地域間の相互作用に基づく地理的重要度の理論

A THEORY OF GEOGRAPHICAL SIGNIFICANCE BASED ON SPATIAL INTERACTION

鵜飼 孝盛*, 栗田 治**

Takamori UKAI and Osamu KURITA

In this study, we discuss the distribution of geographical significance, which is caused by accumulated interaction of the activity at point in cities among traffic network. The geographical significance is derived under a recursive structure below;

- (1) the activity value at one point is calculated by considering the effects from other points of traffic network,
- (2) that point also affects other points through traffic network according to the activity value of that point.

There is a study which considers such recursive structure of activity, that focuses on the eigenvector corresponding to the maximum eigenvalue of the adjacency matrix of graph. However, it is difficult to interpret the value at each point physically. To dissolve such logical weakness, we provides a logical basis to quantitative index of geographical significance by formulating activity distribution based on maximizing interaction between any two points of traffic network.

Keywords : activity distribution, spatial interaction, area reachable within a certain time
アクティビティ分布, 空間相互作用, 時間圏域

1. はじめに

都市は人々が集まり、他者と交わることにより生じる利益を分け合うことで成り立っている。ある地点にいる人は、その周囲の人々から影響を受け、また自分自身が周囲に影響を与えている。このような相互作用のやり取りの結果、都市における様々なアクティビティ（活動度）の分布が形成されていく。ここでいうアクティビティとは、都市内の人や事業所などの活動の主体のことであり、これらの主体は日常の生活において他の主体と相互に影響を及ぼしあいながら存在している。一例として商業活動を考えれば、ある地点のアクティビティを表す指標としては、その地点における店舗の数や店舗面積などが考えられる。これらの店舗は、競合あるいは協調する他の店舗や客となる人との相互交流の量に依存して利益を生み出す。この場合、アクティビティ間の相互作用は商取引の回数や金額の多寡などで測ることができよう。従って、相互作用の大きな地点では商取引の機会が増えるため、多数の店舗が進出し、店舗（の集合）の規模が拡大されることになる。

上記のような店舗の出店などを論じる際しばしば問題とされるのが、地の利の良し悪しである。ある土地の地理的重要性あるいは地の利は、その土地の物理的な位置により生じる利便性につい

て述べたものであり、我々がこれを口にするときには周辺の地域との関係に基づいてその良し悪しを判断している。すなわち、ある地点の地の利は、周辺の地域との交流、周辺の地域へのアクセス、あるいは周辺の地域からのアクセスが容易であるか否かに応じて認識されているのである。地の利を判断する際に、上述の2地点間の移動の容易さとともに、考慮に入れなければならないのがどのような地点から影響を受けるかである。都市内の各地点はそれぞれ個別に存在するのではなく、他の地点と相互に影響を及ぼしあっている。そして、ある地点が他の地点から受ける影響の大きさは、どの地点からのものも等しいというわけではない。人や事業所といったアクティビティが密集している地点からは大きな影響を受けるだろうし、逆に疎らであるような地点からの影響はほとんどないだろう。従って、アクティビティが多く存在するような地点への移動が容易であるか否かによりその地点と他の地点との間での相互の交流の量が定まり、地の利が定まるのである。

前述のように、都市内の活動の主体であるアクティビティは、その地点の利便性に応じて分布すると考えられる。他の地点に存在するアクティビティとの交流が容易であるかどうか、周辺の地域にアクセスしやすいか否かによってその位置を決定するのであ

* 慶應義塾大学大学院理工学研究科 特別助手・博士(工学)
** 慶應義塾大学理工学部管理工学科 教授・学博

Research Assoc., Faculty of Science and Technology, Keio University, Dr. Eng.
Prof., Dept. of Administration Engineering, Faculty of Science and Technology,
Keio University, Ph. D.

る。そして、人々が交通路あるいは交通網を通じてある地点から別の地点へと移動していく以上、都市内の各地点のアクティビティ間で生じる相互交流もまた交通網の形状に依存するのである。すなわち、地の利の良い場所にアクティビティは多く存在することになるのである。

上記のような、(i) ある地点の地の利は、交通網を介して、他の地点からそれらの地点の地の利に応じた影響を受け決定し、(ii) その地点自身もまた、交通網を介して、地の利に応じた影響を周囲に与えるという地の利の再帰的構造を定量的に評価するために、野田³⁾は交通網を表現したグラフの隣接行列の最大固有値に属する固有ベクトルを用いている。しかしながら、そこで得られる各地点の値を具体的な物理量として解釈することは困難であり、このような値が得られる理論的な説明はなされていない。

上記の地の利の定量的指標である地利値に理論的根拠を与え、その数理的性質を解明することが本論文の目的である。以下では想定する都市領域全体の相互作用の総和を最大化するアクティビティの分布を求め、地の利をアクティビティの関数として記述することで、地利値が導かれることを示す。またモデルを進展させることで、実は時間圏域の面積²⁾といった他の地理的重要度の指標と地利値との間に興味深い関係性が存在することも示される。

2. 隣接行列の固有ベクトル

鉄道や道路などの交通網において、交差点や駅などの結節点を頂点、鉄道路や道路などの交通路を辺としたグラフ G を考える。頂点の数を n 個、辺の本数を m 本とし、グラフ G の頂点の集合を $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、辺の集合を $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ とする。このグラフ G に対しその隣接行列を A とする。

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 1: (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0: (v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases} \quad (1)$$

この隣接行列 A の絶対値最大の固有値に属する固有ベクトルを考える。すなわち、 λ を固有値、 $\mathbf{x}$ をこれに属する固有ベクトルとして、以下を満たすような $\mathbf{x}$ を考える：

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2)$$

このとき、 $\mathbf{x}$ の第 i 成分 x_i は頂点 v_i に対応し、

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{a_{ij}=1} x_j \quad (3)$$

と表される。ここで、 a_{ij} は頂点 v_i と v_j とが隣接しているときに 1、そうでなければ 0 となるので、頂点 v_i における値 x_i は頂点 v_i に隣接する頂点における値の総和に比例することになる。

上記の性質は、以下のように言い表すことができる：

『ある地点の魅力度は

- i) その地点が他の地点と緊密に隣接する程
- ii) 隣接する地点の魅力度が大きい程

大きくなる。』

野田^{3,4)}は、式(3)で定義される各地点の値を「各地の地の利(魅力)を表す定量的指標」として捉え、地利値と呼んでいる。式(3)から判るように、任意の地点 v_i の地利値(魅力度) x_i は周囲の

図1 2点 v_i, v_j 間の相互作用

地点からの影響を受けて決まり、さらにその地点の地利値が周囲の地点に影響を与えるといった再帰的な構造を有している。

また、地利値は隣接行列の固有ベクトルであることから、任意の地点における地利値の値そのものには絶対的な意味はなく、他の地点と比較して、相対的に地の利が大きいかな否かを示しているにすぎないことに注意されたい。

3. 都市内の総相互作用の最大化

この章では、都市内の各地点における魅力度(ポテンシャル)をアクティビティの関数として与え、地点間で相互に及ぼしあう影響の総量を最大化することを考える。このとき、いくつかの仮定の下に得られる魅力度の分布が、地利値^{3,4)}と等しくなることを示す。

都市内に n 個の地点を考え、任意の地点 v_i における、人口や事業所などのアクティビティの量を p_i とし、 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ とする。各地点に分布するアクティビティの都市内での総量は P で一定とする。

$$P = \sum_{i=1}^n p_i \quad (4)$$

地点 v_i の魅力度 x_i はその地点におけるアクティビティの量 p_i に依存するものとする。地点 v_i の魅力度(ポテンシャル) x_i をアクティビティの量 p_i の関数 $f(p_i)$ として与える。関数 f は以下の性質を持つものとする。

$$f > 0, \quad f' > 0, \quad f'' < 0 \quad (5)$$

すなわち、 x_i は p_i について凹であるものとする。このような関数 f は様々に考えられるが、ここでは地利値その一例としてアクティビティの正の平方根を導入する。

$$x_i = f(p_i) = \sqrt{p_i} \quad (6)$$

この設定の下では、後述の最大化問題が解析的に解け、式(3)で定義される地利値と等しくなる、という著しい特長をもつことになる。勿論、 f に他の関数形を与えることも可能であるが、その場合は以下の最大化問題が必ずしも解析的には解けず、数値的に取り扱う必要が生じる。

ここで、2地点 v_i-v_j 間の相互作用の量はそれぞれの魅力度 x_i, x_j の積に比例するものとし、比例定数 α を用いて $\alpha m_{ij} x_i x_j$ と表されるものとする。ただし、 m_{ij} は2地点 v_i-v_j 間の近接の度合いに応じて定まる非負の定数であり、地点間の移動の所要時間や移動距離によって定まるものである。従って、任意の v_i, v_j に対して、その近接の度合いは、

$$m_{ij} = m_{ji} \geq 0 \quad (7)$$

であるものと考えられる (図 1)。このとき、相互作用の都市全体での総和 $g(\mathbf{p})$ は以下になる。

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha m_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha m_{ij} \sqrt{p_i p_j} \end{aligned} \quad (8)$$

商業活動を例に取れば、アクティビティ p_i は各地点における店舗の数などに相当し、相互作用は各店舗間での商業活動の活発さ・商取引の多寡に相当する。その場合、相互作用の総量である $g(\mathbf{p})$ は都市全体での商業活動の活発さを示すものとなり、売上の総量にあたるものと考えられる。以下では、限られた店舗の数の中で、社会全体で相互交流に基づく売上を最大化するような店舗の分布を求める。

いま、都市全体でのアクティビティが一定という状況下で、都市内の相互作用の総和を最大化することを考える。すなわち、式 (4) の制約の下で式 (8) を最大化する問題を考える。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha m_{ij} \sqrt{p_i p_j} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n p_i = P \end{aligned}$$

上記の最大化問題は次の関数 $L(\mathbf{p}; \mu)$ を最大化することと等しい。

$$L(\mathbf{p}, \mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha m_{ij} + \mu \left(P - \sum_{i=1}^n p_i \right) \quad (9)$$

ただし、 μ はラグランジュ乗数である。1 階の条件は、

$$\frac{\partial L(\mathbf{p}, \mu)}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^n \alpha m_{kj} \sqrt{\frac{p_j}{p_k}} - \mu = 0 \quad (10)$$

となり、以下を得る。

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \sqrt{p_j} = \frac{\mu}{\alpha} \sqrt{p_i} = \lambda \sqrt{p_i} \quad (11)$$

ただし、 $\lambda = \mu/\alpha$ である。式 (6) で定めたように、 $x_i = \sqrt{p_i}$ なので、上式は

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \quad (12)$$

のように書き表される。 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $M = (m_{ij})$ として、式 (12) を行列形式で書き表すと、以下のようになる。

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (13)$$

m_{ij} は 2 地点 v_i - v_j 間の近接の度合いを表す定数であり、式 (7) のように仮定されている。従って、行列 M は全成分が非負の実対称行列であるので、ペロン・フロベニウスの定理より、『行列 M には絶対値最大となる正の固有値 λ が存在し、その最大固有値には非負の成分からなる固有ベクトルが属する』ことがわかる。従って、魅力度 x_i のベクトル $\mathbf{x}$ は、2 地点 v_i - v_j の近接度 m_{ij} を要素とする行列 M の固有ベクトルということがわかる。

$L(\mathbf{p}, \mu)$ が最大となるときのラグランジュ乗数 μ は

$$\mu = \frac{\alpha \sum_{j=1}^n m_{ij} \sqrt{p_j}}{\sqrt{p_i}} \quad (14)$$

となる。さらに、相互作用の総和 $g(\mathbf{p})$ が最大となる $\mathbf{p}$ を $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)^T$ とすると、そのときの相互作用の総和 $g(\mathbf{p}^*)$ は、

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}^*) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha m_{ij} \sqrt{p_i^* p_j^*} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i^*} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \sqrt{p_j^*} \right) \end{aligned}$$

であり、式 (12)、(4) から

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}^*) &= \alpha \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i^*} \times \lambda \sqrt{p_i^*} \\ &= \alpha \lambda \sum_{i=1}^n p_i^* \\ &= \alpha \lambda P \\ &= \mu P \end{aligned} \quad (15)$$

となる。式 (15) を λ について解けば、

$$\lambda = \frac{g(\mathbf{p}^*)}{\alpha P} \quad (16)$$

となり、行列 M の最大固有値 λ は都市内の相互作用の総量に比例することがわかる。地域間の相互作用の量は、2 地点間の近接の度合い m_{ij} に依存して定まるものであった。 m_{ij} は地点 v_i と v_j の間の交通路の整備状況などに依存して定まる値である。交通路の能力が高ければ、この値は大きくなり、そうでなければ小さくなると考えられる。従って、都市内の相互作用の総量に比例する λ の値は都市内の交通網の能力を表していると捉えることができる。交通網が存在しないときには、相互作用は発生しないが、一度交通網が実現すると、それに応じて相互作用が生じる。換言すれば、交通網が存在することによる都市全体の活性度を λ は表現しているのである。

さらに式 (12) の両辺を λ で割り、式 (16) を代入すると、

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\alpha P}{g(\mathbf{p})} \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \\ &= \alpha P \frac{\sum_j m_{ij} x_j}{\sum_j \sum_k \alpha m_{jk} x_k} \\ &= P \frac{\sum_j m_{ij} x_j}{\sum_j \sum_k m_{jk} x_k} \end{aligned} \quad (17)$$

となり、次のような解釈が成り立つ。都市内の魅力度の分布は、都市内の相互作用の総和に対するその地点における相互作用の量の割合と都市内の人口の積で表される。

また、これまでのモデルにおける近接の度合い m_{ij} を交通網の隣接行列の要素 a_{ij} で置き換えることで、交通網の位相的特性のみに依存したアクティビティの分布を得ることができる。式 (3) を見れば明らかのように、このようにして得られるアクティビティの分布は地利値そのものであることがわかる。従って、地利値とは地点間の相互作用が交通網上の隣接した頂点間でのみ生じるよ

うな状況下で、都市内の相互作用の総和を最大化するようなアクティビティの分布を表すものであることがわかる。

更に、 a_{ij} が常に一定の値 a をとるような場合、すなわち都市内の全ての地点間の結びつきが一定であるような場合について考える。対称性から明らかに、任意の i, j について $p_i = p_j$ であり、 $\sum_i p_i = P$ から

$$p_i = \frac{P}{n} \quad (18)$$

である。これと式 (16) から

$$\lambda = \frac{\sum_i \sum_j a \sqrt{\frac{P}{n}} \sqrt{\frac{P}{n}}}{P} = an \quad (19)$$

を得る。 $a = 1$ の場合、これに対応するグラフは完全グラフであり、その固有値は頂点数 n に等しくなる。

4. 単位アクティビティあたりの相互作用

前節のように、相互作用の総和が最大となったときの、各地点での単位アクティビティあたりの相互作用の量を求めよう。これは個々のアクティビティがどの程度交通網の恩恵を享受するかを示すものであり、そのばらつきは公平性を表すことになる。

いま都市全体での相互作用の総和が最大化されたときの $\mathbf{p}$ を $\mathbf{p}^*$ とし、 $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)^T$ とする。任意の地点 v_i における相互作用の量は、

$$\sum_{j=1}^n \alpha m_{ij} \sqrt{p_i^* p_j^*} \quad (20)$$

で表される。地点 i のアクティビティの量は p_i^* なので、地点 v_i におけるアクティビティ 1 単位あたりの相互作用の量 r_i^* は、

$$r_i^* = \frac{\sum_j \alpha m_{ij} \sqrt{p_i^* p_j^*}}{p_i^*} = \frac{\alpha \sum_j m_{ij} \sqrt{p_j^*}}{\sqrt{p_i^*}} \quad (21)$$

となる。ここで、式 (11) から、 $\sum_j m_{ij} \sqrt{p_j^*} = \lambda \sqrt{p_i^*}$ なので、

$$r_i^* = \frac{\alpha \lambda \sqrt{p_i^*}}{\sqrt{p_i^*}} = \lambda \alpha = \mu \quad (22)$$

となり、都市全体での相互作用の総和が最大となると、各地点における単位アクティビティあたりの相互作用は、地点によらず一定であり、その値はラグランジュ乗数 μ となる。

$\mathbf{p}^*$ は都市全体での相互作用の総和を最大化するようなアクティビティの分布であり、個々のアクティビティが受ける相互作用については何ら考慮していない。このような状況であるにも関わらず、個々のアクティビティが交通網から享受する相互作用は一定であり、公平性が確保されるということが示された。

5. 個別に相互作用を最大化することによる均衡

ここまでは、都市全体での相互作用が最大となるようなアクティビティの分布 $\mathbf{p}$ を求めてきた。この節では、アクティビティがそれぞれ個別に相互作用を最大化するような状況を考える。アクティビティ同士の相互交流に比例して商業活動などを行うと考え、それぞれのアクティビティは出来るだけ有利な地点、すなわち相互作用を大きくすることができる都市内の別の地点へと

移ることになる。ここでは、都市内の相互作用の総和が最大化されたようなアクティビティの分布が、アクティビティが主体的に相互作用を大きくすることを試みたときに、別の地点へ移動することにより、相互作用を大きくすることができないという均衡状態となることを示す。

都市全体での相互作用の総和が最大化されたときの $\mathbf{p}$ を $\mathbf{p}^*$ とし、 $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)^T$ とする。いま、地点 v_k におけるアクティビティ p_k^* のうち、 Δp が v_k 以外の地点 v_l へ移動することを考える。ただし、 Δp は十分に小さな単位であるものとし、その移動する先は高々 1 つであるものとする。この Δp の移動が生じるためには、移動する前に比べて移動することが有利である、すなわち移動後の地点 v_l における単位アクティビティあたりの相互作用が、移動前の地点 v_k におけるそれよりも大きくなる必要がある。ここでは、移動後の単位あたりの相互作用が移動前のそれに比べて小さくなることを示すことにより、都市内の相互作用の総和が最大化された状態からアクティビティの移動が生じないことを導く。

Δp 移動した後のそれぞれの地点におけるアクティビティは、

$$\begin{cases} p_i = p_i^* & (i \neq k, l) \\ p_k = p_k^* - \Delta p \\ p_l = p_l^* + \Delta p \end{cases} \quad (23)$$

となる。 Δp 移動後の地点 v_l における相互作用の和は、

$$\begin{aligned} & \sum_j \alpha a_{lj} \sqrt{p_l p_j} \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n a_{lj} \sqrt{p_l p_j^*} + \alpha a_{lk} \sqrt{p_l} (\sqrt{p_k^*} - \sqrt{p_k^*}) \\ & \quad + \alpha a_{ll} \sqrt{p_l} (\sqrt{p_l^*} - \sqrt{p_l^*}) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。単位あたりの相互作用は、上式を p_l で除して

$$\begin{aligned} r_l &= \frac{\alpha \sum_j a_{lj} \sqrt{p_l p_j^*}}{\sqrt{p_l}} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{p_l}} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{lj} \sqrt{p_j^*} + a_{lk} (\sqrt{p_k^*} - \sqrt{p_k^*}) + a_{ll} (\sqrt{p_l^*} - \sqrt{p_l^*}) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

図2 Δp だけのアクティビティの移動

となる。式(11)より、 $\sum_j a_{lj} \sqrt{p_j^*} = \lambda \sqrt{p_l^*}$ なので、

$$r_l = \frac{\alpha \lambda \sqrt{p_l^*}}{\sqrt{p_l}} + \frac{\alpha a_{lk}(\sqrt{p_k} - \sqrt{p_k^*}) + \alpha a_{ll}(\sqrt{p_l} - \sqrt{p_l^*})}{\sqrt{p_l}} \quad (26)$$

となる。移動前の地点 v_k における単位アクティビティあたりの相互作用 r_k^* は、式(21)より k によらず $\mu = \alpha \lambda$ で一定なので、

$$\begin{aligned} r_k^* - r_l &= \frac{\alpha \lambda \sqrt{p_l} - \alpha \lambda \sqrt{p_l^*}}{\sqrt{p_l}} \\ &= \frac{\alpha a_{lk}(\sqrt{p_k} - \sqrt{p_k^*}) + \alpha a_{ll}(\sqrt{p_l} - \sqrt{p_l^*})}{\sqrt{p_l}} \\ &= \frac{\alpha(\lambda - a_{ll})(\sqrt{p_l} - \sqrt{p_l^*})}{\sqrt{p_l}} + \frac{\alpha a_{kl}(\sqrt{p_k^*} - \sqrt{p_k})}{\sqrt{p_l}} \end{aligned} \quad (27)$$

を得る。ここで、式(23)より $\sqrt{p_k^*} > \sqrt{p_k}$ なので、右辺第2項は常に正となる。同様に、 $\sqrt{p_l} > \sqrt{p_l^*}$ より、右辺第1項の因数 $\sqrt{p_l} - \sqrt{p_l^*}$ はやはり正となる。ここで、式(12)より、

$$\sum_{j=1}^n a_{lj} \sqrt{p_j^*} = \lambda \sqrt{p_l^*}$$

である。上式の両辺を λ について解くと、

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{p_l^*}} \sum_{j=1}^n a_{jl} \sqrt{p_j^*} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_l^*}} \left(a_{ll} \sqrt{p_l^*} + \sum_{j \neq l} a_{jl} \sqrt{p_j^*} \right) \\ &= a_{ll} + \frac{\sum_{j \neq l} a_{jl} \sqrt{p_j^*}}{\sqrt{p_l^*}} \end{aligned} \quad (28)$$

となる。右辺第2項は常に正であるから、 $\lambda > a_{ll}$ が成り立ち、式(27)の右辺第1項も正となることがわかる。従って、

$$r_k^* - r_l > 0 \quad (29)$$

となり、地点 v_k から v_l へのアクティビティの移動は発生せず、アクティビティの分布 p^* は均衡となる。

前章で求めたアクティビティの分布 p^* は、アクティビティの総量が一定という条件下で相互交流の量 $g(p)$ を最大化するものであり、ある種の全体的最適化の解として求まるものであった。本章では、このようなアクティビティの分布が、同時にアクティビティが個々に自らの相互作用の量を最大化するよう動いた際の均衡であることを示した。すなわち、政府などの規制に頼ることなく、各アクティビティの自由競争により、都市全体での相互作用の総和の最大化が達成されるという好ましい状況が示された。

6. 地利値の拡張

6.1 隣接行列を拡張した地利値

式(3)で定義される地利値は、頂点 v_i の地利値 x_i はこれに隣接する頂点 v_j の地利値の和に比例するという性質を持っている。従って、頂点 v_i が多くの頂点に隣接する程、値の大きな頂点に隣接する程、頂点 v_i の地利値は大きくなる。しかし、ここでは頂点 v_i に影響を与える頂点 v_j の隣接関係については何も注意が払

図3 点 v_j から点 v_i へはたらく作用

われていない。具体的には、頂点 v_j に接続する辺の本数（頂点 v_j の次数）が多くても、少なくとも頂点 v_j が頂点 v_i に与える影響には変化がないのである。ある頂点に隣接する頂点の数が増加し、その影響の及ぶ範囲が広がるならば、隣接する一つ一つの頂点への影響は小さくなるものと考えられる場合は少なくない。

この節ではこのような地利値が有限な値であるという観点から、隣接行列を以下のように定義しなおす。頂点 v_i と v_j との間に何らかの形で記述される効用 ν_{ij} を考える。ただし、 ν は対称的であるとし、 $\nu_{ij} = \nu_{ji}$ とする。さらに頂点 v_i に隣接する全ての頂点への効用の和を σ_i とする。そして、頂点 v_j から頂点 v_i への影響は、頂点 v_j から他の頂点の全効用に対する、頂点 v_i への効用の比と考え、

$$q_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{\sigma_j} = \frac{\nu_{ij}}{\sum_{k=1}^n \nu_{jk}} \quad (30)$$

と定める。このような q_{ij} を要素とする行列 $Q = (q_{ij})$ を隣接行列 A の代わりに用いて、その固有値・固有ベクトルを求める（図3を参照）。

$$Qx = \rho x \quad (31)$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^n \nu_{ij} \quad (32)$$

行列 Q の定義からも明らかなように、行列 Q の列和は常に1となる。事実、効用が $\nu_{ij} = \nu_{ji}$ であるため、

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\nu_{ij}}{\sum_{k=1}^n \nu_{jk}} = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_{ij}}{\sum_{k=1}^n \nu_{jk}} = 1 \quad (33)$$

となる。

このような行列の固有値は1となることが知られている。式(31)を第 i 行について書き下すと、

$$\rho x_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j$$

であり、これを両辺を i について加え合わせると、左辺は

$$\sum_{i=1}^n \rho x_i = \rho \sum_{i=1}^n x_i$$

であり、右辺は

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n q_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n x_j$$

となることから、 $\rho = 1$ であることがわかる。

よって、

$$Qx = x, \quad x_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \quad (34)$$

が成り立つ。式(30)より、 $\nu_{ij} = \sigma_i \cdot q_{ji} = \sigma_j \cdot q_{ij}$ であるから、 $q_{ij} = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} q_{ji}$ なので、

$$x_i = \sum_{j=1}^n q_{ji} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \cdot x_j \quad (35)$$

となる。両辺を σ_i で割り、 $\frac{x_k}{\sigma_k} = \psi_k$ とおくと、

$$\psi_i = \sum_{j=1}^n q_{ji} \psi_j \quad (36)$$

となる。さらに、 $q_{ji} = \frac{\nu_{ij}}{\sigma_i}$ を代入し、両辺に σ_i を乗じると左辺は、

$$\psi_i \sigma_i = \psi_i \sum_{j=1}^n \nu_{ij} = \sum_{j=1}^n \psi_j \nu_{ji} \quad (37)$$

であり、右辺は

$$\sum_{j=1}^n \frac{\nu_{ji}}{\sigma_i} \psi_j \sigma_i = \sum_{j=1}^n \psi_j \nu_{ji} \quad (38)$$

となり、 $\nu_{ij} = \nu_{ji}$ であるから、

$$\psi_i = \psi_j, \quad \frac{x_i}{\sigma_i} = \frac{x_j}{\sigma_j} \quad (39)$$

が得られる。従って、

$$x_i : x_j = \sigma_i : \sigma_j = \sum_j \nu_{ij} : \sum_i \nu_{ij} \quad (40)$$

であり、都市内の任意の地点 v_i における値は、地点 v_i から全ての他の地点への効用の和に比例することになる。

さらに、地点 v_i と v_j 間の効用 ν_{ij} を隣接行列の要素とした場合、すなわち $\nu_{ij} = a_{ij}$ とした場合、 $\sigma_i = \sum_j a_{ij}$ 、 $q_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sigma_j}$ となるので、

$$x_i : x_j = \sum_j a_{ij} : \sum_i a_{ij} = d(v_i) : d(v_j) \quad (41)$$

となる。ただし、 $d(v_i)$ は頂点 v_i に接続する辺の本数であり、各頂点における地利値はそれぞれに接続する辺の本数、すなわち隣接する頂点の数に比例することとなる。このとき、頂点 v_j が隣接する全ての頂点へ与える影響に対する、頂点 v_i への影響の割合は、

$$q_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sigma_j} = \frac{a_{ij}}{d(v_j)} \quad (42)$$

であり、頂点 v_j の次数に反比例する。頂点 v_j から v_i への影響は、これに頂点 v_j の地利値 x_j を乗じたものとなる。地利値 x_j

は頂点 v_j の次数 $d(v_j)$ に比例する。比例定数 k を用いて、

$$x_j = kd(v_j) \quad (43)$$

と表すと、頂点 v_j から v_i への影響は

$$q_{ij} x_j = \frac{a_{ij}}{d(v_j)} \times kd(v_j) = ka_{ij}$$

となり、2つの頂点が隣接していなければ0、隣接しているならば一定の値を示す。

また、 a_{ij} を2点 v_i, v_j 間の所要時間 t_{ij} がある閾値 T 以下のときに1、そうでない場合には0とした場合、 $\sigma_i = \sum_j a_{ij}$ は頂点 i から所要時間 T 以内で移動可能な頂点の数を表すこととなり、頂点が平面上に一樣に分布しているとすると、 σ_i は時間圏域の面積を表す。その際、 v_j から v_i への影響 $q_{ij} x_j$ は t_{ij} が T 以下であれば一定の値をとる。

時間圏域の面積²⁾は、都市内の任意の地点を起点とし、そこからある所要時間以内で到達可能な領域の面積を表すものであった。同時に、ある地点 i にいる人が、そこから所要時間 T 以内で到達可能な領域に一樣に移動するといった状況で、人口の分布が一種の平衡状態に達した際の、各地点における人数の比を表すことになる。

6.2 相互作用の最大化に基づく計算

3章では、都市内の各地点における魅力度をアクティビティの関数とし、地点間の相互作用の総量を最大化することで、式(3)で表される地利値³⁾が得られるという構造を示した。この節では、前節の式(31)で定義される、拡張された地利値も、同様に相互作用の総和の最大化に基づくものであることを示す。以下の議論における基本的な流れは3章と同一であり、相互作用の定義が異なる。

都市内の n 個の地点におけるアクティビティの量 p_i の都市内の総量は P で一定であるものとする。

$$P = \sum_{i=1}^n p_i \quad (44)$$

地点 v_i の魅力度 x_i をアクティビティの量 p_i の関数 $f(p_i)$ として与える。以下では、このような関数 f として、2章と同様にアクティビティの正の平方根を仮定する。

$$x_i = f(p_i) = \sqrt{p_i} \quad (45)$$

次に2地点 v_i-v_j 間ではたらく作用について考える。3章での相互作用は、2地点間の魅力度の積に比例するものとしていた。ここでは、地点 v_i への地点 v_j からの影響が、地点 v_j の魅力度と2地点間の近接の度合いのみによって決まるものとし、相互作用を次式で与える。

$$w_{ij} = \alpha a_{ij} x_j \quad (46)$$

ただし、 a_{ij} は隣接行列の要素であり、交通網により隣接した地点間でのみ相互作用が生じるといった状況を想定する。このとき、式(45)から、 $x_j = \sqrt{p_j}$ であるので、

$$w_{ij} = \alpha a_{ij} \sqrt{p_j} \quad (47)$$

を得る。このとき、相互作用の都市全体での総和は次式となる。

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} x_j \\ g(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} \sqrt{p_j} \end{aligned} \quad (48)$$

いま、都市全体でのアクティビティが一定という状況下で、都市内の相互作用の総和を最大化するようなアクティビティの分布を求めることを考える。すなわち、式(44)の制約の下で式(48)を最大化する問題を考える。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} \sqrt{p_j} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n p_i = P \end{aligned}$$

上記の最大化問題を解くために、ラグランジュ関数

$$L(\mathbf{p}, \mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} \sqrt{p_j} - \mu \left(\sum_{i=1}^n p_i - P \right) \quad (49)$$

を考える。上式を p_k で偏微分すると、

$$\frac{\partial L(\mathbf{p}, \mu)}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^n \alpha a_{kj} \frac{1}{2\sqrt{p_k}} - \mu \quad (50)$$

となる。従って、1階の条件より以下を得る。

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda \sqrt{p_i} \quad (51)$$

ここで $\lambda = \frac{2\mu}{\alpha}$ である。 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = d(v_i)$, $\sqrt{p_i} = x_i$ であることに注意すると、 λ は式(43)における比例定数 k の逆数に等しいことがわかる。

また、都市内の作用の総和が最大となるアクティビティの分布を $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)^t$ とすると、都市内の相互作用の総和は、

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}^*) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} \sqrt{p_j^*} \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \sqrt{p_j^*} \sum_{i=1}^n a_{ij} \end{aligned}$$

であり、式(51)より $\sum_i a_{ij} = \lambda \sqrt{p_j^*}$ なので、

$$g(\mathbf{p}^*) = \alpha \lambda \sum_{j=1}^n p_j^* = \alpha \lambda P \quad (52)$$

となる。式(3)で定義される地利値の計算における固有値 λ と同様に、拡張された地利値においても、 λ は都市内の相互作用の総量に比例することとなり、都市内の交通網の能力や地点間の結びつきの強さを示すことがわかる。

7. まとめ

本研究では、地利値をアクティビティの関数として新たに定義しなおし、アクティビティの総量が一定であるという制約の下で、相互作用の都市内での総和を最大化するようなアクティビティの分布を求めることが、上記の地利値を求めることと等価であることを示した。同時に、上で用いた仮定が成り立つ限り、各

アクティビティが行動の主体として、各地点での相互作用の蓄積の取り分を個別に最大化するよう行動した際に得られるアクティビティの均衡状態と、上記の都市内の相互作用の総和を最大化するアクティビティの分布が等しくなることを示した。すなわち、個々のアクティビティが利己的に、相互作用を最大化することにより、社会全体の相互作用の最大化が達成されることが示された。

また、各地点における地利値が有限であるという前提から、隣接行列に変更を加えた。ある地点が他の地点に与える影響は、隣接する地点、すなわち影響を及ぼす地点の数に反比例するような新たな行列を定義し、その固有ベクトルという形で地利値の定義を拡張した。このとき、適当な式変形を経ることで、任意の地点の地利値がその地点の次数、あるいは隣接する地点の数に比例することを示した。さらに、隣接行列に適当な仮定をおくことで、地利値が時間圏域の面積²⁾に比例することを示した。加えて、アクティビティ間の相互作用の式を変えることで、通常の隣接行列の固有ベクトルとしての地利値の場合と同様に、この拡張された地利値が相互作用の総和の最大化に対応することを示した。

このことは、地利値が時間圏域の概念を更に一般化したものであることを示しており、地理的重要性の尺度としての地利値の有用性を強調することになる。

本論文における議論は、地利値がアクティビティの平方根として表わされることを前提としているが、両者の間に他の関数形を与えた際の性質を探ることは今後の課題として残されている。

謝辞

本研究は、文部科学省 21 世紀 COE プログラム『知能化から生命化へのシステムデザイン』、ならびに科学研究費補助金・基盤研究(A)『都市内・都市間交通網と公共施設配置に関する数理的ならびに実証的研究』(課題番号 17201037)の補助を受けました。ここに記し謝意を表します。

また、論文内の記述の曖昧さを指摘し、趣旨がより明瞭に伝わるようコメントを下された匿名の査読者に感謝いたします。

参考文献

- 1) Gould, P.R.: On the geographical interpretation of eigenvalues, *Transaction, Institute British Geographers*, No.42, pp.53-92, 1967.
- 2) 腰塚武志: 時間圏域の面積について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 2-D-3, pp.176-177, 1985.
- 3) 野田 洋: 街路網の形態的特性に基づく定量的地利値の導入とその基礎的考察, 日本建築学会計画系論文集, 第 470 号, pp.139-148, 1995 年 4 月.
- 4) 野田 洋: 定量的地利尺度を用いた都市街路網の分析的研究, 日本建築学会計画系論文集, 第 519 号, pp.171-178, 1999 年 5 月.
- 5) 鵜飼孝盛・栗田 治: 交通網により生成される都市平面上の地利値分布-首都圏鉄道網に基づく地利値メッシュ地図-, 都市計画論文集, No. 38-3, pp.163-168, 2003.
- 6) Tinkler, K.J.: The physical interpretation of eigenfunctions of dichotomous matrices, *Transaction, Institute of British Geographers*, No.55, pp.17-46, 1972.
- 7) 鵜飼孝盛: 交通網のグラフ構造と地点間相互作用に基づく都市内アクティビティ分布の理論, 慶應義塾大学博士学位論文, 2006.
- 8) 山中知彦・原 広司・藤井 明・渡辺健一・小駒幸江: グラフ化による土地利用図の分析, 都市計画 別冊, No. 16, pp.13-18, 1981.

(2006年9月8日原稿受理, 2007年2月6日採用決定)