回転対称な起・終点分布の下での放射・環状距離分布

—Crofton の微分方程式の円盤への新しい応用例—

DISTRIBUTION OF CIRCULAR-RADIAL DISTANCE ASSOCIATED WITH
CIRCULAR-RADIAL POINT DISTRIBUTIONS

—A new application of Crofton's differential equation to circular disk—

栗田 治*

Osamu KURITA

This study is concerned with the distance distribution associated with a circular disk on which the origin and destination points are distributed radially symmetrically and mutually independently. Crofton's differential equation is generalized for the case of circular disk and is applied to the derivation of the distance distribution. In this paper, circular-radial distance distributions are calculated explicitly for two types of point-distribution: (1) linear distribution and (2) exponential distribution. These are the first cases to achieve the explicit derivation of distance distribution for non-uniform point-distributions. Our results are so easy to handle that they will be applied to many fundamental macro-scope models on the efficiency of urban population and facility-location-design.

Keywords: Crofton's differential equation, circular-disk city, circular-radial distance distribution

クロフトンの微分方程式, 円盤都市, 放射・環状距離の分布

1. はじめに

都市内の移動エネルギー消費は(1)都市形状, (2)交通網パターン, (3)トリップパターン, の三者に左右される。その様子を記述する移動距離分布(どの程度の移動距離がどの程度出現するかを数学的に表現したもの)を導くことができれば, (a)都市設計の在り方や(b)将来に向けて予測される人口(や事業所)分布の変化に応じて, 移動エネルギーの消費水準を見積もるための基礎とすることができる。しかも, この距離分布を重力モデルと組み合わせ, 距離によるトリップ頻度の減衰を伴うモデルにも解析学的に接近できるのである[9]。ところが, これまでの研究でその理論的な導出に成功した例は

1. 円盤領域で一様な起・終点間の直線距離の分布[4], 直交距離ならびに放射・環状距離の分布[8]

2. 矩形領域で一様な起・終点間の直線距離と直交距離の分布[6]に止まっている。特に現実の大都市における起・終点の偏在(密度が都心部で高く周辺部で低い状況)をモデルに取り込めていない点に大きな限界があった。本研究はこの限界の克服を目指し, 三つの想定

- (1) 都市形状が円盤である
- (2) 稠密なる放射・環状道路パターンが存在する
- (3) 回転対称な分布に従う2点間でトリップが発生する

の下で, 移動距離の分布への理論的接近を試みる。適用した数学的手

法はCroftonの微分方程式[1,3,4,5,11]である。本研究はCroftonの微分方程式を(a)点の分布が与えられた空間(今回の場合は円盤領域)で一様でない場合に明示的に適用した, (b)移動の起・終点が互いに異なる分布に従う場合へと拡張した, という二点で新規性を有する。

上記(3)の回転対称な点分布の具体例として, 線形とClark型の人口分布を取り上げ, 放射・環状距離分布を陽に導いた。一様でない起・終点分布に対して距離分布を陽に導いたのは初めてのことと思われる。都市モデルを作成するとき, 回転対称なアクティビティー分布を想定する場合が多い。そうしたモデル作りの局面で, 本研究が提供する操作性の良い距離分布が大いに役立つものと期待される。

2. 起・終点が円盤内の同一分布に従うときの距離分布に関する
Croftonの微分方程式

半径 α の円盤領域 A 内で, 移動の起点と終点が独立に同一分布に従って出現するものとする(起点と終点が互いに異なる分布に従う場合の取り扱い作法については7章と8章で述べる)。このとき起・終点間距離 S の確率密度関数を, 便宜上 $f(s, \alpha)$ と表わす。本章, 3章ならびに7章では, S は如何なる距離でもよい。以下に, その半径 α による微係数 $\frac{d}{d\alpha}f(s, \alpha)$ を明示したい。これはCroftonの微分方程式[1,3,4,5,11]の1つの特殊例である。その目的は, この微分方程式の解

* 慶應義塾大学理工学部管理工学科 教授・学博

Prof., Dept. of Administration Engineering, Faculty of Science and Technology, Keio University, Ph. D.

を求めることにより、距離 S の分布を見通し良く導出することにある。

そのために、まず半径の増分 $\Delta\alpha$ を設け、半径 $\alpha + \Delta\alpha$ の円盤 C 上に分布する2点間の距離の確率密度函数 $f(s, \alpha + \Delta\alpha)$ に着目する(文献[10]の第9章で述べられた手法)。そして図1-(a)のように、半径 α の円盤領域を A 、外側の微小リング領域を B と呼ぶ。即ち $C = A \cup B$ である。そして、円盤領域 A 内の起点(そして終点)の測度(点の密度を A 上で積分したもの)を V とする。同様に、リング領域 B 内の起点(そして終点)の測度は ΔV で表わしておく。

図1 半径 α の円盤領域 A と半径の増分 $\Delta\alpha$ によって出来る微小リング領域 B (全体の円盤領域は $C = A \cup B$ であり、その測度は $V + \Delta V$)。

ここで、円盤領域 C 上の2点間の移動が、(1) $A \rightarrow A$ の内外移動、(2) $A \rightarrow B$ と $B \rightarrow A$ の移動、(3) $B \rightarrow B$ の内外移動、という三者に直和分解されることに着目する(図1-(b))。それぞれの測度(起点・終点ペアの量)は(1) V^2 、(2) $2V\Delta V$ 、(3) $(\Delta V)^2$ である(表1の第2列)。これを全体の測度(円盤 C 上の起・終点ペアの総量) $(V + \Delta V)^2$ で除せば、3種類の移動が全測度に占める割合が求められる(表1の第3列)。

表1 C^2 の(1) A^2 、(2) $(A \times B) \cup (B \times A)$ 、(3) B^2 への直和分解と、対応する S の確率密度函数。

起・終点 ペアの種類	ペアの 量(測度)	全測度に 占める割合	S の 確率密度函数
(1)	V^2	$\frac{V^2}{(V + \Delta V)^2}$	$f(s, \alpha)$
(2)	$2V\Delta V$	$\frac{2V\Delta V}{(V + \Delta V)^2}$	$g(s, \alpha, \Delta\alpha)$
(3)	$(\Delta V)^2$	$\frac{(\Delta V)^2}{(V + \Delta V)^2}$	$h(s, \alpha, \Delta\alpha)$
(全体)	$(V + \Delta V)^2$	1	$f(s, \alpha + \Delta\alpha)$

ここで、幅 $\Delta\alpha$ のリング B 内の点と、半径 α の円盤 A 内の点の間の距離の確率密度函数を $g(s, \alpha, \Delta\alpha)$ と定義する。加えて、リング B 上に分布する2点間の距離の確率密度函数を $h(s, \alpha, \Delta\alpha)$ と定義する(表1の第4列)そして、 $f(s, \alpha + \Delta\alpha)$ を $f(s, \alpha)$ 、 $g(s, \alpha, \Delta\alpha)$ ならびに $h(s, \alpha, \Delta\alpha)$ の加重和で表現してみよう。そのためには直和分解された起・終点ペア集合に対応する確率密度函数に、前出の、全測度に占める割合を乗じて足せばよいだけである。

$$f(s, \alpha + \Delta\alpha) = \frac{V^2}{(V + \Delta V)^2} f(s, \alpha) + \frac{2V\Delta V}{(V + \Delta V)^2} g(s, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta V)^2}{(V + \Delta V)^2} h(s, \alpha, \Delta\alpha) \quad (1)$$

上式の両辺に $(V + \Delta V)^2$ を乗じた上で変形すると次式を得る。

$$f(s, \alpha + \Delta\alpha) - f(s, \alpha) = -\frac{2V\Delta V + (\Delta V)^2}{V^2} f(s, \alpha + \Delta\alpha) + \frac{2\Delta V}{V} g(s, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta V)^2}{V^2} h(s, \alpha, \Delta\alpha) \quad (2)$$

この両辺を $\Delta\alpha$ で除し、右辺の係数を $-K$ 、 L 、 M とおく。

$$\frac{f(s, \alpha + \Delta\alpha) - f(s, \alpha)}{\Delta\alpha} = -\frac{2V\Delta V + (\Delta V)^2}{V^2\Delta\alpha} f(s, \alpha + \Delta\alpha) + \frac{2\Delta V}{V\Delta\alpha} g(s, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta V)^2}{V^2\Delta\alpha} h(s, \alpha, \Delta\alpha) = -Kf(s, \alpha + \Delta V) + Lg(s, \alpha, \Delta\alpha) + Mh(s, \alpha, \Delta\alpha) \quad (3)$$

ここで $\Delta\alpha \rightarrow 0$ なる極限操作を施そう。ただし

$$\frac{dV}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\alpha} \quad (4)$$

という具合に、 V の微係数の存在を仮定しておく。当然、 $\Delta V/V^2 \rightarrow 0$ だから、以下が成立する。

$$K = \frac{2}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta\alpha} - \frac{\Delta V}{V^2} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta\alpha} \rightarrow \frac{2}{V} \cdot \frac{dV}{d\alpha} \quad (5)$$

$$L = \frac{2}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta\alpha} \rightarrow \frac{2}{V} \cdot \frac{dV}{d\alpha} \quad (6)$$

$$M = \frac{\Delta V}{V^2} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta\alpha} \rightarrow 0 \quad (7)$$

極限では $\Delta\alpha = 0$ であるから、 $g(s, \alpha, 0)$ は「半径 α の円周上に分布する点と、円盤上に分布する点の間の距離 S の確率密度函数」を意味することが分かる。そして、もはや $\Delta\alpha$ は登場しないので、これを簡単に $g(s, \alpha)$ と記すことにしよう。こうして次式を得る。

$$\frac{df(s, \alpha)}{d\alpha} = \frac{2}{V} \cdot \frac{dV}{d\alpha} \left\{ g(s, \alpha) - f(s, \alpha) \right\} \quad (8)$$

上式の $d\alpha$ を消して V に関する微分方程式として書き直すと

$$\frac{df}{dV} = \frac{2}{V} (g - f) \quad (9)$$

となる。(9)式はCroftonの微分方程式の一般形[1,3,4,5,11]に他ならない。つまり(8)式はその特殊例なのである。ただし、円盤を対象にして導出過程を明示したので、その分だけ理解し易くなっている。

3. 回転対称な起・終点分布の下での特論

前出の円盤の中心点 O から直線距離 x の地点における起点(そして終点)の密度を、原点 O からの向きに依らず次式で表す。

$$\rho = \rho(x) \quad (0 \leq x \leq \alpha) \quad (10)$$

即ち図2に示すが如くに回転対称な点分布を想定する。

図2 回転対称な人口分布の下での半径 α の増分 $\Delta\alpha$ 。

図2には2章の図1に倣い、半径の増分 $\Delta\alpha$ の様子を示している。半径 α の円盤内の点の測度 V は次式の通りに定式化される。

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=0}^{\alpha} \rho(x)x \, dx \, d\theta = 2\pi \int_0^{\alpha} \rho(x)x \, dx \quad (11)$$

したがって、その α による微係数は次式で与えられる。

$$\frac{dV}{d\alpha} = 2\pi\alpha\rho(\alpha) \quad (12)$$

(11)と(12)を(8)に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{df(s, \alpha)}{d\alpha} &= \frac{2\alpha\rho(\alpha)}{\int_0^{\alpha} \rho(x)x \, dx} \left\{ g(s, \alpha) - f(s, \alpha) \right\} \\ &= L^* \left\{ g(s, \alpha) - f(s, \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

即ち

$$L^* = \frac{2\alpha\rho(\alpha)}{\int_0^{\alpha} \rho(x)x \, dx} \quad (14)$$

ならびに、円周上の点から円盤上の点への距離の確率密度函数 $g(s, \alpha)$ を準備すれば、求める円盤内の距離の確率密度函数 $f(s, \alpha)$ の α に関する一階線形微分方程式が導出されるのである。

4. 円周上の固定点からの放射・環状距離分布

この論文では、円盤都市内に原点 O を中心とする、限りなく稠密な放射・環状道路が存在するものと想定する。いま円盤の中心を原点とする極座標系で

$$\begin{aligned} P_1 &= (X_1, \Theta_1), \quad P_2 = (X_2, \Theta_2) \\ (0 \leq X_1, X_2 \leq \alpha; \quad 0 \leq \Theta_1, \Theta_2 < 2\pi) \end{aligned} \quad (15)$$

とし、2点の角差 Θ を

$$\Omega = \min\{|\Theta_1 - \Theta_2|, 2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2|\} \quad (16)$$

とすると、 P_1 から P_2 への放射・環状距離 S とおくは

$$S = \begin{cases} \min\{X_1, X_2\}\Omega + |X_1 - X_2| & (0 \leq \Omega < 2) \\ X_1 + X_2 & (2 \leq \Omega < \pi) \end{cases} \quad (17)$$

と場合分けして表される(順に図3のRoute 1ならびにRoute 2)。

図3 放射・環状交通網における最短経路。

図4 周上の点からの距離の等高線。

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のときの等高線

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のときの等高線

図5 $P = (\alpha, 0)$ からの放射・環状距離 S の等高線の2つの形状。

なお、東京の皇居を中心点とする30km圏域に対して、直線距離、放射・環状距離、直交距離の三者と道路上の最短距離を比較した研究がある[7,12]。これによると、主要道路(国道・都道府県道・地方道)上の最短距離を最も良く再現するのは放射・環状距離であることが判明している。5km間隔の正方格子点に移動の起・終点を設けた場合で、(道路距離) = $c \times$ (放射・環状距離)の定数 c を最小二乗法で推定したところ、 $c = 1.027$ となり、決定係数は0.93であった[12]。本研究は理論的興味のみならず、こうした経験的成果を背景として、放射・環状距離に注目しているのである。

さて、いま移動の一方の端点を周上の点 $P = (\alpha, 0)$ に固定し、もう一方の端点が円盤上の回転対称な分布(前出の $\rho = \rho(x)$ で記述される)に従って出現するものとしよう。このとき、まず放射・環状距離 S の累積分布函数を導出したい。そのためには、点 P からの放射・環状距離が $S = s$ の等高線に基づいて、等高線内部の移動端点の測度を計算し、それを全体の測度(前出(11)式の円盤全体での移動端点の積分値 V)で除せばよい。

この等高線は図4に示す通りであるが、その成り立ちは図5の様に(i) $0 \leq s \leq \alpha$ と(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ という2つの場合に分けて記述される。図5の太線ならびにその内部の領域が“周上の点 P から距離 s 以内で到達できる端点の集合”という次第である。同図には、円盤内の端点を (x, θ) ($0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq \theta < 2\pi$)と表現するときの、距離 s の等高線を意味する函数が付記されている。ここで、回転対称な点の分布を太線内部で積分すれば、求める S の累積分布函数(これを $G(s)$ と呼ぶ)が与えられる。点の密度が回転対称なことから、(直交座標から極座標への変数変換のヤコビアン x を考慮して)角度に関する積

分→原点からの距離に関する積分, の順に累次積分を実行すればよい。ただし, 密度の回転対称性により, 円盤の上半分の部分に関する積分を2倍すればこと足りる。これを, 各場合に対応して具体的に言うところの通りである。

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$G(s) = \frac{2}{V} \int_{\alpha-s}^{\alpha} (s - \alpha + x) \rho(x) dx \quad (18)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$G(s) = \frac{2}{V} \left\{ \pi \int_0^{s-\alpha} \rho(x) dx + \int_{s-\alpha}^{\alpha} (s - \alpha + x) \rho(x) dx \right\} \quad (19)$$

上式を s で微分すれば, 求める周上の端点からの放射・環状距離の確率密度関数が導出される。

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$g(s) = \frac{2}{V} \int_{\alpha-s}^{\alpha} \rho(x) dx \quad (20)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$g(s) = \frac{2}{V} \left\{ (\pi - 2)(s - \alpha) \rho(s - \alpha) + \int_{s-\alpha}^{\alpha} \rho(x) dx \right\} \quad (21)$$

5. 線形の起・終点分布

円盤内の起・終点分布を線形で与える。

$$\rho(x) = a + bx \quad (0 \leq x \leq \alpha) \quad (22)$$

ただし, $a \geq 0$ かつ $a + b\alpha \geq 0$ (即ち密度は区間 $[0, \alpha]$ で非負) で, a と b がともにゼロであることはないものと約束しておく。(22) は (a, b, α) の値により, 図6の5通りの起・終点分布形状を提供する。

まず(14)によって係数 L^* を求めると, 次式の通りである。

$$L^* = \frac{12(a + b\alpha)}{\alpha(3a + 2b\alpha)} \quad (23)$$

続いて(20)式, (21)式によって, 円周上の端点からの放射・環状距離の確率密度関数を求めると, 次の通りである。

図6 線形の起・終点分布の5つの類型。

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$g(s, \alpha) = \frac{3s(2a - bs + 2b\alpha)}{\pi\alpha^2(3a + 2b\alpha)} \quad (24)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$g(s, \alpha) = \frac{1}{\pi\alpha^2(3a + 2b\alpha)} \left[3bs^2(2\pi - 5) + 6 \left\{ a(\pi - 3) + b\alpha(5 - 2\pi) \right\} s + 6\alpha \left\{ a(4 - \pi) + b\alpha(\pi - 2) \right\} \right] \quad (25)$$

(23) の係数を Crofton の微分方程式(13)に代入し, 周上からの距離の密度が(24)の場合と(25)の場合とで, それぞれ微分方程式を解いた。そして夫々の一般解を便宜上 f_1 ならびに f_2 として記すと, 次式の通りである (C_1 ならびに C_2 は未知の定数)。

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$f_1(s, \alpha) = \frac{1}{\pi\alpha^4(3a + 2b\alpha)^2} \left[-6b\alpha^2(3a + 2b\alpha)s^2 + 6\alpha^2(6a^2 + 8ab\alpha + 3b^2\alpha^2)s + \pi C_1 \right] \quad (26)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$f_2(s, \alpha) = \frac{1}{5\pi\alpha^4(3a + 2b\alpha)^2} \left[30b\alpha^2(2\pi - 5)(3a + 2b\alpha)s^2 + 30\alpha^2 \left\{ 6a^2(\pi - 3) - 4ab\alpha(\pi - 2) + 3b^2\alpha^2(5 - 2\pi) \right\} s + 12\alpha^3 \left\{ 10a^2(\pi - 4) + 15ab\alpha + 6b^2\alpha^2(\pi - 2) \right\} + 5\pi C_2 \right] \quad (27)$$

あとは未知の定数を境界条件によって同定すればよい。

α による微分方程式を解いたのだから, C_1, C_2 は α (だけ) は含まない (当然 s, a, b は含むべし)。まず $s = 2\alpha$ のとき $f = 0$ だから, 境界条件として, $\alpha = \frac{s}{2}$ のとき $f = 0$ が適用できる。

$$f_2(s, \frac{s}{2}) = 0 \quad (28)$$

(28) を C_2 に関して解くことにより, (27) の未知定数が確定される。

$$C_2 = -\frac{3s^3 \{ (16\pi - 37)b^2s^2 + 10(8\pi - 19)abs + 40(2\pi - 5)a^2 \}}{40\pi} \quad (29)$$

さらに S の確率密度関数 f は $s = \alpha$ において連続であるべきだから

$$f_1(\alpha, \alpha) = f_2(\alpha, \alpha) \quad (30)$$

を想定する。(30) の右辺に含まれる C_2 に(29)を代入した上で, C_1 について解けば次式を得る。

$$C_1 = \frac{3s^3 \{ (16\pi - 27)b^2s^2 + 10(8\pi - 29)abs + 40(2\pi - 11)a^2 \}}{40\pi} \quad (31)$$

(31) の C_1 を(26)に, (29) の C_2 を(27)に代入・整理すれば, 求める確率密度関数が得られる。もはやこの密度が α の関数であることを明示する必要はないので, $f(s, \alpha)$ ではなく単に $f(s)$ として記述する。

【円盤上の線形起・終点分布に対する放射・環状距離 S の確率密度函数】(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$f(s) = \frac{1}{40\pi\alpha^4(3a+2b\alpha)^2} \left[3(16\pi-27)b^2s^5 + 30(8\pi-29)abs^4 + 120(2\pi-11)a^2s^3 + 240(3a+2b\alpha)b\alpha^2s^2 + 240\alpha^2(6a^2+8ab\alpha+3b^2\alpha^2)s \right] \quad (32)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$f(s) = \frac{1}{5\pi\alpha^4(3a+2b\alpha)^2} \left[-\frac{3(16\pi-37)b^2}{8}s^5 - \frac{15(8\pi-19)ab}{4}s^4 - 15(2\pi-5)a^2s^3 + 30(2\pi-5)(3a+2b\alpha)b\alpha^2s^2 + 30\alpha^2 \left\{ 6(\pi-3)a^2 - 4(\pi-2)ab\alpha + 3(5-2\pi)b^2\alpha^2 \right\} s + 12\alpha^3 \left\{ 10(4-\pi)a^2 + 15ab\alpha + 6(\pi-2)b^2\alpha^2 \right\} \right] \quad (33)$$

これに基づいて, S の平均値と2乗の平均値を求めておく.

$$\langle S \rangle = \frac{\alpha^2 \{ 84(5\pi-4)a^2 + 35(17\pi-14)ab\alpha + 30(7\pi-6)b^2\alpha^2 \}}{35\pi(3a+2b\alpha)^2} \quad (34)$$

$$\langle S^2 \rangle = \frac{\alpha}{70\pi(3a+2b\alpha)^2} \left[70(17\pi-20)a^2 + 12(147\pi-176)ab\alpha + 21(31\pi-38)b^2\alpha^2 \right] \quad (35)$$

三つの典型的な線形分布に対する概形を図7に示す. 特に, 茶筒型 ($a > 0$ かつ $b = 0$) 即ち円盤上の一様な点分布に対する密度函数は(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$f_{\text{茶筒}}(s) = \frac{-(11-2\pi)s^3 + 12\alpha^2s}{3\pi\alpha^4} \quad (36)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$f_{\text{茶筒}}(s) = \frac{-(2\pi-5)s^3 + 12\alpha^2(\pi-3)s + 8\alpha^3(4-\pi)}{3\pi\alpha^4} \quad (37)$$

となり, 文献[8]の結果に一致する.

図7 典型的な線形分布に対する放射・環状距離 S の確率密度函数.

6. 指数型 (Clark 型) の起・終点分布

円盤内の起・終点分布を Clark 型 (指数型) で与える.

$$\rho(x) = e^{-\gamma x} \quad (38)$$

係数 γ が正 [負] のとき, 点密度は円盤中心から外延部に向けて減少 [増加] する. 例えば大都市人口密度の場合, 通常は $0 < \gamma$ である.まず, (14) によって Crofton の微分方程式の係数 L^* を求める.

$$L^* = \frac{2\gamma^2\alpha}{-1-\gamma\alpha+e^{\gamma\alpha}} \quad (39)$$

続いて (20), (21) により, 円周上端点からの距離の確率密度を求める.

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$g(s, \alpha) = \frac{\gamma(1-e^{\gamma s})}{\pi(1+\gamma\alpha-e^{\gamma\alpha})} \quad (40)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$g(s, \alpha) = \frac{\gamma[1-e^{\gamma(2\alpha-s)}\{1+\gamma(\pi-2)(s-\alpha)\}]}{\pi(1+\gamma\alpha-e^{\gamma\alpha})} \quad (41)$$

(39) の係数を Crofton の微分方程式 (13) に代入し, 周上からの距離の密度が (40) の場合と (41) の場合とで, それぞれ微分方程式を解いた. そして夫々の一般解を便宜上 f_1 ならびに f_2 として記すと, 次式の通りである (C_1 ならびに C_2 は未知の定数).(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$f_1(s, \alpha) = \frac{\gamma - \gamma e^{\gamma s} - 2\gamma^2\alpha(e^{\gamma s} - 1) + 2\pi e^{2\gamma\alpha}C_1}{2\pi(1+\gamma\alpha-e^{\gamma\alpha})^2} \quad (42)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$f_2(s, \alpha) = \frac{1}{6\pi(1+\gamma\alpha-e^{\gamma\alpha})^2} \left[3\gamma + 6\gamma^2\alpha + 2\gamma^3\alpha^2 e^{\gamma(2\alpha-s)} \left\{ 3 + (\pi-2)(3s-2\alpha)\gamma \right\} + 6\pi e^{2\gamma\alpha}C_2 \right] \quad (43)$$

ここでも未知の定数を境界条件によって同定する.

まず $s = 2\alpha$ のとき $f = 0$ だから, 境界条件として, $\alpha = \frac{s}{2}$ のとき $f = 0$ が適用できる.

$$f_2(s, \frac{s}{2}) = 0 \quad (44)$$

これを C_2 に関して解くことにより, (43) の未知定数が確定される.

$$C_2 = -\frac{\gamma e^{-\gamma s} \{ 2\gamma^3(\pi-2)s^3 + 3\gamma^2s^2 + 6\gamma s + 6 \}}{12\pi} \quad (45)$$

さらに S の確率密度函数 f は $s = \alpha$ において連続であるべきだから

$$f_1(\alpha, \alpha) = f_2(\alpha, \alpha) \quad (46)$$

を想定する. (46) の右辺に含まれる C_2 に (45) を代入した上で, C_1 について解けば次式を得る.

$$C_1 = \frac{\gamma^2 e^{-\gamma s} s \{ 2(\pi-2)\gamma^2 s^2 + 9\gamma s + 6 \}}{12\pi} \quad (47)$$

(47) の C_1 を (42) に, (45) の C_2 を (43) に代入・整理すれば, 求める確率密度函数が得られる. もはやこの密度が α の函数であることを明示する必要はないので, $f(s, \alpha)$ ではなく単に $f(s)$ として記述する.【円盤上の指数型 (Clark 型) 起・終点分布に対する放射・環状距離 S の確率密度函数】(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$f(s) = \frac{\gamma}{12\pi(1+\gamma\alpha-e^{\gamma\alpha})^2} \left[6 + 12\gamma\alpha - 6e^{\gamma s}(1+2\gamma\alpha) + \gamma e^{\gamma(2\alpha-s)} \left\{ 6 + 9\gamma s + 2(\pi-2)\gamma^2 s^2 \right\} \right] \quad (48)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$f(s) = \frac{\gamma}{12\pi(1+\gamma\alpha - e^{\gamma\alpha})^2} \left[6(1+2\gamma\alpha) - e^{\gamma(2\alpha-s)} \left\{ 6 + 6\gamma s + 3\gamma^2(s^2 - 4\alpha^2) + 2\gamma^3(\pi - 2)(s^3 - 6\alpha^2s + 4\alpha^3) \right\} \right] \quad (49)$$

これに基づいて、 S の平均値と2乗の平均値を求めておく。

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\pi\gamma} \left[8\pi - 5 - \frac{\gamma^2\alpha^2(3+4\gamma\alpha)}{(1+\gamma\alpha - e^{\gamma\alpha})^2} - \frac{6+2\gamma\alpha(3-2\pi\gamma\alpha)}{1+\gamma\alpha - e^{\gamma\alpha}} \right] \quad (50)$$

$$\langle S^2 \rangle = \frac{60\pi - 57}{3\pi\gamma^2} + \frac{\alpha^2 \left[-15 + 2\gamma\alpha \left\{ -10 + (3\pi - 8)\gamma\alpha \right\} \right]}{3\pi(1+\gamma\alpha - e^{\gamma\alpha})^2} + \frac{-30 + 6\gamma\alpha \left[-5 + \gamma\alpha \left\{ -8 + \pi(7+\gamma\alpha) \right\} \right]}{3\pi\gamma^2(1+\gamma\alpha - e^{\gamma\alpha})} \quad (51)$$

なお、 $\gamma \rightarrow 0$ のとき、(48)、(49)の確率密度関数は円盤上の一様分布(茶筒)に対する確率密度関数(36)、(37)に一致する。

指数型分布の減衰係数 γ を -0.12 から $+0.12$ まで、 0.04 刻みで変化させて、確率密度関数を描き分けたのが図8である。 γ が正[負]のとき、都心から離れるに連れて起・終点密度が減少[増大]する。当然、 γ が小さいほど(都市人口モデルの言葉で言えばスプロールが進むに連れて)距離分布の裾が重くなる様子が読み取れる。

このように起・終点分布を都市圏の人口密度と見做せば、 γ が都心からの距離に応じた人口密度の変化を記述する。多くの場合、時に連れて γ は減減する(東京圏でも周知の事実)。トリップ頻度が移動距離に依存せず、起・終点近傍の人口に比例すると想定するとき、平均距離は移動エネルギー消費水準の指標となる。一例として円盤半径を $\alpha = 50\text{km}$ とし、 γ と放射・環状距離の平均値 $\langle S \rangle$ ならびに標準偏差 $\sigma = \sqrt{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}$ の関係を図9に描く。 γ の減減に連れて(つまり横軸を左にゆくほど)距離の平均値ならびに標準偏差が増大する様子が見て取れる。なお同図では γ が負の値も取っているが、現実の都市圏人口分布にClark型密度を当てはめるとき、殆どの場合に γ が正值となるのは云うまでもない。例えば皇居を中心とする東京35km圏で1995年の2kmメッシュ夜間人口データを用い、非線形最小二乗法によって推定すると、 $\gamma = 0.0412\text{km}^{-1}$ である[10]。なお、 $\gamma \rightarrow -\infty$ のとき $\langle S \rangle \rightarrow 2\alpha(1 - 1/\pi) \approx 1.36\alpha$ であるが、これは半径 α の円周上で起・終点が一様に分布するときの平均放射・環状距離である。

図8 指数型起・終点分布に対する放射・環状距離 S の確率密度関数。 図9 指数型起・終点分布に対する放射・環状距離 S の平均値と標準偏差が減衰係数 γ に依存する様子(円盤半径は $\alpha = 50\text{km}$ とした)。

7. Croftonの微分方程式の一般化 - 円盤上で相異なる分布に従う2点間の距離分布 -

前節までは、起・終点が同一の回転対称な分布にしたがう場合の、放射・環状距離分布を追及した。それはそれで、都市内移動のトリップ長分布を解析的なモデルに取り込む上での大切な部品となるに違いない。しかし、実際の都市では、起点と終点が明らかに異なる分布にしたがうトリップ現象も多い。例えば大都市圏の通勤トリップの場合、裾が軽いオフィス分布と、裾が比較的重い夜間人口分布との間でトリップが生ずるのが常である。本節では、こうした状況に対応する距離分布をCroftonの微分方程式で追及する方法を述べたい。

そのために、半径 α の円盤上で、起点が分布1に従い終点が分布2に従う、という状況を想定する。ここでも半径の増分 $\Delta\alpha$ によってできるリングに着目する(図10参照)。ここで次の様に約束しておく。

- 円盤は1つだけ存在するが、便宜上、分布1[分布2]の点が存在する半径 α の円盤領域を $A_1[A_2]$ と呼ぶ。同様に、分布1[分布2]の点が存在する幅 $\Delta\alpha$ のリング領域を $B_1[B_2]$ と呼ぼう。
- 半径 α の円盤上での分布1[分布2]の測度(点の総量)を $V[W]$ とする。加えて、幅 $\Delta\alpha$ のリング上での分布1[分布2]の測度(点の総量)を $\Delta V[\Delta W]$ としよう。

半径 $\alpha + \Delta\alpha$ の円盤内でのトリップの全体は、直積 $(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$ で表現される。これを個別のトリップに分解して、1節と同様の作法で微分方程式を構成してみよう。これを行うのが表2である。表2の右端の確率密度関数は次の様に定義される。

図10 相異なる2つの分布と半径の増分 $\Delta\alpha$ 。(原点Oを通り都市平面に垂直な断面の図)

表2 直積 $(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$ の直和分解と、対応する S の確率密度函数。

起・終点ペアの種類	ペアの量(測度)	全測度に占める割合	S の確率密度函数
(1) $A_1 \times A_2$	VW	$\frac{VW}{(V+\Delta V)(W+\Delta W)}$	$f(s, \alpha)$
(2) $A_1 \times B_2$	$V\Delta W$	$\frac{V\Delta W}{(V+\Delta V)(W+\Delta W)}$	$g_1(s, \alpha, \Delta\alpha)$
(3) $B_1 \times A_2$	ΔVW	$\frac{\Delta VW}{(V+\Delta V)(W+\Delta W)}$	$g_2(s, \alpha, \Delta\alpha)$
(4) $B_1 \times B_2$	$\Delta V\Delta W$	$\frac{\Delta V\Delta W}{(V+\Delta V)(W+\Delta W)}$	$h(s, \alpha, \Delta\alpha)$
(全体) $(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$	$(V+\Delta V)(W+\Delta W)$	1	$f(s, \alpha + \Delta\alpha)$

$f(s, \alpha)$ = [半径 α の円盤上の分布1から分布2への

距離の確率密度函数] (52)

$g_1(s, \alpha, \Delta\alpha)$ = [半径 α の円盤上の分布1から幅 $\Delta\alpha$ のリング上の

分布2への距離の確率密度函数] (53)

$g_2(s, \alpha, \Delta\alpha)$ = [幅 $\Delta\alpha$ のリング上の分布1から半径 α の

円盤上の分布2への距離の確率密度函数] (54)

$h(s, \alpha, \Delta\alpha)$ = [幅 $\Delta\alpha$ のリング上の分布1から分布2への

距離の確率密度函数] (55)

$f(s, \alpha + \Delta\alpha)$ = [半径 $\alpha + \Delta\alpha$ の円盤上の分布1から分布2への

距離の確率密度函数] (56)

$f(s, \alpha)$ を導出するために、まず表2に基づいて、 $f(s, \alpha + \Delta\alpha)$ を他の4つの確率密度函数の1次結合で表現する。

$$f(s, \alpha + \Delta\alpha) = \frac{1}{(V+\Delta V)(W+\Delta W)} \left[VWf(s, \alpha) + V\Delta Wg_1(s, \alpha, \Delta\alpha) + W\Delta Vg_2(s, \alpha, \Delta\alpha) + \Delta V\Delta Wh(s, \alpha, \Delta\alpha) \right] \quad (57)$$

これを等価変形して次を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{f(s, \alpha + \Delta\alpha) - f(s, \alpha)}{\Delta\alpha} \\ &= -\frac{V\Delta W + W\Delta V + \Delta V\Delta W}{VW\Delta\alpha} f(s, \alpha + \Delta\alpha) \\ & \quad + \frac{\Delta W}{W\Delta\alpha} g_1(s, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{\Delta V}{V\Delta\alpha} g_2(s, \alpha, \Delta\alpha) \\ & \quad + \frac{\Delta V\Delta W}{VW\Delta\alpha} h(s, \alpha, \Delta\alpha) \\ &= -Kf(s, \alpha + \Delta\alpha) + L_1g_1(s, \alpha, \Delta\alpha) \\ & \quad + L_2g_2(s, \alpha, \Delta\alpha) + Mh(s, \alpha, \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (58)$$

$\Delta\alpha \rightarrow 0$ での、各要素の極限は次の通りである。

$$K = \frac{V\Delta W + W\Delta V + \Delta V\Delta W}{VW\Delta\alpha} \rightarrow \frac{1}{W} \frac{dW}{d\alpha} + \frac{1}{V} \frac{dV}{d\alpha} \quad (59)$$

$$L_1 = \frac{\Delta W}{W\Delta\alpha} \rightarrow \frac{1}{W} \frac{dW}{d\alpha}, \quad L_2 = \frac{\Delta V}{V\Delta\alpha} \rightarrow \frac{1}{V} \frac{dV}{d\alpha} \quad (60)$$

$$M = \frac{\Delta V\Delta W}{VW\Delta\alpha} \rightarrow 0 \quad (61)$$

$g_1(s, \alpha, 0)$ は円周から円盤内の分布1への距離の確率密度函数であり、

$g_2(s, \alpha, 0)$ は円周から円盤内の分布2への距離の確率密度函数である。

これらを簡単に $g_1(s, \alpha)$ 、 $g_2(s, \alpha)$ と記そう。こうして次を得る。

$$\frac{df(s, \alpha)}{d\alpha} = -K^*f(s, \alpha) + L_1^*g_1(s, \alpha) + L_2^*g_2(s, \alpha) \quad (62)$$

ただし係数は次の通りである。

$$L_1^* = \frac{1}{W} \frac{dW}{d\alpha}, \quad L_2^* = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\alpha} \quad (63)$$

$$K^* = L_1^* + L_2^* \quad (64)$$

(62)を次の様に記せば、(8)式ならびに(13)式との対比で一般化の意味が分かり易いに相違ない。

【一般化されたCroftonの微分方程式】

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\alpha} &= L_1^*(g_1 - f) + L_2^*(g_2 - f) \\ &= \frac{1}{W} \frac{dW}{d\alpha} (g_1 - f) + \frac{1}{V} \frac{dV}{d\alpha} (g_2 - f) \end{aligned} \quad (65)$$

8. 2つの相異なる指数型(Clark型)起・終点分布に対する特論

円盤内で回転対称な起点分布 $\rho_1(x)$ と終点分布 $\rho_2(x)$ を想定し、これを円盤の中心点を原点とする指数型(Clark型)で与える。

$$\rho_1(x) = e^{-\lambda x}, \quad \rho_2(x) = e^{-\mu x} \quad (66)$$

例えば ρ_1 を都市圏の夜間人口分布に、 ρ_2 を就業地従業者分布に対応づける場合は、通常 $0 < \lambda < \mu$ なる関係が成り立つ。

まず、(63)式によってCroftonの微分方程式の係数 L_1^* ならびに L_2^* を求めると、次式の通りである。

$$L_1^* = \frac{\mu^2 \alpha}{-1 - \mu \alpha + e^{\mu \alpha}}, \quad L_2^* = \frac{\lambda^2 \alpha}{-1 - \lambda \alpha + e^{\lambda \alpha}} \quad (67)$$

一方、円周上の端点からの2つの放射・環状距離分布は次のようにして求めればよい。 $g_1(r, \alpha)$ は(40)、(41)式の γ を μ で置き換えることによって得られ、 $g_2(r, \alpha)$ は、(40)、(41)式の γ を λ で置き換えることによって得られる。この様にして、一般化されたCroftonの微分方程式の全ての係数が同定される。後は、これを6章と同様の境界条件(【境界条件1】 $\alpha = \frac{s}{2}$ のとき $f = 0$ 、【境界条件2】 f は $s = \alpha$ において連続である)の下で解けばよい。紙面の都合で詳細なる過程は割愛する。結果として得るのは次の距離分布である。

【円盤上の相異なる指数型(Clark型)人口分布に対する放射・環状距離 S の確率密度函数】

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$f(s) = A_0 \{ A_2 + A_3 + A_4(\lambda, \mu) + A_4(\mu, \lambda) \} \quad (68)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$f(s) = A_0 \{ A_1 + A_3 + A_5(\lambda, \mu) + A_5(\mu, \lambda) \} \quad (69)$$

ただし、次を定義しておく。

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\lambda\mu}{\pi(\lambda+\mu)(1+\lambda\alpha-e^{\lambda\alpha})(1+\mu\alpha-e^{\mu\alpha})} \\
A_1 &= 1 + (\lambda+\mu)\alpha \\
A_2 &= \left(1 - \frac{\lambda e^{\mu s} + \mu e^{\lambda s}}{\lambda+\mu}\right) A_1 \\
A_3 &= \frac{4\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^2} e^{(\lambda+\mu)(\alpha-s/2)} \\
A_4(\lambda, \mu) &= \frac{\lambda\mu e^{(\lambda+\mu)\alpha-\lambda s}}{(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)^3} \times \left\{ \left[(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)(\pi\lambda-4\lambda+\pi\mu) \right] s \right. \\
&\quad \left. + 2 \left\{ (\pi-4)\lambda^2 + 2(\pi-1)\lambda\mu + (\pi-2)\mu^2 \right\} \right\} \\
A_5(\lambda, \mu) &= \frac{\lambda(\lambda+\mu)e^{\mu(2\alpha-s)}}{(\lambda-\mu)^3} \times \left[(\pi-2)\mu(\mu-\lambda)(1+\alpha\lambda-\alpha\mu)s \right. \\
&\quad \left. - \lambda + (2\pi-3)\mu - (\lambda-\mu) \left\{ \lambda + (3-2\pi)\mu \right\} \alpha + (\pi-2)(\lambda-\mu)^2 \mu \alpha^2 \right]
\end{aligned}$$

当然のことながら、距離分布(68)、(69)はClark式の距離減衰パラメータ λ と μ に関する対称式である(λ と μ を入れ替えても結果が不変)。また、 $\lambda=\mu$ とおくと、起・終点が同一のClark型分布にしたがうときの結果(48)、(49)に一致することは言うまでもない。さらに、 $s=\alpha$ において $f(s)$ が一階連続微分可能であることも確かめられる。

図11に $\alpha=50\text{km}$ 、 $\lambda=0.05$ と固定し、 μ を2.0、0.01、-2.0と3通りにおくときの確率密度関数を示す。また、式による結果は割愛する

図11 相異なる2つの指数型起・終点分布に対する放射・環状距離 S の確率密度関数。

図12 相異なる2つの指数型起・終点分布に対する放射・環状距離の平均値 $\langle S \rangle$ の等高線(単位はkm)。

が、 λ と μ を -0.3km^{-1} から 0.3km^{-1} の範囲で変化させるときの平均距離の等高線を図12に示す。この様に、起・終点が指数型で与えられさえすれば、距離分布を明示的に取り扱うことが出来るようになった。

9. 結語と発展

1. 起・終点が円盤上の同一分布あるいは相異なる分布に従うときの距離分布をCroftonの微分方程式で追求し、線形やClark型の下での放射・環状距離分布を初めて陽に導出した。
2. 本研究は、都市設計の工夫による移動エネルギー消費の削減モデル(その例はダンツィクとサアティのコンパクトシティ[2])を追求するための理論的な基礎を与え得るものと思われる。
3. 円盤都市の中心に通行不能な円盤領域が存在する場合に、距離分布を導出すべきである。その結果は都心部のロード・プライシングによる距離分布変化のモデルに利用できる。

謝辞

本研究は21世紀COEプログラム『知能化から生命化へのシステムデザイン』ならびに科学研究費補助金・基盤研究(A)「都市内・都市間交通網と公共施設配置に関する数理的ならびに実証的研究」(課題番号:17201037)の補助を受けました。納税者に謝意を表します。加えて、匿名の査読者の懇切なるアドバイスに心より御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] Crofton, M. W.(1885): Probability, In *Encyclopaedia Britannica*, 9-th edition, Vol. 19, pp. 768-788.
- [2] ダンツィク, サアティ(1973): コンパクトシティ, 日科技連.
- [3] Kendall, M. G. and P. A. P. Moran(1963): Geometrical Probability, Charles Griffin & Company Limited, London.
- [4] 腰塚武志(1977): 都市平面の基礎的研究, 東京大学都市工学科博士論文.
- [5] 腰塚武志(1986): 都市平面における距離の分布, (谷村秀彦他,『都市計画数理』, 朝倉書店).
- [6] 腰塚武志, 小林純一(1983): 道路距離と直線距離, 日本都市計画学会学術研究発表会論文集, No.18, pp. 43-48.
- [7] 栗田 治(2000): 東京道路網における道路距離と理論的距離, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp. 64-65.
- [8] 栗田 治(2001): 円盤都市における道路パターンの理論一直線距離, 直交距離ならびに放射・環状距離の分布一, 都市計画論文集, No. 36, pp. 859-864.
- [9] 栗田 治(2003): 連続型重力モデルの下での距離分布の理論, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp. 168-169.
- [10] 栗田 治(2004): 都市モデル読本(造形ライブラリー05), 共立出版.
- [11] Mathai, A. M.(1999): *An Introduction to Geometrical Probability*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [12] 松島裕久・栗田 治(2003): 東京道路網に関する距離モデルの実証分析, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp. 166-167.

(2005年2月4日原稿受理, 2005年7月19日採用決定)