立方体周辺気流の LES 解析における数値振動抑制手法の研究

一般曲線座標系・スタガードグリッドによる気流数値解析法 その2

STUDY ON METHOD FOR REDUCING NUMERICAL OSCILLATION FOR LES
OF FLOW AROUND A CUBE3-D CFD analysis with staggered grid system based
on generalized curvilinear coordinates (Part 2)石田 義洋*¹, 村上周三*², 大岡 龍三*³, 持田 灯*⁴Yoshihiro ISHIDA, Shuzo MURAKAMI, Ryozo OOKA
and Akashi MOCHIDA

In the previous paper, the formulation of the 3-D CFD code with the staggered grid system based on generalized curvilinear coordinates was developed and tested for LES of channel flow

This paper investigates a numerical method for interpolation of variables at discrete points and geometrical definitions of control volumes of the pressure based on the staggered grid system. There are two types of definition of the control volumes of the pressure. First type defines that the pressure definition points may not be located at the centers of the control volumes and boundary surfaces of them are located at the midpoints between two adjacent pressure definition points. Second type defines that the pressure definition points are located at the centers of the control volumes and boundary surfaces of them may not be located at the midpoints between two adjacent pressure definition points. Four types of discrete scheme are composed and investigated by applying them to LES of flow around a cube. A scheme based on the first type definition of the control volumes is recommended by reason that the generation of wiggle is reduced to a very weak level and agreement of the pressure distributions with the experimental data is confirmed to be good, as well as those of the turbulence kinetic energy.

Keywords : generalized curvilinear coordinates, numerical interpolation, control volume, staggered grid system, LES

一般曲線座標系, 数値補間, コントロールボリューム, スタガードグリッド, LES

1. はじめに

市街地内の流れ場は一般に非常に複雑である。この複雑さは幾何学的形状の複雑さと流体力学的複雑さの両面から引き起こされているので、その予測、解析には一般曲線座標系に基づく計算流体力学(CFD: Computational Fluid Dynamics)の利用が有効である。前報¹⁾では、一般曲線座標系・スタガードグリッドに基づく3次元LES(Large Eddy Simulation)解析法の定式化を行い、チャンネル流れ場において、従来のコロケーショングリッドに基づく一般曲線座標系を利用した解析に比べて、妥当な結果が得られたことを報告した。しかしながら、一般曲線座標系・スタガードグリッドを用いた場合でも、建物を含む複雑な流れ場においては、格子間隔の不均等性に起因して、しばしば数値振動が発生する場合がある。このような数値振動の発生は、建物周辺の流れ場・圧力場を高精度に予測するに際し、大きな障害となる。本研究では、格子間隔の不均等性に起因する数値振動の抑制方法について検討を行う。

不等間隔格子を用いた場合のスタガードグリッドに基づく離散化法では、圧力のコントロールボリューム(以降CVPと略記する)の界面位置が圧力定義点間の中心にあるかどうかは、圧力のコントロールボリュームの定義によって定まる²⁾。すなわち、定義方法としては「速度定義点を圧力定義点間の中点に設定する定義(以降CVP1と略記する)」と「圧力定義点を圧力のCVPの中心に設定する定義(CVP2と略記)」の2種類が考えられる。通例の離散化手法においては後者の

形でCVPを定義する場合(CVP2の定義)が多い。高精度数値解析法の研究はいくつか見られるが^{3), 4)}、不等間隔格子のスタガードグリッドにおけるCVPの定義が計算結果に与える影響について詳細に論じた研究はあまり見られない。野村ら⁵⁾は、スタガードグリッドの不等間隔格子に関する考察を行っているが、これはCVP2の定義に基づく離散化法に関する研究である。

前報¹⁾では、圧力の定義点は通例に従い暗黙のうちにCVPの中心にあるものとして定義(CVP2の定義)していた。この計算法においては、物理速度成分は反変速度成分の定義値あるいは補間値^{注1)}から必要な位置で逆変換して得られる。しかしながら、不等間隔格子の場合、補間位置で逆変換された物理速度成分は流量を界面の面積で割った流量(面積)平均値となっており、物理的距離に対し線形変化するとして補間計算した値とは一致しない。これは不等間隔グリッドを用いた場合、数値的な時間振動の原因の一つとなると考えられる^{注2)}。また、流量平均値の物理速度の代わりに、その位置の線形補間値を使用した場合は、過大なwiggle(空間振動)の発生を引き起こすことがある⁶⁾。

本研究では、まずCVP1とCVP2のいずれの定義に対しても、①「CVPだけでなく速度のコントロールボリュームにおいてもヤコビアンと反変速度の積が連続式を高精度で満たす」ように補間方法を工夫した。その上で、前報¹⁾とはCVPの定義を変えて、速度定義点を圧力定義点間の中点に設定する定義(CVP1の定義)を採用した。このCVP1の定義によって離散化を行えば、②「①の方法で補間された反変速度を一般曲線

*¹ 鹿島情報システム部 次長・工博

*² 東京大学生産技術研究所 教授・工博

*³ 福井大学工学部 講師・工博

*⁴ 東北大学大学院工学研究科 助教授・工博

Deputy General Manager of ISD, Kajima Corporation, Dr. Eng.

Prof. of IIS, University of Tokyo, Dr. Eng.

Lecturer of Fukui University, Dr. Eng.

Assoc. Prof. of Tohoku University, Dr. Eng.

Table 1 Governing Equations with staggered grid system
Based on Generalized Curvilinear Coordinates

TRANSFORMATION RELATIONS BETWEEN CONTRAVARIANT
AND PHYSICAL VELOCITY COMPONENTS

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \quad V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \quad W = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \quad (1.1)$$

$$u = x_\xi U + x_\eta V + x_\zeta W, \quad v = y_\xi U + y_\eta V + y_\zeta W, \quad w = z_\xi U + z_\eta V + z_\zeta W \quad (1.2)$$

CONTINUITY EQUATION

$$D = u_x + v_y + w_z = \left\{ (JU)_\xi + (JV)_\eta + (JW)_\zeta \right\} / J = 0 \quad (1.3)$$

MOMENTUM EQUATIONS OF PHYSICAL VELOCITY

$$u_i = -HX + FX - p_x, \quad v_i = -HY + FY - p_y, \quad w_i = -HZ + FZ - p_z \quad (1.4)$$

MOMENTUM EQUATIONS OF CONTRAVARIANT VELOCITY

$$(JU)_i = \xi_x \left\{ -(J \cdot HX) + (J \cdot FX) - (J \cdot p_x) \right\} + \xi_y \left\{ -(J \cdot HY) + (J \cdot FY) - (J \cdot p_y) \right\} \\ + \xi_z \left\{ -(J \cdot HZ) + (J \cdot FZ) - (J \cdot p_z) \right\} \quad (\xi\text{-direction}), \quad \text{etc.} \quad (1.5)$$

Convection Terms (x-direction)

$$HX = (uu)_x + (vu)_y + (wu)_z = \left\{ (JUu)_\xi + (JVu)_\eta + (JWu)_\zeta \right\} / J, \quad \text{etc.} \quad (1.6)$$

*Pressure gradient terms (p_x, p_y, p_z) and diffusion terms (F_x, F_y, F_z) are neglected here. See the reference paper [1].

座標系から物理座標系へ逆変換して得られる物理速度は、物理座標系上の物理的距離に対する線形補間値と高精度で一致する。①、②の改善の結果、計算安定性が向上し、数値的時間および空間振動が抑制される移流スキームが得られる。新しいスキームの構成を述べ、CVP2の定義を用いた場合のスタガードグリッドにおける数値振動の発生機構を解明するとともに、立方体周りの複雑な流れ場にCVP1およびCVP2の定義に基づく4種類のスキームを適用して、実験との比較・検証を行った結果を報告する。

2. 支配方程式と変数配置

表-1に支配方程式の一部を示す¹⁾。式(1.1), (1.2)は反変速度成分と物理速度成分相互の変換式である^{2,3)}。式(1.3)は連続式、(1.4)は物理速度の運動方程式である。式(1.4)を式(1.1)に代入して流量成分(ヤコビアンと反変速度の積(JU)等)の運動方程式^{2,4)}(1.5)が得られる。表には(JU)成分の運動方程式のみを示す。本解析法では、流量成分の運動方程式(式(1.5)等)を時間積分する解法を採用している¹⁾。

図-1にCVPの形状、変数配置、界面面積、流量配分等を示す。本研究では、検討するスキームによりCVP内の圧力定義点の位置が異なる。これに対応するため、図-1では圧力定義点をCVP内の任意の位置に配置する(図の●)。CVPの界面と圧力定義点を結ぶ直線との交点で、流量成分(JU)等^{2,4)}を定義する(図の○)。

3. 補間法と変換法

3.1 圧力定義点における補間と変換

まず、CVP内の任意の位置に設定した圧力定義点(i, j, k)における流量成分(JU) $_{i,j,k}$ の補間式を導出する。図-1の $\eta_{S_{i,j-1/2,k}}$ は点($i, j-1/2, k$)を通る η =一定のCVPの界面(以降、CVPの界面($i, j-1/2, k$)と略記する)の面積である。 $\eta_{S_{i,j-1/2,k}}^{-\xi}$ は、この界面を $\xi=i$ 方向に分割した場合の、界面面積 $\eta_{S_{i,j-1/2,k}}$ のうちの i より小さい側($i-1/2$)と i の間の部分面積であり、 $\eta_{S_{i,j-1/2,k}}^{+\xi}$ は i より大きい側(i と $i+1/2$)の間の部分面積である^{2,5)}。 $\eta_{R_{i,j-1/2,k}}^{-\xi}$ は流量成分をこれらの部分面積で比例配分するための面積比である(表-2、式(2.9)参照)。図-1のCVPを左右の二つの部分CVPに分割し、流入(または流出)する流量成分(JV) $_{i,j\pm 1/2,k}$ を(JV) $_{i,j\pm 1/2,k} \eta_{R_{i,j\pm 1/2,k}}^{-\xi}$ と(JV) $_{i,j\pm 1/2,k} (1 - \eta_{R_{i,j\pm 1/2,k}}^{-\xi})$ 等のように左右に面積で比例配分する。

Fig. 1 Arrangement of Variables and Distribution of Volume Fluxes in a Control Volume of the Pressure

CVP全体、左側の部分CVP及び右側の部分CVPで、それぞれ連続式を立てると、式(1), (2), (3)が得られる。

$$(JU)_{i+1/2,j,k} - (JU)_{i-1/2,j,k} + (JV)_{i,j+1/2,k} - (JV)_{i,j-1/2,k} + (JW)_{i,j,k+1/2} - (JW)_{i,j,k-1/2} = 0 \quad (1)$$

$$(JU)_{i,j,k} - (JU)_{i-1/2,j,k} + \eta_{R_{i,j+1/2,k}}^{-\xi} (JV)_{i,j+1/2,k} - \eta_{R_{i,j-1/2,k}}^{-\xi} (JV)_{i,j-1/2,k} \\ + \zeta_{R_{i,j,k+1/2}}^{-\xi} (JW)_{i,j,k+1/2} - \zeta_{R_{i,j,k-1/2}}^{-\xi} (JW)_{i,j,k-1/2} = 0 \quad (2)$$

$$(JU)_{i+1/2,j,k} - (JU)_{i,j,k} + (1 - \eta_{R_{i,j+1/2,k}}^{-\xi}) (JV)_{i,j+1/2,k} - (1 - \eta_{R_{i,j-1/2,k}}^{-\xi}) (JV)_{i,j-1/2,k} \\ + (1 - \zeta_{R_{i,j,k+1/2}}^{-\xi}) (JW)_{i,j,k+1/2} - (1 - \zeta_{R_{i,j,k-1/2}}^{-\xi}) (JW)_{i,j,k-1/2} = 0 \quad (3)$$

式(2), (3)から同値であるべき(JU) $_{i,j,k}$ の二つの式が得られるが、数値計算の丸め誤差による数値の偏りを避けるために、両式の平均をとる。

表-2、式(2.1)にこれを示す。同様に、残りの成分も式(2.2), (2.3)となる。

グリッドが直交直線座標系 ($x \sim \xi, y \sim \eta, z \sim \zeta$) であれば、

$$\eta_{R_{i,j\pm 1/2,k}}^{-\xi} = \zeta_{R_{i,j\pm 1/2,k}}^{-\xi} = R = (x_{i,j,k} - x_{i-1/2,j,k}) / (x_{i+1/2,j,k} - x_{i-1/2,j,k}) \quad (4)$$

であるから、表-2、式(2.1)等にこれを代入して整理すると

$$(JU)_{i,j,k} = (1 - R)(JU)_{i-1/2,j,k} + R(JU)_{i+1/2,j,k}, \quad \text{etc.} \quad (5)$$

となり、流量成分(JU)等は x 軸等にそった両端の定義値の線形補間の式となる^{2,6)}。もちろん、物理速度成分も線形補間値になる。

3.2 圧力のコントロールボリューム(CVP)の界面における補間

次にCVPの ξ =一定の界面($i+1/2, j, k$)における補間方法を検討する。

この界面では、(JU) $_{i+1/2,j,k}$ は定義されているから、(JV) $_{i+1/2,j,k}$ と(JW) $_{i+1/2,j,k}$ の補間を考えればよい。図-2に、流量成分(JU) $_{i+1/2,j,k}$ のコントロールボリューム^{2,4)}(図-2のアミ目部分、以降CVUと略記する)を示す。(JV) $_{i+1/2,j,k}$ は流量定義点($i+1/2, j, k$)を通る η =一定の断面を垂直に通過する流量成分である。図-2に示す点(i, j, k)の右側の部分断面を通過する流量成分 $\eta_{R_{i,j,k}}^{+\xi} (JV)_{i,j,k}$ と点($i+1, j, k$)の左側の部分断面を通過する流量成分 $\eta_{R_{i+1,j,k}}^{-\xi} (JV)_{i+1,j,k}$ の和を、この断面の流量成分(JV) $_{i+1/2,j,k}$ として表-2、式(2.4)のように定める。すなわち(JV) $_{i+1/2,j,k}$ はこの断面の流量を保存するように定められる。同様に(JW) $_{i+1/2,j,k}$ は式(2.5)となる。

3.3 速度のコントロールボリューム(CVU)の界面における補間

図-2のCVUにおいて、界面($i+1/2, j-1/2, k$) (図-2中の□を代表点とする斜め縞の点線)を通過する流量成分(JV) $_{i+1/2,j-1/2,k}$ は、式(2.4)と同様に、表-2、式(2.7)となる。また、(JU) $_{i+1/2,j-1/2,k}$ 、(JW) $_{i+1/2,j-1/2,k}$ はそれぞれ式(2.6), (2.8)になる。各部分CVPで連続式を満足するように流量成分を配分して補間したので、二つの部分CVPを並べた形状の流量成分

Table 2 Interpolation Equations at Discrete points

PRESSURE DEFINITION POINT (i, j, k)

$$(JU)_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left\{ (JU)_{i+\frac{1}{2},j,k} + (JU)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right. \\ \left. + (1-2\eta R_{i,j+\frac{1}{2},k}^{-\xi})(JV)_{i,j+\frac{1}{2},k} - (1-2\eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{-\xi})(JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right. \\ \left. + (1-2\zeta R_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{-\xi})(JW)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (1-2\zeta R_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{-\xi})(JW)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right\} = 0 \quad (2.1)$$

$$(JV)_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left\{ (JV)_{i,j+\frac{1}{2},k} + (JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right. \\ \left. + (1-2\zeta R_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\eta})(JU)_{i+\frac{1}{2},j,k} - (1-2\zeta R_{i-\frac{1}{2},j,k}^{-\eta})(JU)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right. \\ \left. + (1-2\zeta R_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{-\eta})(JW)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (1-2\zeta R_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{-\eta})(JW)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.2)$$

$$(JW)_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left\{ (JW)_{i,j,k+\frac{1}{2}} + (JW)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + (1-2\zeta R_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\xi})(JU)_{i+\frac{1}{2},j,k} - (1-2\zeta R_{i-\frac{1}{2},j,k}^{-\xi})(JU)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right. \\ \left. + (1-2\eta R_{i,j+\frac{1}{2},k}^{-\xi})(JV)_{i,j+\frac{1}{2},k} - (1-2\eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{-\xi})(JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right\} \quad (2.3)$$

VELOCITY DEFINITION POINT ($i+1/2, j, k$)

$(JU)_{i+\frac{1}{2},j,k}$ is defined at this point.

$$(JV)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \eta R_{i,j,k}^{+\xi} (JV)_{i,j,k} + \eta R_{i+1,j,k}^{-\xi} (JV)_{i+1,j,k} \quad (2.4)$$

$$(JW)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \zeta R_{i,j,k}^{+\xi} (JW)_{i,j,k} + \zeta R_{i+1,j,k}^{-\xi} (JW)_{i+1,j,k} \quad (2.5)$$

POINT($i+1/2, j-1/2, k$) AT THE BOUNDARY SURFACE OF A CVU

$$(JU)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \xi R_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\eta} (JU)_{i+\frac{1}{2},j,k} + \xi R_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^{+\eta} (JU)_{i+\frac{1}{2},j-1,k} \quad (2.6)$$

$$(JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{+\xi} (JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} + \eta R_{i+1,j-\frac{1}{2},k}^{-\xi} (JV)_{i+1,j-\frac{1}{2},k} \quad (2.7)$$

$$(JW)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \zeta R_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\eta} (JW)_{i+\frac{1}{2},j,k} + \zeta R_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^{+\eta} (JW)_{i+\frac{1}{2},j-1,k} \quad (2.8)$$

TRANSFORMATION FROM CONTRAVARIANT TO PHYSICAL VELOCITY

Contravariant velocity components are transformed into physical velocity components at any discrete point by using eqs. (1.2).

COEFFICIENTS OF AREA PROPORTIONAL DISTRIBUTION

$$\eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{-\xi} = \frac{\eta S_{i,j-\frac{1}{2},k}^{-\xi}}{\eta S_{i,j-\frac{1}{2},k}}, \quad \eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{+\xi} = \frac{\eta S_{i,j-\frac{1}{2},k}^{+\xi}}{\eta S_{i,j-\frac{1}{2},k}} = 1 - \eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{-\xi}, \\ \zeta R_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{-\xi} = \frac{\zeta S_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{-\xi}}{\zeta S_{i,j,k-\frac{1}{2}}}, \quad \eta R_{i,j,k}^{-\xi} = \frac{\eta S_{i,j,k}^{-\xi}}{\eta S_{i,j,k}}, \quad \text{etc.} \quad (2.9)$$

$(JU)_{i+1/2,j,k}$ 等の CVU においても、CVP と同様に、流量成分の補間値は連続式(6)等を高精度で満足する。

$$(JU)_{i+1,j,k} - (JU)_{i,j,k} + (JV)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + (JW)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - (JW)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} = 0 \quad (6)$$

3.4 反変速度から物理速度への変換

圧力定義点(i, j, k)、CVP の界面($i+1/2, j, k$)、CVU の界面($i+1/2, j-1/2, k$) 等における物理速度は、表-2 の流量成分の式(2.1)~(2.8)等を J で除して反変速度成分を計算し、それらを表-1、式(1.2)に代入して得られる。

4. 圧力のコントロールボリューム(CVP)の定義方法の選定

ここでは CVP の適切な定義を検討する。図-3 に CVP1 と CVP2 の 2 種類の CVP の定義を示す。CVP1 と CVP2 では圧力定義点が一一致しているものとする。ただし、CVP1 では界面(○)は圧力定義点間(●)の中点であるが、CVP2 では界面は中点ではない。このため、図-3 に示すように CVP の界面の位置が異なる^{注7)}。理解を容易にするために、($x \sim \xi, y \sim \eta, z \sim \zeta$)の直交直線座標系で、補間式(2.6)から CVU の界面($i+1/2, j-1/2, k$) (図-2、-3 の□)の物理速度成分 $u_{i+1/2,j-1/2,k}$ の補間値を求めてみる。

Fig. 2 A Control Volume of Volume Flux (CVU) and Interpolation of Volume Flux at the Boundary Surface of a CVU

Fig. 3 Definitions of the Control Volumes of the Pressure (CVP)

この直交直線座標系の場合は $\xi_y = \xi_z = 0$ であるから、流量成分 $(JU)_{i+1/2,j,k}$ は式(7)のように表示できる。

$$(JU)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \left\{ J(\xi_x u + \xi_y v + \xi_z w) \right\}_{i+\frac{1}{2},j,k} = (J\xi_x u)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \xi S_{i+\frac{1}{2},j,k} u_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (7)$$

式(7)等を表-2、式(2.6)に代入して整理すると、式(8)となる。

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{\xi S_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^{+\eta} u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + \xi S_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\eta} u_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\xi S_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^{+\eta} + \xi S_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\eta}} \quad (8)$$

式(8)は、 $u_{i+1/2,j-1/2,k}$ が両端の物理速度 $u_{i+1/2,j-1,k}$ と $u_{i+1/2,j,k}$ に関する面積を重みとする重み(面積)平均値であることを示している。すなわち、 $u_{i+1/2,j-1/2,k}$ は、この断面(点($i+1/2, j-1/2, k$))を代表点とする $\xi=i+1/2$ の面)を通りぬける流量(式(8)の右辺の分子)を、断面積(式(8)の右辺の分母)で割った、いわゆる流量平均した速度になっている(以降、この補間手順を流量平均と呼ぶ)。式(8)から物理速度 $u_{i+1/2,j-1/2,k}$ は点($i+1/2, j-1/2, k$)の左右の部分断面の面積の大きい方の側の速度に近い値をとることが分かる。しかしながら、物理速度は物理的距離に対し、線形に変化することが望ましい。式(8)が線形補間式と一致するためには、

$$\xi S_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^{+\eta} = \xi S_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\eta} \quad \text{であればよい。このとき、流量平均の式(8)は、} \\ u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k}) \quad (9)$$

となり、流量平均の式は単純平均の式と一致する。直交直線座標系では、 $\xi S_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^{+\eta} = \xi S_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-\eta}$ であるということは、点($i+1/2, j-1/2, k$)が点($i+1/2, j-1, k$)と点($i+1/2, j, k$)との中点であり、CVP の界面が圧力定義点間の中点であるということを意味する。逆に、直交直線座標系で、CVP の界面を圧力定義点間の中点に設定した場合に限り、CVU の界面(図-2、-3 の□等)において、流量平均による物理速度の補間法と線形補間による物理速度の補間法が一致し、両者は単純平均になる^{注8)}。また、直交直線座標系では、式(5)に示したように、圧力定義点における速度の補間は常に線形補間が成立している。すなわち、CVP1 の定義に基づいてスキームを構成すれば、一般曲線座標系の定型的な計算手順に則るだけで、すべての補間位置で、自動的に物理速度の線形補間が成立する。従って、CVP の形状は CVP1 (CVP の界面を圧力定義点間の中点に設定、図-3(a)) の定義が適切であると言える。

Table 3 Discrete Scheme of Convection Term (Including Scheme 1 and 2V)

VOLUME INTEGRATED CONVECTION TERM (x-direction)

$$(J \cdot HX)_{i+\frac{1}{2},j,k} = A_{i+\frac{1}{2},j,k} - A_{i,j,k} + B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \\ + C_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - C_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

REGION NOT ADJACENT TO THE BOUNDARY CORNER

$$A_{i,j,k} = (JU)_{i,j,k} u_{i,j,k} \quad (3.2)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \left\{ \eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{+\xi} (JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} + \eta R_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{-\xi} (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right\} u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \quad (3.3)$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} = \left\{ \xi R_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{+\xi} (JW)_{i,j,k-\frac{1}{2}} + \xi R_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{-\xi} (JW)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right\} u_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

REGION ADJACENT TO THE BOUNDARY CORNER (SEE FIG. 4)

$$C_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} = \left\{ \xi R_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{+\xi} (JW)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right\} \left(\frac{1}{2} u_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.5)$$

* Physical velocity components are given by using interpolation and transformation procedures On Table 2.

Table 4 Expression of Discrete Schemes of Convection Term Based on Orthogonal Physical Coordinates (x-direction)

SCHEME 1

- ① Definition of CVP : CVP1
② Physical velocity in flux B : Linear Interpolation

$$A_{i,j,k} = \left\{ (1-r_i^{-\xi})(JU)_{i-\frac{1}{2},j,k} + r_i^{-\xi}(JU)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right\} \frac{1}{2} \left\{ (1-r_i^{-\xi})u_{i-\frac{1}{2},j,k} + r_i^{-\xi}u_{i+\frac{1}{2},j,k} \right\} \quad (4.1)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k}) \quad (4.2')$$

$$= \left\{ \eta R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{+\xi} (JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} + \eta R_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{-\xi} (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right\} \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k}) \quad (4.2)$$

SCHEME 2V

- ① Definition of CVP : CVP2
② Physical velocity in flux B : Volume flux average

$$A_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left\{ (JU)_{i-\frac{1}{2},j,k} + (JU)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right\} \frac{1}{2} (u_{i-\frac{1}{2},j,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k}) \quad (4.3)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left\{ (JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} + (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right\} \left\{ r_{j-\frac{1}{2}}^{-\eta} u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + (1-r_{j-\frac{1}{2}}^{-\eta}) u_{i+\frac{1}{2},j,k} \right\} \quad (4.4)$$

SCHEME 2L

- ① Definition of CVP : CVP2
② Physical velocity in fluxes B : Linear Interpolation

$$A_{i,j,k} : \text{the same as eq. (4.3)} \quad (4.5)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left\{ (JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} + (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right\} \left\{ (1-r_{j-\frac{1}{2}}^{-\eta}) u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + r_{j-\frac{1}{2}}^{-\eta} u_{i+\frac{1}{2},j,k} \right\} \quad (4.6)$$

SCHEME 2S

- ① Definition of CVP : CVP2
② Physical velocity in fluxes B : Simple average

$$A_{i,j,k} : \text{the same as eq. (4.3)} \quad (4.7)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k}) \quad (4.8')$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (JV)_{i,j-\frac{1}{2},k} + (JV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right\} \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j-1,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k}) \quad (4.8)$$

Coefficients of Linear Interpolation

$$r_i^{-\xi} = \frac{x_{i,j,k} - x_{i-\frac{1}{2},j,k}}{x_{i+\frac{1}{2},j,k} - x_{i-\frac{1}{2},j,k}}, \quad r_{j-\frac{1}{2}}^{-\eta} = \frac{y_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - y_{i+\frac{1}{2},j-1,k}}{y_{i+\frac{1}{2},j,k} - y_{i+\frac{1}{2},j-1,k}} \quad (4.9)$$

5. 移流スキーム**5.1 一般曲線座標系の移流スキーム**

圧力定義点を CVP 中の任意の位置においた場合の移流項の離散化スキームを表-3 に示す。選定された CVP の定義に基づいて、圧力定義点及び CVP の界面(流量定義点)の座標を表-2、表-3 に与えることにより、CVP の定義に対応した移流項の離散化スキームとなる。

表-3、式(3.1)~(3.4)は CVU が計算領域の境界面に接していない場合の離散化された x 方向の移流項である。移流フラックスは式(3.2)~(3.4)となる(式中の物理速度に関しては 3.4 節参照)。y, z 方向は省略。

次に障害物に接する界面の移流フラックスを考える。図-4 に障害物

Fig. 4 Enlargement of a Grid near the Corner of a Cube

のコーナー部近傍のグリッド分割を示す。流量成分 $(JU)_{i+1/2,j,k}$ の CVU(図-4 のアミ目部分) は、その底部が半分だけ障害物に接している。図に示すように、 $(i+1/2,j,k-1/2)$ 点が接しているので $(JW)_{i+1,j,k-1/2}=0$ である。また物理速度成分 u は図-4 中の縦縞の三角形で示す分布になっていると仮定して、左半分の界面の平均値として物理速度成分を $(u_{i,j,k-1/2})/2$ とする⁹⁾。従って界面 $(i+1/2,j,k)$ の移流フラックスは式(3.5)となる。

5.2. 本研究で取り上げた 4 種類の移流スキームの直交座標系表示

ここでは、表-3、式(3.2)~(3.4)の移流フラックス A, B, C に対し、補間法の異なる 4 種類の移流スキームを適用して比較検討する。

スキームの差異を明快にするために、物理速度の補間式を直交座標系で表示した 4 種類のスキームの移流フラックス A, B を表-4 に示す。流量成分 (JU) 等については直交系表示としない方が分かり易いので、流量表示のままとし、 C は B と同様なので省略した。これらのスキームを立方体周りの数値計算に適用して CVP の形状の適否を検証する。式(4.1), (4.2)にスキーム 1 の移流フラックスを示す。式(4.1), (4.2)は表-2, -3 から、CVP1(CVP の界面を圧力定義点の中心に設定)の定義及び直交系の条件のみを課して得られる。CVU の界面 (i,j,k) (図-2 の●)は流量定義点間の中心ではないので、式(4.1)に示すように流量、物理速度成分ともに線形補間されている。CVU の界面 $(i+1/2,j-1/2,k)$ (図-2 の□)では、左右の流量定義点 $((i,j-1/2,k)$ と $(i+1,j-1/2,k)$) が CVP の界面の中心ではないので、式(4.2)に示すように、流量成分は両端の CVP 界面の(面積で比例配分された)部分流量成分の和となっている。式(4.2)の物理速度成分は、界面 $(i+1/2,j-1/2,k)$ が上下の流量定義点 $((i+1/2,j,k)$ と $(i+1/2,j-1,k)$) 間の中心であるので、流量平均=線形補間=単純平均となっている。物理速度成分の補間は全て 2 次精度である。移流フラックス B の物理速度成分を等間隔グリッドと同じ単純平均とする式(4.2)の形式が不等間隔グリッドを使用しても数値振動を抑制するスキームを構成するものと考えられる(6 章で後述)。

式(4.3), (4.4)に示すスキーム 2V¹⁾ は、表-2, -3 から、CVP2(圧力定義点を CVP の中心に設定)の定義及び直交系の条件のみを課して得られる。CVU の界面 (i,j,k) (図-2 の●)は流量定義点間の中心であるから、式(4.3)に示すように流量、物理速度成分ともに線形補間=単純平均となっている。CVU の界面 $(i+1/2,j-1/2,k)$ (図-2 の□)では、左右の流量定義点がそれぞれの CVP の界面の中心であるので、式(4.4)の流量成分は両端の CVP 界面の流量成分の 1/2 ずつの和となり、結果として単純平均になっている。界面 $(i+1/2,j-1/2,k)$ は上下の流量定義点間の中心ではないので、式(4.4)に示すように物理速度成分は流量平均となる。

スキーム 1, 2V ではすべての補間点で式(1.1), (1.2)の反変速度と物理速度の相互変換が成立している。

スキーム 2L¹⁰⁾ は、補間精度を向上させる目的で、スキーム 2V の

式(4.4)中の物理速度の流量補間を式(4.6)のように線形補間に置き換えたものであり、スキーム 2S^{注11)}は式(4.8)のように単純平均で置き換えたものである。従ってスキーム 2L, 2S では界面 $(i+1/2, j-1/2, k)$ 等において、式(1.1), (1.2)の反変速度と物理速度の相互変換が成立しない。

全スキームで CVU の連続式は高精度で満足されている。

6. 振動の発生要因の検討

圧力の定義点を CVP の中心に定義 (CVP2 の定義) すると、適用する物理速度の補間法によっては、建物前方等の領域で数値振動^{注12)}が発生する。この要因を簡単のために直交座標系で検討する。図-5 に CVP2 の定義を採用した場合のグリッドと流量成分の CVU および定義点における w 成分を矢印で示す。図中に 3 種類の補間法に対応した w 成分の各補間値の大きさも矢印で示す。立方体のコーナ部が $(i+3/2, j, k-1/2)$ の位置にあるとする。 h_i は CVP の主流(x)方向の長さである。

このような立方体の前方では、移流項に中心差分を適用する限り、多少の wiggle(w の空間振動、図-5 参照)は発生する。これを本来拡散項が抑制するのであるが、LES では v_{SGS} が小さいため、相当地に詳細なグリッドを採用しなければ十分には抑制できない。

数値振動の発生は流量成分 $(JW)_{i,j,k+1/2}$ (z -方向)の輸送方程式において、卓越する主流(JU) (x -方向)によって輸送される物理速度成分 w の補間法に問題があるためであると推測し、流量成分 $(JW)_{i,j,k+1/2}$ の CVU の界面のうち、界面 $(i\pm 1/2, j, k+1/2)$ 等の圧力定義点と一致しない界面(図-5 の□)の物理速度成分 w の補間方法を検討する^{注13)}。

表-5 に z -方向の移流項の近似式を示す。移流項に対して、主流(JU) が卓越するとして近似式(5.1), (5.2)を仮定する。この仮定のもとでは、スキーム 1 と 2S の移流項はともに式(5.3)の形式で近似される^{注14)}。

6.1 CVP2 の定義を採用した場合における振動の発生原因

スキーム 2V と 2L は、移流項中に h_i 等の不等間隔要素と定義点の成分 $w_{i,j,k+1/2}$ が残り、以下に述べるように、通常の等間隔グリッドの中心差分の移流項とは異なる性質を示す。

表-5 の式(5.4)に示す条件①、すなわち CVP の幅が主流(i)方向に漸減し、かつ w に wiggle が発生している場合を考える。図-5 に条件①の場合の各補間値の大小関係を示してある(図-5 の $(i-1)\sim(i+1)$ の間を参照)。簡単のために $w_{i-1,j,k+1/2}=w_{i+1,j,k+1/2}$ を仮定して移流項を近似的に評価する。界面の物理速度の補間に線形補間を適用する(スキーム 2L)と移流項は式(5.5)のように正となり、流量平均を適用する(スキーム 2V)と移流項が式(5.6)のように負になる。よって物理速度に線形補間を施した場合(スキーム 2L)では小さい $w_{i,j,k+1/2}$ がさらに減少して空間振動(wiggle)が促進され、物理速度に流量平均を施した場合(スキーム 2V)では小さい $w_{i,j,k+1/2}$ が増加するため空間振動が抑制される。

次に式(5.7)に示す条件②のように CVP の主流方向の幅が極小になる位置で、簡単のために $h_{i-1}=h_{i+1}$ を仮定して移流項を近似する。界面の物理速度に線形補間(スキーム 2L)を適用すると、CVP の幅が極小になる位置の移流項の絶対値が、式(5.8)に示すように物理量を単純補間した場合(式(5.3)) より小さくなり、流量平均(スキーム 2V)の適用では、式(5.9)に示すように式(5.3)より大きくなる。よって流量平均では、過大な移流項により、この位置で不安定性が増加し、数値的な時間振動が発生する可能性がある。

すなわち、スキーム 2V は建物前方等の空間的な振動を抑制するが、数値的な時間振動が発生する可能性がある。スキーム 2L は、逆に時間振動に対しては有利に働くが、空間振動が促進される。スキーム 2V

Fig. 5 Comparison of Interpolated Values on Non-uniform Grid Based on the Definition CVP2

Table 5 Estimation of Convection Term for Interpolation Methods on the Assumption of Dominant Main Flow (JU)

APPROXIMATE CONVECTION TERM OF z -DIRECTION

$$(J \cdot HZ)_{i,j,k+1/2} \approx (JU)_{i+1/2,j,k+1/2} w_{i+1/2,j,k+1/2} - (JU)_{i-1/2,j,k+1/2} w_{i-1/2,j,k+1/2} \quad (5.1)$$

ASSUMPTION OF DOMINANT MAIN FLOW

$$(JU)_{i-1/2,j,k+1/2} \approx (JU)_{i+1/2,j,k+1/2} \quad (5.2)$$

STUDY ON SOURCES OF OSCILLATION BASED ON THE DEFINITION CVP2

SCHEME 1 and 2S (Applying Simple Average to physical velocity component) weak space oscillation (wiggle) and no numerical time oscillation

$$(J \cdot HZ)_{i,j,k+1/2} \approx \frac{1}{2} (JU)_{i+1/2,j,k+1/2} (w_{i+1,j,k+1/2} - w_{i-1,j,k+1/2}) \quad (5.3)$$

CONDITION ① $h_{i-1} > h_i > h_{i+1}$

$$w_{i-1,j,k+1/2} > w_{i,j,k+1/2} > w_{i+1,j,k+1/2}, \quad w_{i-1,j,k+1/2} = w_{i+1,j,k+1/2} \quad (5.4)$$

SCHEME 2L (Applying Linear Interpolation to physical velocity component) $(J \cdot HZ) > 0$: strong space oscillation (wiggle)

$$(J \cdot HZ)_{i,j,k+1/2} \approx (JU)_{i+1/2,j,k+1/2} \frac{h_i(h_{i+1}-h_{i-1})}{(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1})} (w_{i,j,k+1/2} - w_{i-1,j,k+1/2}) > 0 \quad (5.5)$$

SCHEME 2V (Applying Volume Flux Average to physical velocity component) $(J \cdot HZ) < 0$: very weak space oscillation (wiggle)

$$(J \cdot HZ)_{i,j,k+1/2} \approx (JU)_{i+1/2,j,k+1/2} \frac{-h_i(h_{i+1}-h_{i-1})}{(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1})} (w_{i,j,k+1/2} - w_{i-1,j,k+1/2}) < 0 \quad (5.6)$$

CONDITION ② $h_{i-1} > h_i < h_{i+1}, h_{i-1} = h_{i+1}$

SCHEME 2L (Applying Linear Interpolation to physical velocity component) $h_i / (h_{i-1} + h_{i+1}) < 1/2$: no numerical time oscillation (see eq. (5.3))

$$(J \cdot HZ)_{i,j,k+1/2} \approx \frac{h_i}{(h_i + h_{i+1})} (JU)_{i+1/2,j,k+1/2} (w_{i+1,j,k+1/2} - w_{i-1,j,k+1/2}) \quad (5.8)$$

SCHEME 2V (Applying Volume Flux Average to physical velocity component) $h_{i+1} / (h_i + h_{i+1}) > 1/2$: strong numerical time oscillation (see eq. (5.3))

$$(J \cdot HZ)_{i,j,k+1/2} \approx \frac{h_{i+1}}{(h_i + h_{i+1})} (JU)_{i+1/2,j,k+1/2} (w_{i+1,j,k+1/2} - w_{i-1,j,k+1/2}) \quad (5.9)$$

Table 6 Comparison of Schemes

Scheme	1	2V	2L	2S
Physical velocity at CVU surface (i, j, k)	LI	LI=SA	LI=SA	LI=SA
Physical velocity at CVU surface ($i+1/2, j-1/2, k$), etc.	LI=VFA=SA	VFA	LI	SA
Transformation relations between (U, V, W) and (u, v, w)	○	○	×	×
Numerical space oscillation	○	○	×	○
Numerical time oscillation	○	×	○	○

LI: Linear Interpolation, VFA: Volume Flux Average, SA: Simple Average

と 2L の特徴をまとめると表-6 のようになる。

6.2 スキーム 1 とスキーム 2S における振動の抑制機構

CVP1 の定義に基づくスキーム 1 では、流量 $(JW)_{i,j,k+1/2}$ の CVU の界面 $(i\pm 1/2, j, k+1/2)$ (図-5 の□)等は、流量定義点間の中点であり、物理速度は流量平均=単純平均=線形補間が成立して、2次精度補間されて

Table 7 Calculation Conditions

Time integration method : Runge-Kutta method with fourth order accuracy
 Time increment : $\Delta t = 0.02$
 Time averaging steps : 34000 after warming up steps of 34000,
 Space discretization method : Central difference scheme
 Region of numerical simulation : $17.2H_b(x) \times 9.40H_b(y) \times 5.14H_b(z)$
 Grid discretization : $76(x) \times 51(y) \times 34(z) = 131784$
 SGS model : The standard Smagorinsky model ($C_s = 0.12$ with Van Driest type wall damping function)¹⁾
 Reynolds number : $Re = \langle U_b \rangle H_b / \nu = 8.4 \times 10^4$
 Boundary condition

: Linear-power Law Type 2-layer Model by Werner and Wengle⁷⁾

$$u^+ = \begin{cases} u^H / u_* = z_n^+ & \text{for } z_n^+ = u_* z_n / \nu \leq 11.81 \\ u^+ = \left(u^H / u_* = A \left(z_n^+ \right)^B \right) & \text{for } z_n^+ \geq 11.81, A = 8.3, B = \frac{1}{7} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\text{Shear stress} \quad \tau_w = u_*^2 \quad (6.2)$$

*Variables in this paper are made non-dimensional by height of a cube H_b and streamwise velocity component $\langle U_b \rangle$ at height of H_b at the inflow boundary.

いる。移流項の近似式(5.3)中には、 h_i 等の不等間隔要素が現れておらず、 $w_{i,j,k+1/2}$ も含まない。先に(5.2節)述べたように、厳密式において、この界面の移流フラックスは、等間隔グリッドの中心差分の移流フラックスと同様の形式になっている(式(4.2)参照)。すなわち、前述のスキーム 2V、2L のように、振動の発生要因が移流項に含まれておらず、スキーム 1 においては、数値的な振動が拡散項によってグリッド分割に応じた強さで抑制される。CVP2 の定義によるスキーム 2S の移流項も、式(5.3)の形式で近似される。スキーム 1 と同様に、振動の発生要因が移流項に含まれていない。厳密式の移流フラックスもスキーム 1 とほぼ同じ形式を持っている(式(4.2), (4.8)参照)。よってスキーム 2S においても、数値的な振動が拡散項によって抑制される。一般に、グリッド幅の縮小(拡張)率(grid stretching ratio)が過大でなければ、スキーム 1 と 2S の移流項は近似的に等しくなる¹⁵⁾。スキーム 1、2S の特徴を表-6 に示す。

7. 立方体周辺気流による検証計算

7.1 計算概要

本章では、立方体周辺の気流数値計算に、前章で検討した各スキームを適用して、各スキームの振動抑制・発生機能を確認する。

図-6 に立方体近傍のグリッド分割を示す。図-6(b)に鉛直中央断面に関し対称な平面グリッドの半分だけを示す。立方体コーナ部のグリッド幅は立方体一辺の 0.0412 倍(約 1/24)である。主流方向を x 方向とする。立方体前方では主流(x)方向の空間刻み(Δx)が主流方向に漸減し、立方体のコーナ部上方で極小(最小)になり、立方体屋上で再び増加している。これは通常採用される空間分割である。解析領域全体は立方体の一辺を H_b として、 $17.2H_b(x) \times 9.40H_b(y) \times 5.14H_b(z)$ にとってある。 y, z 方向の計算領域の大きさは風洞実験とはほぼ対応している。

壁面境界条件は滑面として Werner と Wengle により提案された linear-power law 型の 2 層モデル⁷⁾を適用した。

上流側の解析領域左端で流入風速度境界条件を与える。本計算では、LES チャンネル流れを利用した境界層流の計算結果⁸⁾を、べき指数 1/4 に従うように調整し、これから得られた各時刻の風速分布を非定常な流入条件として与えた。下流側の解析領域右端の流出速度の境界条件は、主流方向の勾配 0 ($u_x = v_x = w_x = 0$)の条件を課した。

計算条件をまとめて表-7 に示す。表中の u^H は境界第 1 節点の接線方向速度、 h は境界面との法線方向距離である¹⁾。

数値振動を抑制した例、数値的時間振動の発生例および空間振動の発生例として、表-6 に示したスキーム 1、2V、2L をそれぞれ用いた 3 ケースの計算結果を示す。スキーム 2S による計算結果はスキーム 1 の

Fig. 6 Grid Layout around a Cube

Fig. 7 Mean surface Pressure Coefficients $\langle C_p \rangle$ (Vertical Center Section)Fig. 8 Mean surface Pressure Coefficients $\langle C_p \rangle$ (Horizontal Plane, $z=0.5$)

結果との間に有意な差が見られないので省略した。全ケースとも助走計算として、680 無次元時間の計算を行った後に、680 無次元時間の平均をとった。1 ケース当たりの計算時間は、680 無次元時間に対し、SX4-2C を使用して約 79 時間 (cpu time) である。

7.2 平均風圧係数の比較

図-7(a), (b), (c)に鉛直中央断面の平均風圧係数 $\langle C_p \rangle$ の比較を示す。立

Fig. 9 Comparison for Distributions of Mean Velocity Vectors (Vertical Center Section)

Fig. 10 Comparison of Wiggle Distributions (Vertical Center Section)

立方体前面の正圧は、スキーム 1, 2V, 2L と多少高いが、風洞実験値(図の●)とはほぼ一致している。屋上面ではスキーム 1, 2L は実験結果とはほぼ一致しているが、スキーム 2V は上流側と下流側の立方体コーナ部の負圧の絶対値が過大である。立方体背面でもスキーム 1, 2L は実験結果との一致がよいが、スキーム 2V は背面上部で負圧の絶対値が過大である。

図-8(a), (b), (c) に示す水平断面の C_p は、スキーム 2L (図-8(c)) が

Fig. 11 Comparison for Distributions of Turbulence Kinetic Energy (Vertical Center Section)

実験結果に一番近く、スキーム 1(図-8(a))では上流側立方体コーナ部の負圧の絶対値が実験結果より大きく、スキーム 2V(図-8(b))はかなり過大なコーナ部の負圧の絶対値を示す。

スキーム 1 では、平均風圧係数はほぼ実験結果と一致する計算結果が得られた。スキーム 2V に見られる鉛直、水平両断面の立方体コーナ部の負圧の過大なピークは後述の数値的な時間振動の発生位置に対応している。スキーム 2L の結果は、平均風圧係数に限っては、スキーム 1, 2V より実験結果との一致がよい。

7.3 平均風速ベクトルの比較

図-9 は鉛直中央断面の風速ベクトルの風洞実験とスキーム 1, 2V, 2L の計算結果との比較である。スキーム 1, 2L とともに、屋上面の逆流域は 0.7 と実験の 0.6 よりやや大きく、後流域の長さは 1.4 と実験の 1.1 より大である。スキーム 2V は屋上面の逆流域、後流域の長さともにスキーム 1, 2L より短く、やや実験に近い結果を示している。

図-10 は立方体屋上コーナ部の上流側に発生する wiggle(空間振動)の比較である。スキーム 1(図-10(a))では wiggle は発生しているが、さほど大きくはない。これに対し、スキーム 2V では、6.2 節で検討した通り、wiggle がかなり小さく抑制されている。スキーム 2L では広い領域に大きな wiggle が発生しており、これも 6.2 節で検討した通りである。

7.4 乱流エネルギー k の比較

図-11(a)~(d) に乱流エネルギー k の比較を示す。スキーム 1(図-11(b)),

2L(図-11(d))ともに立方体上流側前面で k が実験(図-11(a))や既往の研究⁸⁾の計算結果より少し大きい。立方体屋上面、後流部では、ほぼ実験に近い分布を示している。スキーム 2L では、図-10(c)の wiggle の発生位置に対応して $k=0.03$ 以上の領域が見られるが(図-11(d))、スキーム 1 ではこの $k=0.03$ 以上の領域は小さい(図-11(b))。

スキーム 2V では、上流側と下流側の立方体コーナ部上方の空間刻み Δx が極小になる位置で、非常に大きな乱流エネルギー k が発生している。通常、この位置で乱流となる大きな乱れが発生することは物理的に考えられず、過大な数値的時間振動が発生しているためであると判断される。紙面の都合上ここには示さないが、数値的時間振動は u' には発生しておらず、 v, w に発生している。これも 6.2 節で検討した結果と一致している。

7.5 計算結果のまとめ

スキーム 2V は数値的時間振動を発生し、スキーム 2L は数値的空間振動を発生する。スキーム 2L は自動的に時間振動を発生しないが、空間振動(wiggle)発生領域では流入風の乱れを増幅する傾向を示す。スキーム 1 では数値振動が抑制され、風洞実験とよく一致する結果が得られた。

8. 結論

一般曲線座標系スタガードグリッドシステムにおける数値補間法および圧力のコントロールボリュームの定義方法の検討を行い、新しい移流スキームを提示した。本離散化法による計算結果は風洞実験の結果とよく一致することを示した。

新しく検討した点は次の通りである。

- ①一般曲線座標系スタガードグリッドにおいて、圧力のコントロールボリューム(CVP)だけでなく、流量のコントロールボリューム(CVU)においても連続式を満足する補間法を示した。
- ②不等間隔スタガードグリッドにおいて、流量定義点を圧力定義点の中点と設定(CVP1)することにより、①の方法で補間された流量をヤコビアンで除した反変速度を、一般曲線座標系から物理座標系へ逆変換して得られる物理速度は、物理座標系上の物理的距離に対する線形補間値と自動的に高精度で一致する(スキーム 1)ことを指摘した。更にこのスキームに基づけば、過大な数値振動の発生は避けられることを示した。
- ③不等間隔スタガードグリッドにおいて、圧力定義点を CVP の中心に設定(CVP2)した場合の数値振動の発生原因を明らかにした。

記号

f	: 変数 f に $grid_filter$ を施した値。通常の標記では f とするが、諸表の式が大量かつ複雑であるため簡便な標記とした。
$\langle f \rangle$	: $grid_filter$ を施した変数 f の時間平均
f'	: 時間平均からのずれ ($= f - \langle f \rangle$)
t	: 時間
x, y, z	: 物理座標
ξ, η, ζ	: 計算座標、 $\xi=i, \eta=j, \zeta=k$
u, v, w	: x, y, z 方向の物理速度ベクトルの各成分
U, V, W	: 物理速度ベクトル(u, v, w)の反変速度ベクトルの各成分
p	: 静圧を密度で割った値 (圧力と略記)
ν	: 分子動粘性係数
H_b	: 立方体の一辺の長さ

注

- 1) 前報¹⁾では、CVP2 の定義に基づき、例えば、

$$W_{i+\frac{1}{2},j,k} = \left\{ (JW)_{i,j,k+\frac{1}{2}} + (JW)_{i,j,k-\frac{1}{2}} + (JW)_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} + (JW)_{i+1,j,k-\frac{1}{2}} \right\} / \left\{ 2(J_{i,j,k} + J_{i+1,j,k}) \right\} \quad (\text{補-1})$$

のように補間していた。前報¹⁾のスキームは 5.2 節で述べるスキーム 2V と同一である。スキーム 2V は、表-2、3 で、 $\eta_{i,j,k}^{\pm \xi}$ 等の面積比を全て 0.5 とすれば得られる。式(補-1)は表-2 の式(2.3)、(2.5)に面積比 0.5 を代入して得られる。

- 2) 前報¹⁾では、チャンネル流れの計算のみを行っており、 x -方向、 y -方向は等間隔で、 z -方向だけが不等間隔であった。 z -方向の平均流速は 0 であり、流れ全体が単純であったことも手伝い、CVP2 の定義に基づく不適切な補間方法の影響が顕著には現れなかった。今回、立方体周りの複雑な流れ場に対し、3 方向の不等間隔刻みを適用した計算を実施したことにより、CVP2 の定義に基づく補間法は不等間隔グリッドでは不適切であることが分かった。本報では CVP1 の定義を採用することにより、不等間隔刻みに対しても問題のない補間方法が得られることを示す。
- 3) 式(1.1)にその各成分を示す反変速度ベクトル(U, V, W)は、直交座標系(x, y, z)における運動方程式(1.4)を一般曲線座標系(ξ, η, ζ)に変換する際に数学的に導出されるベクトルであり、例えば反変速度成分 U は ξ —一定曲面の法線ベクトル (ξ_x, ξ_y, ξ_z) に対する物理速度ベクトル(u, v, w)の射影 (ベクトル (ξ_x, ξ_y, ξ_z) とベクトル(u, v, w)の内積)である。ヤコビアンと反変速度成分の積(JU)等は、 ξ —一定曲面を通過する流量を表す¹⁾。詳細な導出方法、並びに数学的定義は文献¹⁰⁾参照。
- 4) (JU)は ξ —一定の曲面をその法線方向に通過する流量である。(JU)、(JV)、(JW)は流量ベクトル(JU)、(JV)、(JW)の各成分と定義できる。前報¹⁾では反変速度成分の運動方程式、定義点、およびコントロールボリュームと定義していたが、数式上および計算上、(JU)等のようにヤコビアンと反変速度成分の積が常に一体となって現れ、また物理的意味合いも分かりやすいので、本報では流量成分の運動方程式、流量定義点、および流量のコントロールボリュームと定義する。
- 5) 同様に、界面($i, j+\frac{1}{2}, k$)において、 $\eta_{i,j+\frac{1}{2},k}^{\pm \xi}$ 、 $\eta_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\pm \xi}$ を定義する。CVP の ξ —一定の界面($i, j, k \pm \frac{1}{2}$)においても $\xi_{i,j,k \pm \frac{1}{2}}^{\pm \xi}$ 、 $\xi_{i,j,k \pm \frac{1}{2}}^{\pm \xi}$ を界面および左右各部分の面積として定義する。面積の正確な計算方法は文献⁹⁾参照。
- 6) グリッドが直交直線座標系である場合は、(JU) $_{i,j,k}$ 、(JV) $_{i,j,k}$ 、(JW) $_{i,j,k}$ の計算は簡便な式(5)等であり。面積比 $\eta_{i,j \pm \frac{1}{2},k}^{\pm \xi}$ 等も式(4)のように長さの比で計算すればよい。
- 7) 既往の研究では、圧力定義点は CVP の中心にある(CVP2 の定義)としながら、界面(図-3 の○)は圧力定義点(図-3 の◎)間の中点である(CVP1 の定義)として速度の補間が行われる例^{5), 15)}が見られた。従来、この点があいまいにされていたのであるが、今回の研究では、CVP の形状を明確に定義するものである。
- 8) グリッドが直交直線座標系でない場合は、界面を圧力定義点の中点にとっても、流量平均の補間法と線形補間とは必ずしも一致しないが、よほど非直交性の強いグリッドでない限り、流量平均と線形補間のずれは小さいと考えてよいと思われる。
- 9) 式(3.4)、(3.5)の右辺は界面々積で積分された量であるから、移流フラックスの計算においては、 $u_{i+1/2,j,k-1/2}$ は点($i+1/2, j, k-1/2$)の物理速度そのものではなく、界面全体を代表する平均的な速度と解釈している。ここでは、物理速度成分に対し流量平均の考え方を優先した。
- 10) スキーム 2L は既報⁶⁾のスキーム 2 と同じものである。
- 11) スキーム 2S は直交直線座標系では運動エネルギーを保存し、文献⁵⁾の運動エネルギー保存型のスキーム 2 と一致する。また、スキーム 2S の離散式のまま CVP1 の定義を適用しても運動エネルギーを保存する。この場合は、物理速度は CVU の界面($i \pm 1/2, j-1/2, k$) (図-3 等の□)では 2 次精度補間、界面(i, j, k) (図-3 等の○)では一次精度補間になる。なお、流量成分(JU)等が CVU で連続式を満足し、CVU の各界面の物理速度が両端の定義値の単純平均になっていれば、CVP の定義方法や補間精度によらず移流項はその方向の運動エネルギーを保存するスキームになる。
- 12) ここで、速度成分の時間平均値が、一本の格子線上に並ぶ速度定義点上で交互に大小(または正負)の値をとる状況 (図-5 参照) を空間振動と呼称する。物理的に正しい空間振動は存在しないと考えてよい。また、ある位置における速度成分が時間的に変動する状況を時間振動と呼ぶ。数値解析特有の時間振動を数値的時間振動と呼称する。数値的時間振動が微少な場合は、その発生の有無を判断することは大変困難であり、乱流エネルギーの分布等が実験結果に対し、実用上必要な範囲で一致していればよしとするのが通例である。後述の計算例のスキーム 2V のように、実験結果と比較して明らかに異なる時間振動は、数値的時間振動が発生していると判断できる。
- 13) 本計算法では、CVP1 と CVP2 のどちらの定義においても、圧力定義点と一致する CVU の界面(i, j, k) (図-5 等の○)では、流量成分(JW)等、物理速度とともに線形補間が成立する。界面(i, j, k)が隣接の定義点の中点でなくとも、圧力定義点と一致しない界面(図-5 等の□)とは違い、線形補間によって問題は生じない。例えば隣接の定義点の流量成分(JW) $_{i,j,k \pm 1/2}$ は連続式で結合されているので、(i, j, k)点をはさむ(JW) $_{i,j,k \pm 1/2}$ の間では空間

振動が抑制されているからである。

- 14) もちろん、CVP の定義が異なるから、厳密には同一な式ではなく、表示が一致するだけである。但し、近似的には移流項の値は等しい¹⁵⁾。

- 15) CVP1 と CVP2 のグリッドの差異は、圧力定義点の座標を一致させれば、CVP の界面の座標のわずかな違いだけである。図-5 に示す CVP の主流方向の長さを、CVP1 の定義に対して H_i 、CVP2 の定義に対して h_i と表記し、グリッドの縮小率 $s = h_i / h_{i-1} = h_{i+1} / h_i = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) を一定、 x -座標を $x_i = x_{i-1} + (h_{i-1} + h_i) / 2$, $x_{i+1} = x_i + (h_i + h_{i+1}) / 2$ として、両者の比をとると、

$$\frac{H_i}{h_i} = \frac{\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i) - \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})}{h_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{h_{i-1}}{h_i} + \frac{h_{i+1}}{h_i} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} + s \right) \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} + 1 - \varepsilon \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2) + 1 - \varepsilon) = 1 + \frac{1}{4} O(\varepsilon^2) \quad (\text{補-2})$$

となり、ほとんど同じ長さに見えしう。従って、CVU の大きさも高い近似度で等しくなる。結果として両者の移流項も近似的に等しくなる。CVP1 と CVP2 の定義方法の差違が問題になるのは、CVP のわずかな界面座標の違いが、表-5 に示すように、補間方法の選択によって移流項の符号を逆転させたり、あるいはグリッド幅の比 $h_i / (h_i + h_{i+1})$ によって移流項の大きさを変えるからである。CVP2 の定義に基づいていても、界面の物理速度を単純補間すればあまり問題は生じないと考えられる。スキーム 2S は CVP2 の定義を採用しているが、実質的には CVP1 の定義に基づくスキームとなっている。

参考文献

- [1] 石田義洋, 村上周三, 大岡龍三, 持田灯, 工藤邦昭: 一般曲線座標系・スタガードグリッドによる気流解析法 その1——数値解法の定式化と LES によるチャンネル流解析——, 日本建築学会計画系論文集 第 496 号, pp. 45-52, 1997 年 6 月

- [2] バタンカー, S. V., 水谷幸夫, 香月正司訳: コンピュータによる熱移動と流れの解析, p.p. 72~75, p.p. 122~123, 森北出版 (株)
- [3] 鈴木哲也, 河村洋: 乱流の直接数値シミュレーションにおける差分式の整合性, 日本機学会論文集 (B 編) 60 巻 578 号, p.p. 58~64, 1994 年 10 月
- [4] 梶島岳夫: 高次中心差分法による壁乱流の直接シミュレーション, 第 8 回数値流体シンポジウム講演論文集, p.p. 301~304, 1994 年 12 月
- [5] 野村, 松尾, 加藤: 数値解析手法を用いる室内空気分布予測法に関する研究 その 1——MAC 法の空間差分間隔に関する考察——, 日本建築学会計画系論文報告集, 第 292 号, pp. 61-72, 昭和 55 年 6 月
- [6] 石田義洋, 村上周三, 大岡龍三, 持田灯: 一般曲線座標系・スタガードグリッドによる気流解析法その 3——立方体周辺気流 LES 解析における数値振動抑制のための補間法——, 日本建築学会学術講演梗概集(九州), 1998 年 9 月
- [7] Werner, H. and Wengle, H.: Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow over and around a Cube in a Plate Channel, Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows, pp. 155~158, Munich (1991)
- [8] 大岡龍三, 持田灯, 村上周三: ASM による立方体周辺の非等方乱流場の数値解析——風洞実験および LES, DSM との比較による ASM の精度・問題点の検討——, 日本建築学会計画系論文集, 第 495 号, pp. 61-68, 1997 年 5 月
- [9] 藤井孝蔵: 流体力学の数値計算法, p.p. 160~169, 東京大学出版会
- [10] 村上周三, 加藤信介, 石田義洋: 一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その 3—— $k-\varepsilon$ モデルと境界条件式および圧力方程式の 3 次元一般曲線座標系への変換——, 日本建築学会計画系論文報告集 第 400 号, p.p. 1~11, 1989 年 9 月

(1998 年 9 月 24 日原稿受理, 1999 年 2 月 25 日採用決定)