theta_r$	: x, y, z 方向の位相角
κ	: 乱流エネルギー [-]
ν_t	: 渦動粘性係数
σ_ε	: ε に対する乱流 Schmidt 数 (1.3)
σ_θ	: 乱流 Prandtl 数 (0.9)
φ, β	: 角度
ϕ_i, ϕ_{ijk}	: 1 次元と 3 次元の任意変数 ($u, v, w, \kappa, \varepsilon, \theta$) またはその差分

参考文献

- 1) Harlow, F.H. and Welch, J.E: Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid With Free Surface. The Physics of Fluids 8, pp2182~2189, 1965
- 2) 野村豪・松尾陽・貝塚正光・坂本雄三・遠藤清尊: 室内気流分布の数値解法に関する研究 I (MAC 法による 3 次元数値解析), 日本建築学会計画系論文報告集, 第 231 号, pp73~79, 1982 年 5 月
- 3) 堤純一郎・浦野良美・西田勝: 室内層流熱対流の渦度法と MAC 法による 2 次元および 3 次元数値解析, 日本建築学会計画系論文報告集, 第 350 号, pp19~29, 1985 年 4 月
- 4) 村上周三・持田灯・林吉彦・大和田淳: $\kappa - \varepsilon$ 型 2 方程式モデルによる建物周辺気流の数値解析 その 1 (メッシュ分割、壁面・計算領域外周面の境界条件に関する検討), 日本建築学会計画系論文報告集, 第 392 号, pp11~21, 1988 年 10 月
- 5) 倉淵隆・鎌田元康: MAC 法における差分 mesh の局所的分割法に関する研究 その 1 (Multi-Mesh 法の開発と二次元室内気流問題への適用), 日本建築学会計画系論文報告集, 第 425 号, pp1~9, 1991 年 7 月
- 6) 荘達民・赤坂裕・大城匡豊: 差分スキームと時間前進ステップが流れの数値解析に与える影響について, 空気調和・衛生工学会学術講演会講演論文集 I, pp101~104, 1993 年 10 月
- 7) 赤坂裕・荘達民: MAC 法における時間刻み Δt の最適化 (自然対流問題への応用), 空気調和・衛生工学会学術講演会講演論文集 I, pp153~156, 1994 年 10 月
- 8) Patrick J. Roache: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, 1976
- 9) J.Crank and P.Nicolson: A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of The Heat-condition Type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.43 No.50, pp50-67, 1947
- 10) C.W.Hirt: Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations, Journal of Computational Physics 2, pp339-355, 1968
- 11) G・D・スミス著, 藤川洋一郎訳: 電算機による偏微分方程式の解法, サイエンス社, 1971 年
- 12) 高橋亮一・棚町芳弘: 差分法, 培風館, 1991 年
- 13) 高橋亮一: コンピュータによる流体力学 (演習), 構造計画研究所, 1982 年
- 14) Suhas V. Patankar: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1980
- 15) B.P.Leonard: A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 19, 59-98 NORTH-HOLLAND, 1979
- 16) 鎌田元康・千田善孝・倉淵隆: 室内気流分布の数値予測法の実用化に関する研究 (課題番号 01460198), 平成元年~3 年度科学研究費補助金 (一般研究 B) 研究報告書, 1992 年
- 17) 吉川暁・山口克人: 室内気流の数値解析 (その 2) 乱流室内気流の計算, 空気調和・衛生工学, 48-10, pp11~15, 1974
- 18) 野村豪・加藤信介・佐藤正章: 室内空気分布数値解析乱流モデルの境界条件に関する研究 (その 1) 吹出口の乱流統計量実測例, 日本建築学会学術講演梗概集, pp323~324, 1978 年 9 月
- 19) 村上周三・加藤信介・須山喜美: 移流項における一次精度風上, QUICK, 中心差分スキーム等の比較検討——室内気流数値解析の診断システムに関する研究 (第 2 報), 日本建築学会計画系論文報告集, 第 390 号, pp1~12, 1988 年 8 月
- 20) T.Kurabuchi and J.B.Fang: A Numerical Method for Calculating Indoor Airflows Using A Turbulence Model, NISTIR 89-4211, 1989

(1996 年 7 月 4 日原稿受理, 1997 年 1 月 30 日採用決定)