無制約型重力モデルのパラメタ推定に関する新しい方法

－ エントロピーモデルの解析学的側面に注目した重力モデルの理解 －

A NEW PARAMETER ESTIMATION METHOD FOR UNCONSTRAINED GRAVITY MODELS

－ Understanding of gravity models with respect to analytical aspects
of entropy maximizing formulas －

栗田 治*

Osamu KURITA

In this paper, unconstrained gravity model for urban trip pattern is formulated according to the entropy maximizing framework. It is reduced by maximizing the occurrence probability of trip pattern subject to the total trip cost, which is the mixture of Wilson's and Sasaki's entropy models. Some characteristics useful to understand the structure of the gravity model were found by a precise observation on an analytical aspect of the model. A new method for parameter estimation for the gravity model is also proposed in our study: parameters for the unconstrained gravity model are estimated only by solving a non-linear equation which is reduced from constraints of the entropy maximizing problem, and the uniqueness of the estimator has been verified mathematically.

Keywords : *Entropy Model, Unconstrained Gravity Model, Parameter Estimation*

エントロピーモデル, 無制約型重力モデル, パラメタ推定

1. 緒言

トリップ分布パターンの生起確率を最大化するエントロピーモデルから誘導される無制約型の重力モデルを取り上げ, (1) 解析学的特徴を吟味し, (2) 未知パラメタの新しい推定法を提案する. (1) の議論は, 無制約型の重力モデル式に新たな解釈を与える, という理論的新味を持つ. また (2) は, 都市計画や建築計画で多用される無制約型重力モデルのパラメタを見通しよく推定する新しい手法である.

本研究の推定法によれば, 発生・集中ゾーンペアの先験確率が所与のとき, 距離抵抗パラメタに関する1本の非線形方程式を解けば, 直ちに総トリップ数制約と総コスト制約を満たす無制約型重力モデルを同定できる. 本研究の先験確率は佐佐木¹³⁾, 佐佐木・飯田¹⁴⁾の先験確率から距離による減衰成分を除いて設定した(2章で詳述).

2章ではウィルソンと佐佐木のエントロピーモデルを概観し, 生起確率最大化エントロピーモデルが, これらの遺伝子を受け継ぐ様子を解説する. そして続く3章では, それを具体的に導入する. 特に, 総トリップ数制約と総移動コスト制約の下での生起確率最大化エントロピーモデルは無制約型の重力モデルを与える(4章). この無制約型重力モデルは調整係数が距離減衰パラメタに連動するという特徴を持ち, このことが本研究のパラメタ推定法の理論的基盤を与える. 5章で距離抵抗パラメタの一意性を証明し, 6章で潜在力の

冪乗に比例する無制約型重力モデルのパラメタ推定法を提案する. なお, 無制約型以外(発生制約, 集中制約, 発生・集中制約)の生起確率最大化エントロピーモデルについては, 論文の読み易さを勘案して【附録】に述べた. 3章ならびに【附録】はエントロピーモデルの理論的な概観の役割も果たしている.

ここで従来のパラメタ推定を振り返ると, まず無制約型重力モデル式を対数線形化し線形最小二乗法を適用する簡便法がある(野上・杉浦⁹⁾, 石川⁵⁾, 森地・山形⁸⁾, 大山¹⁰⁾). 簡便法の「対数変換によって交通量の大きなゾーン間で推計誤差が増す」という問題^{5), 8)}を克服すべく, 非線形最小二乗法⁸⁾やポアソンモデルの方法^{5), 10)}も使われる. 調整係数と距離抵抗係数を独立させた従来法の実測ODデータへのフィットは良い. しかし現象の背後に, もしも二つのパラメタが連動する構造がある場合は, 従来の方法で分布交通の将来像を考えたり, パラメタの地域間移転を行うのは危険かもしれない. 本研究の副産物は, この危険性に関する情報提供である.

ただし, 理論面での成果を形の上で(上段の如くに)記述できたとしても, 実測データを上手く再現できなければ, 議論は説得力に欠ける. そこで, 例を国内の都県間移住データに取り, パラメタ推定を行った結果を7章に記す. そこでは, 本研究のパラメタ推定法がそこそこ上手く分布交通量を再現することが示される.

* 慶應義塾大学理工学部管理工学科 教授・学博

Prof., Dept. of Administration Engineering, Faculty of Science and Technology, Keio University, Ph. D.

2. エントロピーモデルの概観と本研究の立場

2.1 ウィルソンと佐佐木のエンロロピーモデル

都市交通に関するエンロロピーモデルや重力モデルは、交通の I 個の発生ゾーン (出発地の集合) と J 個の集中ゾーン (目的地の集合) を設定し、発生ゾーン $i \in \{1, 2, \dots, I\}$ から集中ゾーン $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ への交通量 t_{ij} を算出するためのモデルである (図 1)。

図 1 空間相互作用の在り方

トリップ総数を T とする。ウィルソンのエンロロピーモデル¹⁶⁾ は、 T 個のボールを $I \times J$ の格子に投げ込むときに、分布パターンを実現させる投げ込み方の数を表す多項係数をトリップ分布の蓋然性の尺度とし、発生・集中・総コストという制約下でこれを最大化して分布交通量 $\{t_{ij}\}$ を導いた (図 2)。

また、佐佐木のエンロロピーモデル^{13),14)} は、 T 個のボールを投げ込む試行で、先験確率 p_{ij} (i 行 j 列のマス目にボールが入る確率) を導入し、多項分布の確率関数を最大化の対象とした。佐佐木は「トリップを個別にみた各微視的状态に対する生起確率が同一、すなわち各目的地の選択確率が同一であるという仮定」を「実際には考えられないことで、ゾーンポテンシャルや所要時間等の事前情報によって目的地の選択確率はある程度決まっているものと思われる」とウィルソンのエンロロピーモデルを批判した (佐佐木・飯田¹⁴⁾ の p. 76)。これを克服する手段として、佐佐木は先験確率 p_{ij} をゾーン i の発生量とゾーン j の集中量に比例し、ゾーン i - j 間の移動コストの冪乗に反比例するものと想定した。そして、総コスト制約は除外し、発生制約と集中制約の下で、多項分布の確率関数を最大化することによって、ウィルソンに類似のエンロロピーモデルを導いた。これを佐佐木・飯田¹⁴⁾ は「重力モデル型エンロロピーモデル」と呼んだ。

	1	2	...	j	...	J
1	t_{11}	t_{12}	...	t_{1j}	...	t_{1J}
2	t_{21}	t_{22}	...	t_{2j}	...	t_{2J}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i	t_{i1}	t_{i2}	...	t_{ij}	...	t_{iJ}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I	t_{I1}	t_{I2}	...	t_{IJ}	...	t_{IJ}

図 2 $I \times J$ の升目へのボールの投げ込み $\{t_{ij}\}$

佐佐木の先験確率は興味深い、それに移動コストによる減衰を反映させたことには、納得できないものがある。ウィルソンのモデルが学界に大きな興味をもって迎えられた理由は、トリップ数とト

リップコストの制約の下で多項係数の最大化を行うと結果として距離の減衰関数が導かれることに対する鮮烈なる驚きにあった。石川も、空間的相互作用モデルの技術の現状を広範囲に亘って述べたテキストの中で「Gould(1972, p. 696)⁴⁾ は、Wilson の業績をめぐるもっとも重要で、かつ興奮を呼ぶものの一つは、彼のモデルが、不条理の灰の中から重力モデルを不死鳥のように Phoenixlike 生き返らせたことである、と最大級の賛辞を惜しまなかったのである。」というトピックを紹介している (石川⁵⁾, p. 37)。佐佐木のように、先験確率に距離減衰効果を組み込んでしまうと、重力モデルは万有引力の法則のアナロジーに過ぎない、というテーゼを認めることになりかねない。もっとも、このことが佐佐木モデルの実用上の価値を減ずる訳ではないのであるが。

2.2 本研究の基軸となるエンロロピーモデル

本研究はウィルソンの「分布交通パターンの生起し易さを最大化すると結果として重力モデルが出現する」という原理を満たし、かつ佐佐木が発想した「先験確率によってゾーン間トリップの発生し易さを記述する」という優れたアイデアを兼ね備えたモデルとして、「分布パターンの生起確率を最大化するエンロロピーモデル」を導入する。以降、このモデルを生起確率最大化エンロロピーモデルと呼ぶ。これは、ウィルソンから総コスト制約を、佐佐木から先験確率を距離による減衰を含まない形で受け継いで構成される (図 3)。

このモデルは松本⁷⁾ の pp. 79 – 80 で言及されており、ここでは p_{ij} がゾーン i の発生量とゾーン j の集中量に比例するものと想定し、多項分布の確率関数を、総トリップ数制約と総コスト制約の下で最大化することにより、無制約型重力モデルを導いている。

生起確率最大化エンロロピーモデルの一般的な枠組みについては、3 章で解説する。図 3 には、制約条件の設け方によって生起確率最大化エンロロピーモデルから 4 つの類型が生み出される様子が描かれている。このうち無制約型を 4 章で詳述し、それ以外には【附録 1】で言及する。また、発生・集中制約型の生起確率最大化エンロロピーモデルは、実はウィルソンのエンロロピーモデルと等価となる【附録 1A】で示される。

図 3 生起確率最大化エンロロピーモデルのアイデア

3. 生起確率最大化エントロピーモデル

3.1 定式化と先験確率の設定法

都市空間内の交通について、発生ゾーン $i \in \{1, 2, \dots, I\}$ から集中ゾーン $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ への交通量を t_{ij} と表現する。このとき、分布交通量 $\{t_{ij}\}$ が満たすべき条件に次の二つがある。

$$\text{【発生制約条件】 } O_i = \sum_{j=1}^J t_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, I) \quad (1)$$

$$\text{【集中制約条件】 } D_j = \sum_{i=1}^I t_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, J) \quad (2)$$

そして、これらの条件の有無によって、 t_{ij} を導くためのモデルは、次の如くに分類される：(i) 無制約型モデル（条件 (1) と (2) の成立を求めない）；(ii) 発生制約型モデル（条件 (1) の成立を求める）；(iii) 集中制約型モデル（条件 (2) の成立を求める）；(iv) 発生・集中制約型モデル（条件 (1) ならびに (2) の同時成立を求める）。

また、相互作用の総数（総トリップ数）を T で表しておく：

$$T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \left(= \sum_{i=1}^I O_i = \sum_{j=1}^J D_j \right) \quad (3)$$

$i \rightarrow j$ 間コスト c_{ij} に基づく総移動コスト制約も導入する。

$$\text{【総移動コスト制約条件】 } \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} t_{ij} = C \quad (4)$$

C は地域全体での総移動コストであり、理想的には総移動距離、総運賃支出、ガソリン消費総量などに基づき設定され得る。また、相互作用の実データ $\{T_{ij}\}$ が判明していれば、次式で算出できる。

$$C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} T_{ij} \quad (5)$$

C が未知のときに、モデルを分布交通量の実測データ $\{T_{ij}\}$ に当てはめることも勿論可能だが、本論文ではその技術については述べない。

制約 (4) を満たし、(1) と (2) を必要に応じて満たす相互作用 t_{ij} を（尤もらしく）導出したい。これがエントロピーモデル族が目指すことである。佐佐木¹³⁾、佐佐木・飯田¹⁴⁾、松本⁷⁾、森地・山形⁸⁾と同様に、 $\{t_{ij}\}$ という分布パターンが実現する尤もらしさの尺度（最大化すべき関数）として多項分布の確率関数を導入する。

$$w(\{t_{ij}\}) = \frac{T!}{\prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J t_{ij}!} \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J p_{ij}^{t_{ij}} \quad (6)$$

上式右辺で掛け合わされる要素 p_{ij} は、佐佐木¹³⁾ が先験確率と呼び、欧米の研究者が prior information と呼ぶ¹¹⁾ ものである。佐佐木は、この先験確率に出発ゾーンと集中ゾーンの潜在力のみならず、両ゾーン間の移動コストによる減衰効果をも盛り込んだ。本研究では、佐佐木とは異なり、移動コストによる減衰効果は盛り込まない。

上記の理由から、本論文では先験確率を“移動コストによるトリップ数の減衰が起きない場合に、ゾーン i とゾーン j の間にどれだけのトリップが起き得るかを想定し数値化したもの”と見做す。本論文の先験確率はその意味で、微分方程式の境界条件のような存在である（その意味は4章で微分方程式 (22) を解く過程により明らかとなる）。

出発ゾーンに O_i 人の発生量があり、集中ゾーンに D_j 人の集中量があるとき、例えば、 $p_{ij} \propto O_i \times D_j$ とすることが考えられる（た

だし、この設定は t_{ij} の周辺分布であるべき O_i や D_j が t_{ij} の説明変数として登場している、という意味で循環論的であることに注意）。また、出発ゾーンと集中ゾーンの潜在力を各各 P_i ならびに Q_j として、 $p_{ij} \propto P_i^\alpha \times Q_j^\beta$ とする方法も実践的である。潜在力としては、例えばゾーンの人口、事業所数、各種施設数を用いればよく、これらは移動の主体が如何なる潜在力に支配されるべきかに依存する。

なお、佐佐木は p_{ij} を“確率”として（すなわち全ての i, j について加算すれば 1 となるように）設定しているが、実は、 p_{ij} を正の定数倍してもエントロピーモデルの分布交通量の結果には影響しない。その意味では、これを先験確率と呼ぶよりも“先験的トリップ強度”あるいは本論文の主旨に沿って更に具体的に言えば“移動コストがゼロのときに発生し得るゾーン間トリップ数に比例する量”とも呼ぶ方が実態を正しく表現しているように思われる。

ただし、 p_{ij} の和を 1 にすれば計算が楽なので、本論文でも佐佐木に倣い、次を仮定しておく。

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1 \quad (7)$$

もしも前出の例のように、 $p_{ij} \propto P_i^\alpha \times Q_j^\beta$ ならば次式の通り。

$$p_{ij} = P_i^\alpha Q_j^\beta / \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J P_i^\alpha Q_j^\beta \quad (8)$$

さて、関数 $w(\{t_{ij}\})$ の最大化と、その対数 $\ln w(\{t_{ij}\})$ の最大化は等価である（対数関数は単調増加だから）。

$$\ln w(\{t_{ij}\}) = \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \ln t_{ij}! + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln p_{ij} \quad (9)$$

このままでは $\ln t_{ij}!$ の部分が微分できないので、スターリングの公式「 N が大きいとき $\ln N! \simeq N \ln N - N$ 」を用いて (9) を近似する。

$$\ln w(\{t_{ij}\}) \simeq \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln p_{ij} \quad (10)$$

総コスト制約 (4) を採択し、(1)、(2) の採否による 4 パターンを与え、ラグランジュの未定乗数法により (10) の右辺を最大化すれば、生起確率最大化エントロピーモデルの 4 類型が導出される（図 3）。

3.2 ウィルソンのモデルとの比較・検討

上述の通り、生起確率最大化エントロピーモデルの数学的な手続きはウィルソンのモデルと殆ど同様である。しかし、これに含まれる先験確率 p_{ij} を発生ゾーンや集中ゾーンの潜在力の冪乗に比例するものと設定して無制約型や発生制約型の分布交通量を求めれば、古典的な（つまりニュートンの万有引力の式のアナロジーとしての）重力モデルとハフモデルを直接的に導出できる、という長所を持つ。実は、ウィルソンのエントロピーモデルの枠組み（ラグランジュ関数によるエントロピー最大化）は、古典的な重力モデルやハフモデルを直接的には生み出せない（4 章の (14) 式の箇所でも詳述する）。

なお、上述で“直接的には生み出せない”と表現したのは、間接的には生み出せるからである。青木¹⁾ の pp. 43 - 44 に、発生・集中制約型ウィルソンモデルの結果からスタートして、(i) 集中量を未知とする、(ii) 発生量を未知とする、(iii) 発生・集中量を共に未知とする、というシナリオで、ハフモデル、集中制約モデルならびに無制約型の重力モデルが導かれることが記述されている。それでも、生起確率

最大化エントロピーモデルがラグランジュ函数を通じて、たちまちに古典的な重力モデルやハフモデルを与えることの“説明の道具としての意味”はある。そして何よりも、無制約型重力モデルの理解を助け(4章)、新しいパラメタ推定法を提供できる(6章)という美德を生起確率最大化エントロピーモデルは持っている。

なお、生起確率最大化エントロピーモデルの p_{ij} を定数で与えれば、ウィルソンのモデルに一致する。つまり前者は一般化モデルだが、ウィルソンのモデルに無条件で優る訳ではない。なぜならば、発生・集中制約型の先験確率 p_{ij} は調整係数に吸収されてしまい、結局はウィルソンのモデルに帰着するからである【附録 1A】。両側制約の場合は、エントロピーモデルに先験確率を導入する甲斐はない。

4. 無制約型の生起確率最大化エントロピーモデル

4.1 ラグランジュの未定乗数法による導出

総コスト制約(4)は生かし、発生制約条件(1)と集中制約条件(2)を外す。そして(1)、(2)の代わりに総トリップ数制約条件(3)を導入し、エントロピー最大化のためのラグランジュ函数を作る。

$$L(\{t_{ij}\}; \xi, \gamma) = \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln p_{ij} + \xi \left(T - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \right) + \gamma \left(C - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} c_{ij} \right) \quad (11)$$

ξ と γ はラグランジュ乗数である。これによる極値のための条件は

$$\frac{\partial L}{\partial t_{ij}} = -\ln t_{ij} + \ln p_{ij} - \xi - \gamma c_{ij} = 0 \quad (12)$$

と(3)と(4)である。上式を変形すると次を得る。

$$t_{ij} = e^{-\xi} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (13)$$

ここで $k = e^{-\xi}$ とおいたものを無制約型の重力モデルと呼ぼう。

$$\text{【無制約型の重力モデル】 } t_{ij} = k p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (14)$$

言うまでもないことであるが、上記の c_{ij} の代わりに $\ln c_{ij}$ を用いると冪型のモデル ($t_{ij} = k p_{ij} c_{ij}^{-\gamma}$) を得る。

ここで $p_{ij} = 1$ とすれば、ウィルソンのモデルに帰着し、(14) が $t_{ij} = k \exp(-\gamma c_{ij})$ 、すなわち(定数)×(距離減衰の項)という形になる。このように、ウィルソンのエントロピー最大化が与える無制約型重力モデルが、発生量や集中量に関わる強度を反映しないのは、勿論それを規定する制約条件を設定していないからである。

ここで、特に先験確率が各ゾーンの潜在力 (P_i ならびに Q_j) の冪乗に比例するものとしよう： $p_{ij} \propto P_i^\alpha \times Q_j^\beta$ 。このとき先験確率は(8)で与えられるから、これを(14)に代入すると、当然のことながら、周知の無制約型の重力モデルを得る。

$$t_{ij} = k' P_i^\alpha Q_j^\beta e^{-\gamma c_{ij}} \quad (15)$$

ただし、次を定義した：

$$k' = k \left/ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J P_i^\alpha Q_j^\beta \right. \quad (16)$$

4.2 解析学的な吟味による重力モデルの解釈

(14)の導出は、ウィルソンのモデルが距離減衰を結果として導い

たような驚き(2.1節で述べた)を与えるものではない。しかし(14)の結果に前出の係数 k に関する吟味を加えることにより、このモデルがとても興味深い性質を有することが明らかになる。生起確率最大化エントロピーモデルから見たときに、無制約型重力モデルとは、つまるところ何をもたらすものなのか。これが明示できるのである。そのために、(14)を(3)と(4)に代入する。

$$T = k \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} = k f(\gamma) \Rightarrow k = \frac{T}{f(\gamma)} \quad (17)$$

$$C = k \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} = -k f'(\gamma) \Rightarrow k = -\frac{C}{f'(\gamma)} \quad (18)$$

ただし次を定義した。

$$f(\gamma) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (19)$$

(17)を(14)に代入すれば

$$t_{ij} = \frac{T}{f(\gamma)} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (20)$$

である。また(18)を(14)に代入すれば

$$t_{ij} = \frac{C}{-f'(\gamma)} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (21)$$

である。いずれにしても、ここで得られた無制約型モデル(重力モデル)の未知パラメタは本質的に γ のみである。無制約型重力モデルの調整係数は距離抵抗 γ に連動するのである。

あるいは次のようにも説明出来る：無制約型重力モデルは、先験確率 p_{ij} と観測データ t_{ij} との相違を埋め合わせるためにコスト c_{ij} に対する反応のみを考えているので、1つのパラメタしか存在しない。

さて、ここで(20)と(21)から次の関係式を得る。

$$\frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)} = -\frac{C}{T} \quad (22)$$

この微分方程式は直ちに解けて次を得る。

$$\ln f(\gamma) = -\frac{C}{T} \gamma + K \quad (K \text{ は積分定数}) \quad (23)$$

(19)と(7)から、 $\gamma = 0$ で $f(0) = 1$ だから、積分定数が $K = 0$ と特定される。こうして次を得る。

$$f(\gamma) = \exp\left(-\frac{C}{T} \gamma\right) = e^{-\bar{c} \gamma} \quad (24)$$

ただし、 $\bar{c}$ は地域全体での総コスト C を総移動人数 T で除した実質的な“平均移動コスト”を意味している：

$$\bar{c} = C/T \quad (25)$$

(24)を(17)に代入して

$$k = T e^{\bar{c} \gamma} \quad (26)$$

を得る。これを(14)に代入すると、次の結果を得る。

$$t_{ij} = T p_{ij} e^{-\gamma(c_{ij} - \bar{c})} = \bar{t}_{ij} e^{-\gamma(c_{ij} - \bar{c})} \quad (27)$$

ここで $\bar{t}_{ij} = T \times p_{ij}$ は総トリップ数を先験的確率 p_{ij} で比例配分したものであり、移動コストによるトリップ数の減衰が全く起きないときのゾーン間トリップ数を意味している。

このように、分布交通量 t_{ij} の多寡が、移動コスト c_{ij} の平均コス

ト $\bar{c}$ からの乖離によって決まる構造を持つことが示される．具体的には次のようにまとめることができる：(i) $c_{ij} < \bar{c}$ のとき $t_{ij} > \bar{t}_{ij}$ ；(ii) $c_{ij} = \bar{c}$ のとき $t_{ij} = \bar{t}_{ij}$ ；(iii) $c_{ij} > \bar{c}$ のとき $t_{ij} < \bar{t}_{ij}$ ．

重力モデルとは、移動コストがゼロのときのトリップ数 $\bar{t}_{ij}$ を、移動コスト c_{ij} の平均移動コスト $\bar{c}$ からの乖離に応じて割り引くシステムであり、割り引の度合いを決めるパラメタが γ なのだ．

この結果そのものは、直ちに実務に役立つわけではないが、“重力モデルとはどのようなものか”を生起確率最大化エントロピーモデルを通して深く理解するために寄与している．なお、実務的観点から言えば、例えば発生制約型の重力モデルを非集計ロジットモデル^{3),17)}と見なすことにより、小サンプルによるパラメタ推定が可能となる、といった技術の今日の展開が重要であろう．

最後に、ラグランジュ関数(11)を作るときに、総トリップ制約を組み込まない方法もある．この場合も無制約型の重力モデルが導かれるが、これに対しては、あまり深みのある理論は展開できない【附録2】．また同様に、総移動コスト制約を組み込まない方法も考えられるが、この場合は、そもそも重力モデルが導かれない【附録3】．

5. パラメタの一意性

(19), (23) よりパラメタ γ に関して次が成立する．

$$\ln \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} = -\frac{C}{T} \gamma \quad (28)$$

この式の左辺と右辺を各々 $\phi(\gamma)$ ならびに $\psi(\gamma)$ と定義する．

$$\phi(\gamma) = \ln \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (29)$$

$$\psi(\gamma) = -\frac{C}{T} \gamma \quad (30)$$

直ちに $\phi(0) = 0$ かつ $\psi(0) = 0$ が分かる．すなわち $\gamma = 0$ は方程式(28)の自明な(そして役に立たない)解である．我々の興味は、(28)が $0 < \gamma$ に解を持つかどうか、そしてそれが唯一かどうかである．これを確かめるために、 $\phi(\gamma)$ と $\psi(\gamma)$ の形状を吟味しよう．

まず $\phi(\gamma)$ の微係数は負値だから、 $\phi(\gamma)$ は単調減少関数である．

$$\phi'(\gamma) = -\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}} < 0 \quad (31)$$

また $\gamma = 0$ での傾きを調べると次式の通りである．

$$\phi'(0) = -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} \quad (32)$$

$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij}$ は、移動コストによるトリップ数の減衰を全く考慮しないときの先験的確率 p_{ij} を用いたゾーン間移動コストの平均値である．一方、 $\psi(\gamma)$ の傾き C/T は、移動コストによるトリップ数の減衰が生じた末の総移動コスト C を総トリップ数 T で除した(謂わば)“実質の”ゾーン間平均移動コストである．よって、一般に

$$\frac{C}{T} < \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} \quad (33)$$

でなければならない．もしもこの不等式が満たされなければ、そもそも分布交通量に移動コストによる減衰効果が存在しないことになり、エントロピーモデルそのものに意味がない．(33)式は定理では

なく、(順当な)“工学的要請”であることに注意をせられたい．

(32), (33), (30) より次が成立する：

$$\phi'(0) = -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} < -\frac{C}{T} = \psi'(0) \quad (34)$$

つまり原点の右側近傍で $y = \phi(\gamma)$ は $y = \psi(\gamma)$ の下にある(図4)．

続いて $\phi(\gamma)$ の二階の微係数を求めると次式の通りである．

$$\phi''(\gamma) = \frac{F}{\left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \right)^2} \quad (35)$$

ただし

$$F = \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij}^2 p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \right) \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \right) - \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \right)^2 \quad (36)$$

である．ここで $a_{ij} = c_{ij} \sqrt{p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}$ かつ $b_{ij} = \sqrt{p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}$ とおけば、Cauchy-Schwarzの不等式

$$F = \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J b_{ij}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} b_{ij} \right)^2 \geq 0 \quad (37)$$

が成り立つ．上式で等号が成り立つのは

$$a_{11} : a_{12} : \dots : a_{IJ} = b_{11} : b_{12} : \dots : b_{IJ} \quad (38)$$

のときに限る．今回の文脈でこれが成立するのはゾーン間移動コスト c_{ij} が i と j に依らず一定である場合に相当する．都市での移動を考える場合、当然それは特異なことであり無視し得る．このように F が正値を取るので、二階の微係数 $\phi''(\gamma)$ は正値となり、 $\phi(\gamma)$ が狭義の凸関数であることが分かる．このことから、曲線 $y = \phi(\gamma)$ と直線 $y = \psi(\gamma)$ が $0 < \gamma$ の範囲で交わるならば、その交点はただ1つであることが保証される．以下では、そのような交点実際に存在することを述べよう．

曲線 $y = \phi(\gamma)$ と直線 $y = \psi(\gamma)$ の交点が存在すれば、交点の右側では当然 $\psi(\gamma) < \phi(\gamma)$ となる．この不等式が成立するためには、十分に大きな γ について $\psi(\gamma)/\phi(\gamma) > 1$ であればよい($\gamma > 0$ のとき ψ も ϕ も共に負値であることに注意)． $\gamma \rightarrow +\infty$ のとき $\psi(\gamma) \rightarrow -\infty$ かつ $\phi(\gamma) \rightarrow -\infty$ だから、まずはl'Hospitalの定理を適用する．

図4 $y = \phi(\gamma)$ と $y = \psi(\gamma)$ の交わりの様子

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\gamma)}{\phi(\gamma)} &= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\psi'(\gamma)}{\phi'(\gamma)} \quad (\because \text{L'Hospital の定理}) \\
&= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{-C/T}{-\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}} \\
&= \frac{C}{T} \left/ \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}} \right. \quad (39)
\end{aligned}$$

上式最後の極限記号の部分を見ると、その(分子)と(分母)の双方がゼロに収束してしまうので、若干の工夫をして極限をつきとめたい。そのために移動コスト c_{ij} の最小値に着目し、一般性を失うことなく

$$c_{11} = \min\{c_{ij}\} \quad (40)$$

と約束する。ここで(分子)ならびに(分母)を $p_{11}e^{-\gamma c_{11}}$ で除して書き換えると、次を得る。

$$\frac{(\text{分子})}{p_{11}e^{-\gamma c_{11}}} = c_{11} \left\{ 1 + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \frac{c_{ij}}{c_{11}} \cdot \frac{p_{ij}}{p_{11}} e^{-\gamma(c_{ij}-c_{11})} \right\} \quad (41)$$

$$\frac{(\text{分母})}{p_{11}e^{-\gamma c_{11}}} = 1 + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \frac{p_{ij}}{p_{11}} e^{-\gamma(c_{ij}-c_{11})} \quad (42)$$

$c_{ij} > c_{11}$ のとき $e^{-\gamma(c_{ij}-c_{11})} \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow +\infty$) であることから、

$$\frac{(\text{分子})}{(\text{分母})} = c_{11} \frac{1 + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \frac{c_{ij}}{c_{11}} \cdot \frac{p_{ij}}{p_{11}} e^{-\gamma(c_{ij}-c_{11})}}{1 + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \frac{p_{ij}}{p_{11}} e^{-\gamma(c_{ij}-c_{11})}} \rightarrow c_{11} \quad (\gamma \rightarrow +\infty) \quad (43)$$

を得る (c_{ij} の最小値を与える $\{i, j\}$ ペアが複数存在してもよい)。移動コストの最小値に収束するのである。これにより最終的に

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\gamma)}{\phi(\gamma)} = \frac{C}{T} \left/ \min\{c_{ij}\} > 1 \quad (44)$$

を得る。前述の工学的要請の箇所で述べた通り、 C/T は、移動コストによるトリップ数の減衰が生じた末の総移動コスト C を総トリップ数 T で除した(謂わば)“実質の”ゾーン間平均移動コストである。したがって $C/T > \min\{c_{ij}\}$ の成立は言うまでもない。

以上から、次の定理の成立が示されたことになる。

【無制約型重力モデルのパラメタに関する一意性の定理】

分布交通量の実測値に基づいて算出される総コストと総トリップ数を C ならびに T と表す。ゾーン i から j への移動コストを c_{ij} で、先験確率を p_{ij} で表す。ここで不等式条件

$$\frac{C}{T} < \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} p_{ij} \quad (33 \text{ 再})$$

が成り立つものとする。このとき、生起確率最大化エントロピーモデルから誘導される無制約型の重力モデル

$$t_{ij} = k p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (14 \text{ 再})$$

において、距離減衰係数 γ が満たすべき方程式

$$\ln \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} = -\frac{C}{T} \gamma \quad (28 \text{ 再})$$

は自明解 ($\gamma = 0$) の他に、正值の唯一の解 $\gamma = \hat{\gamma}$ を持つ。

この定理から、(28) を数値的に解けば正の未知パラメタ $\gamma = \hat{\gamma}$ が唯一つ得られることが保証される。移動コストならびに先験確率が所与のときには、 $\hat{\gamma}$ 値を支配するのは実質の平均移動コストのみである。そして、(26) 式で示した通りに、 $\hat{\gamma}$ が調整係数 $k = \hat{k}$ を規定する：

$$\hat{k} = T e^{\bar{c} \hat{\gamma}} = T \exp \left(\frac{C}{T} \hat{\gamma} \right) \quad (45)$$

このように、本モデルのパラメタ算出に必要なデータは (i) 移動コスト $\{c_{ij}\}$, (ii) 先験確率 $\{p_{ij}\}$, (iii) 平均移動コスト $\bar{c} = C/T$, (iv) 総トリップ数 T であり、実際の分布交通量 $\{T_{ij}\}$ は必要としない。

6. パラメタ推計のアルゴリズム

ここでは、先験確率が出発ゾーンと到着ゾーンの潜在力の冪乗に比例する場合、すなわちモデル式

$$t_{ij} = k' P_i^\alpha Q_j^\beta e^{-\gamma c_{ij}} \quad (15 \text{ 再})$$

のパラメタを推定するアルゴリズムを記述する。過去の実験上、都市や地域に関する分析・研究に、このタイプが利用される場合が非常に多いことを勘案してのことである。

ただし、上記のモデル式を本論文の文脈で表現すると、前出の (8) 式の通りに先験確率を (α, β) の関数として

$$p_{ij}(\alpha, \beta) = P_i^\alpha Q_j^\beta \left/ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J P_i^\alpha Q_j^\beta \right. \quad (46)$$

と想定し、無制約型の重力モデル式

$$t_{ij} = k p_{ij}(\alpha, \beta) e^{-\gamma c_{ij}} \quad (47)$$

を導入したものに他ならない。このとき (16) 式の関係が成立しているのは前述した通り。そこで、任意の (α, β) に対して、(46) の先験確率の下で (47) のパラメタ γ を求める方法を記述しておき、得られる分布交通量が実データを上手く再現するように (α, β) を決める、という方法を採用する。そのために次の手続きを準備しておく。

【任意の (α, β) に応じて無制約型重力モデルのパラメタ推定を行い、実測値からの残差の平方和を求める手続き】

(準備) 設定された移動コスト $\{c_{ij}\}$ と分布交通量の実データ $\{T_{ij}\}$ に基づいて次を求めておく。

$$\text{総トリップ数 } T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij} \text{ ならびに}$$

$$\text{総移動コスト } C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} T_{ij}$$

(Step 1) α ならびに β を与える。

$$(\text{Step 2}) \quad p_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{P_i^\alpha Q_j^\beta}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J P_i^\alpha Q_j^\beta} \text{ を定義した上で}$$

$$\ln \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij}(\alpha, \beta) e^{-\gamma c_{ij}} = -\frac{C}{T} \gamma \text{ を解き、} \gamma = \hat{\gamma}(\alpha, \beta) \text{ を}$$

数値的に求める (Newton-Raphson 法)。

(Step 3) $\hat{k}(\alpha, \beta) = T e^{(C/T)\hat{\gamma}(\alpha, \beta)}$ を算出する.

(Step 4) $t_{ij} = \hat{k}(\alpha, \beta) p_{ij}(\alpha, \beta) e^{-\hat{\gamma}(\alpha, \beta) c_{ij}}$ と実測値 T_{ij} の残差平

$$\text{方和} \quad h(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} - T_{ij})^2 \text{ を算出する.}$$

上で記述された残差平方和 $h(\alpha, \beta)$ を最小にする $(\alpha, \beta) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を数値的に求めればよいのは言うまでもない. これを完全に自動に行うためには, h の α ならびに β による数値微分に基づく非線形最小化を実行すればよい. ただし, そのような煩雑なプログラミングに依らずとも, 汎用の数式処理ソフトウェアを援用して $h = h(\alpha, \beta)$ の等高線を描けば, それに基づいて簡単に最小解を求めることができる. すなわち, 等高線から読み取れる h の最小値の周辺に設けた細かな格子点で与えられる (α, β) に対して函数 $h(\alpha, \beta)$ の値を算出し, その中で最小値を与えるものを $(\alpha, \beta) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ とすればよい. 解の精度を高めたければ, 計算された最小値の近傍で, さらに細かな格子点を設け, 同様の手続きを繰り返せばよい.

こうして得られる解が常に大域的な最適解であるかどうかは明らかでない. ただし, 日本の各地方の県間移住データに関して図 5 や図 6 を (広範な定義域で) 描写した限りにおいては, 解 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ が一意でない状況はなかった.

なお, もしもパラメタ α と β が所与であれば (例えば $\alpha = \beta = 1$ と想定しておれば), 上記の (α, β) に関する最適化のルーチンが不要である. その場合は, 唯一つの非線形方程式 $\phi(\gamma) = \psi(\gamma)$ の数値解 $\gamma = \hat{\gamma}$ を求め, 調整係数を $\hat{k} = T \exp(\bar{c}\hat{\gamma})$ として求める, という至極単純な手続きで事足りることは言うまでもない.

7. 数値例ならびに従来法との比較

実例として関東の 7 都県間の移住データを取り上げ, 前節の方法

図 5 関東都県間移住データ (1995 年～2000 年) に新手法による無制約型重力モデルを適用したときの残差平方和 $h(\alpha, \beta)$ の概形

図 6 関東都県間移住データ (1995 年～2000 年) に対して新手法に基づく無制約型重力モデルを適用したときの残差平方和 $h(\alpha, \beta)$ の等高線と最小解 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (1.7468, 1.4300)$

を適用し, 従来の二つの方法 (線形最小二乗法ならびに非線形最小二乗法) と比較してみる. 平成 12 年国勢調査による「1995 年から 2000 年にかけての移住」の OD データは表 1 に示す通りである.

表 1 関東地方 7 都県の 1995 年から 2000 年にかけての移住状況 [単位: 人]

出発\到着	茨城県	栃木県	群馬県	埼玉県	千葉県	東京都	神奈川県
茨城県	—	11,746	3,428	18,785	30,907	42,877	19,467
栃木県	9,488	—	9,532	16,249	8,136	23,862	11,957
群馬県	3,187	8,606	—	20,516	6,602	23,971	10,354
埼玉県	19,373	18,310	19,627	—	51,804	179,147	52,476
千葉県	33,639	8,418	6,020	49,169	—	149,549	59,671
東京都	36,927	21,017	18,832	231,196	165,068	—	249,056
神奈川県	19,012	12,970	10,155	49,037	61,259	225,673	—

(出典: 統計局『平成 12 年国勢調査』人口移動集計その 1)

表 2 関東地方 7 都県間に設定した距離行列 [単位: km]

出発\到着	茨城県	栃木県	群馬県	埼玉県	千葉県	東京都	神奈川県
茨城県	—	63.51	106.98	74.82	69.23	85.66	112.47
栃木県	63.51	—	67.92	73.25	101.33	96.97	124.81
群馬県	106.98	67.92	—	64.02	116.95	89.05	108.61
埼玉県	74.82	73.25	64.02	—	57.53	32.37	56.33
千葉県	69.23	101.33	116.95	57.53	—	45.27	61.67
東京都	85.66	96.97	89.05	32.37	45.27	—	33.32
神奈川県	112.47	124.81	108.61	56.33	61.67	33.32	—

表 3 関東地方 7 都県の 1995 年の人口

都県名	人口 [千人]	就業者数 [千人]
茨城県	2,956	1,516
栃木県	1,984	1,041
群馬県	2,004	1,051
埼玉県	6,759	3,513
千葉県	5,798	2,992
東京都	11,774	6,310
神奈川県	8,246	4,273

(出典: 統計局『平成 12 年国勢調査』)

図7 3つの手法を適用したときのモデルによる計算値と実測値の関係

この移住トリップ数を説明するために、(1) 発生を促す潜在力（前出の P_i ）として夜間人口を、(2) 集中を促す潜在力（前出の Q_j ）として就業者数を、(3) 都県間の移動コスト（前出の c_{ij} ）として都県庁所在地間の大圏距離を採用した無制約型重力モデルを採用する。これらは表2ならびに表3に示す通りである。

前述の【任意の (α, β) に応じて無制約型重力モデルのパラメタ推定を行い、実測値からの残差の平方和を求める手続き】における (Step 1) の総トリップ数 T ならびに総移動コスト C は次の通りに算出される： $T = 2,027,075$ 人、 $C = 105,861,847$ 人・km。そして、(Step 4) で定義された残差平方和 $h(\alpha, \beta)$ の概形を示すと図5の通りであり、その等高線は図6のように与えられ、最小解が $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (1.7468, 1.4300)$ と算出される（残差平方和は $h(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 8.982 \times 10^9$ 人²）。そして、距離抵抗パラメタならびに調整係数も次の通りに算出された： $\hat{\gamma} = 0.006132 \text{ km}^{-1}$ 、 $\hat{k} = 2.792 \times 10^6$ 人。

ここで式(16)により係数 k' の推定値 $\hat{k}'$ を求めると $\hat{k}' = 1.6974 \times 10^{-7} \text{ 人}^{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}}$ となり、次の重力モデル式が得られた。

$$t_{ij} = 1.6974 \times 10^{-7} P_i^{1.7468} Q_j^{1.4300} e^{-0.0061317 \times c_{ij}} \quad (48)$$

このときのモデルによる計算値と実測値の関係を図7(a)に示す。相関係数は0.9797である。

比較のために(15)式を対数線形化し、線形最小二乗法によってパラメタを求め、計算値と実測値の関係を示すと、図7(b)の通りである。相関係数は0.9774である。

さらに、この対数線形化によるパラメタ値を初期値とする非線形最小二乗法によって(15)式のパラメタ推定を行った。その結果を図7(c)に示す。相関係数は0.9857である。

相関係数を見ると（線形最小二乗法）＜（新手法）＜（非線形最小二乗法）の順に記述性が高くなっていることが分かる。1. 緒言でも述べたが、従来法は調整係数が距離抵抗パラメタに連動する、という構造を前提としていないから、実測 OD データへのフィットの面で有利であることは言うまでもない。非線形最小二乗法による結果、すなわち図7(c)の相関係数が最も高くなっているのは当然のことである。しかし、新手法の結果も、実測 OD データへのフィットの面で十分に健闘しているように思われる。

本研究の生起確率最大化エントロピーモデルから導出される無制約型重力モデルの本質は、調整係数が距離減衰パラメタに連動する、

という点にあった。この謂わば構造を付与された無制約型重力モデルが一定レベルの記述力を有することが確認された。

8. 結語

この論文では、無制約型重力モデルを殊更に生起確率最大化エントロピーモデルから導き、その解析学的構造に着目した。得られたのは、(1) 無制約型重力モデルが（移動コストがゼロのときの平均分布交通量を）移動コストによって割り引くシステムであるという理論的解釈、(2) 調整係数が距離抵抗パラメタに連動する構造の同定、ならびに(3) 見通しよくパラメタ推定を行うための新しい方法、の三点であった。(2)は、距離抵抗パラメタや調整係数を異なる地域に安易に移転することの危険性を示唆している。加えて、移動コスト $\{c_{ij}\}$ と先験確率 $\{p_{ij}\}$ が所与のとき、平均移動コスト $\bar{c}(=C/T)$ ならびに総トリップ数 T さえ何らかの方法で入手あるいは想定されておれば、個別の分布交通量の情報を用いずとも重力モデルの距離抵抗 $\gamma = \hat{\gamma}$ と調整係数 $k = \hat{k}(=\exp(\bar{c}\hat{\gamma}))$ が直ちに算出できることも明らかになった。これについては5章の最後で言及した通りである。

空間相互作用モデル族は、建築計画学の地域施設計画分野において周知のものであり、特に「需要が（施設サービスの）供給水準に対して弾力的である場合には無制約型のモデルを用いることが知られている（谷村¹⁵⁾のp. 353）。本研究はこの「サービス供給水準に対する弾力性」を持った重力モデル式を、平均移動コストと総トリップ数の制約下で簡便に運用する方法を与えるものであり、実用上ならびに理論研究上の意義を有するものと考えられる。

生起確率最大化エントロピーモデルは、ウィルソンのエントロピーモデルから総コスト制約を、佐佐木のエントロピーモデルから先験確率（ただし移動コストによる減衰成分は含まない）に基づく多項分布の確率函数最大化のアイデアを受け継ぐことによって記述される。このことは2章で述べた通りである。

翻って、地域施設計画を扱う建築学分野、都市交通を扱う土木計画学分野、そして地理学と都市解析学の分野における二つのエントロピーモデルの取り扱われ方に目を転じてみよう。本論文の参考文献の中の、エントロピーモデルの技術を紹介した書物を見ると、地理学ならびに海外の文献に基礎をおくタイプ^{1),5),7),9),12),15)}ではウィルソンのエントロピーモデルが主眼に据えられ、佐佐木のエントロピーモデルへの言及は皆無である。一方、交通計画の実践的展

開を主眼とする書物を見ると、佐佐木のエントロピーモデルのみを紹介するタイプ⁸⁾と、佐佐木モデルを基軸モデルとしつつウィルソンのモデルにも言及するタイプ^{2),14)}に分かれている。ウィルソンモデルと佐佐木モデルは、現場での適用という観点からすると、非常に似通った存在であることは周知のことであろう。にも関わらず、我が国の書物における二つのエントロピーモデルの取り上げ方には大きく異なる二つの流れが生じてしまっている。

今回、筆者は周知の二つのエントロピーモデルを再訪して、空間相互作用に関するささやかな発見を述べた。それは、どちらかを否定するのではなく、双方の論理的な長所を見たことによっている。

謝辞

匿名の査読者から指数型重力モデルのパラメタに関する一意性の定理の証明に不十分な点があるというご指摘を頂戴したお陰で、証明を完全なものにすることができました。また、本論文が建築学研究において果たす役割に関し記述すべきである、という旨のアドバイスを頂戴したお陰で、論文を良い方向に改訂することができました。お二人の査読者の懇切ご丁寧で建設的なご助言に対して、深甚なる謝意を表します。

参考文献

- 1) 青木義次：建築計画・都市計画のための数学－規模と安全の数理－（工学のための数学 EKM-A5），数理工学社，2006
- 2) 土木学会編：交通需要予測ハンドブック，技報堂出版，1981
- 3) 土木学会土木計画学研究委員会編：非集計行動モデルの理論と実際，社団法人土木学会，1995
- 4) Gould, P. : Pedagogic Review, *Annals of the Association of American Geographers*, Vol. 62, pp. 689 – 700, 1972
- 5) 石川義孝：空間的相互作用モデル－その系譜と体系－，地人書房，1988
- 6) 栗田 治：輸送機関の発達が地域の商業売上に与える影響－ハフ・モデルに基づく解析学的アプローチ，都市計画論文集，No. 37, pp. 55 – 60, 2002
- 7) 松本嘉司：交通計画学，培風館，1985
- 8) 森地 茂，山形耕一編著：交通計画（新体系土木工学 60），技報堂出版，1993
- 9) 野上道男・杉浦芳夫：パソコンによる数理地理学演習，古今書院，1986
- 10) 大山達雄：最適化モデル分析，日科技連，1993
- 11) Pooler, J. : An extended family of spatial interaction models, *Progress in Human Geography*, Vol. 18, No. 1, pp. 17–39, 1994
- 12) Roy, J. R. : *Spatial Interaction Modelling – A Regional Science Context* – , Springer, 2004
- 13) 佐佐木綱：トリップの OD 分布を求める確率論的方法，交通工学，2 – 6, pp. 12 – 21, 1967
- 14) 佐佐木綱監修，飯田恭敬編著：交通工学，国民科学社，1992
- 15) 谷村秀彦：地域施設計画モデル，地域施設計画（新建築学大系 21）（新建築学大系編集委員会編），彰国社，pp. 309 – 386, 1984
- 16) Wilson, A. G. : *Entropy in Urban and Regional Modelling*, Pion Limited, London, 1970
- 17) 屋井鉄雄：非集計分析による交通需要予測，交通計画（新体系土木工学 60）（森地 茂・山形耕一編著，土木学会編），技報堂出版，pp.135 – 174, 1993

附録

【附録 1】 生起確率最大化エントロピーモデルの類型とウィルソンのエントロピーモデルとの関係

【附録 1A】 発生・集中制約型－結局ウィルソンのモデルと等価－

発生制約 (1)，集中制約 (2) と総コスト制約 (4) の下で対数エントロピー関数 (10) を最大化するためのラグランジュ関数を作る ($\{\lambda_i\}$, $\{\mu_j\}$ と γ はラグランジュ乗数)。

$$L = \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln p_{ij} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left(O_i - \sum_{j=1}^J t_{ij} \right) + \sum_{j=1}^J \mu_j \left(D_j - \sum_{i=1}^I t_{ij} \right) + \gamma \left(C - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} c_{ij} \right) \quad (49)$$

これによる極値のための条件は

$$\frac{\partial L}{\partial t_{ij}} = -\ln t_{ij} + \ln p_{ij} - \lambda_i - \mu_j - \gamma c_{ij} = 0 \quad (50)$$

と (1)，(2)，(4) である。上式を変形して $t_{ij} = e^{-\lambda_i - \mu_j} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}$ を得るが，これを (1) と (2) に代入し，ウィルソンのモデルと同様の変形を施すと，次の発生・集中制約型エントロピーモデル式を得る。

$$t_{ij} = A_i O_i B_j D_j p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (51)$$

ただし A_i , B_j は次の通りである。

$$A_i = \left(\sum_{j=1}^J B_j D_j p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \right)^{-1} \quad (52)$$

$$B_j = \left(\sum_{i=1}^I A_i O_i p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \right)^{-1} \quad (53)$$

ここで便宜上，二つの因子 u_i と v_j を“適当に”選び， p_{ij} をその積で $p_{ij} = u_i v_j$ と表す。これを上記のエントロピーモデル式に代入し， $A'_i = u_i A_i$ ならびに $B'_j = v_j B_j$ と定義すると，次を得る。

$$t_{ij} = A'_i O_i B'_j D_j e^{-\gamma c_{ij}} \quad (54)$$

ただし A'_i , B'_j は次の通りである。

$$A'_i = \left(\sum_{j=1}^J B'_j D_j e^{-\gamma c_{ij}} \right)^{-1} \quad (55)$$

$$B'_j = \left(\sum_{i=1}^I A'_i O_i e^{-\gamma c_{ij}} \right)^{-1} \quad (56)$$

これはウィルソンのエントロピーモデルそのものである。すなわち，わざわざ先験確率 p_{ij} を導入して分布パターンの生起確率を最大化したもの，(生起確率ではなく) 多項係数を最大化するウィルソンの結果に帰着した。こと発生・集中制約型に限って言えば，ウィルソンモデルの代わりに生起確率最大化モデルを導入する意味は全くない。

【附録 1B】 発生制約型－ハフモデルの導出－

発生制約 (1) と総コスト制約 (4) の下で (10) を最大化するためのラグランジュ関数を作る ($\{\lambda_i\}$ と γ はラグランジュ乗数)：

$$L = \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln p_{ij} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left(O_i - \sum_{j=1}^J t_{ij} \right) + \gamma \left(C - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} c_{ij} \right) \quad (57)$$

これにより，極値のための条件は

$$\frac{\partial L}{\partial t_{ij}} = -\ln t_{ij} + \ln p_{ij} - \lambda_i - \gamma c_{ij} = 0 \quad (58)$$

と (1) ならびに (4) である。上式を変形すると次の解が得られる。

$$t_{ij} = e^{-\lambda_i} p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} = k_i p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (59)$$

ただし $k_i = e^{-\lambda_i}$ を定義した。この t_{ij} を発生制約 (1) に代入して k_i について解くと

$$k_i = O_i \left/ \sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \right. \quad (60)$$

だから、これを (59) に代入して次式を得る：

$$t_{ij} = O_i \times \frac{p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{j=1}^J p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}} \quad (61)$$

これが発生制約型の生起確率最大化エントロピーモデルである。なお上記の c_{ij} の代わりに $\ln c_{ij}$ を用いると冪型のモデルが得られる。

(61) 式で $p_{ij} \propto O_i^\alpha D_j^\beta$ とおけば

$$t_{ij} = O_i \times \frac{D_j^\beta e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{j=1}^J D_j^\beta e^{-\gamma c_{ij}}} \quad (62)$$

となり、 β と γ を同定すれば分布交通量 t_{ij} が記述できるモデルとなる。さらに (62) において D_j の代わりにゾーン j の魅力度 S_j を導入すれば

$$t_{ij} = O_i \times \frac{S_j^\beta e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{j=1}^J S_j^\beta e^{-\gamma c_{ij}}} \quad (63)$$

に帰着するが、これは指数型の修正ハフモデル (移動者の効用関数が規模 S_j の対数と移動コスト c_{ij} の線形結合で与えられるときの非集計ロジットモデルとも見做せる⁶⁾) に他ならない。生起確率最大化エントロピーモデルがハフモデルを直接的に与えることが確認できた。他方、ウィルソンのエントロピーモデルは $p_{ij} = 1$ としているので、(61) が

$$t_{ij} = O_i \times \frac{e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{j=1}^J e^{-\gamma c_{ij}}} \quad (64)$$

となってしまう、行き先の魅力度を説明変数とするハフモデルを直接的には構成することができない (間接的にはできること¹⁾ を本文 3.2 節で紹介した)。ただし、生起確率最大化エントロピーモデルは「先験確率の与え方によって如何様にもモデルを調整できる」ものであるから、両者の優劣を述べることにあまり意味がないとも思われるが、

本文中の無制約型とならんで、発生制約型 (そして集中制約型) の場合も、ウィルソンのエントロピーモデルの代わりに生起確率最大化エントロピーモデルを導入することに一応の意味があることが確認された。

【附録 1C】集中制約型

前述の発生制約型と全く対称な構造の計算なので詳述はしない。集中制約型の生起確率最大化エントロピーモデルは次式の通り、

$$t_{ij} = D_j \times \frac{p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}}{\sum_{i=1}^I p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}}} \quad (65)$$

【附録 2】総トリップ数制約を外した生起確率最大化エントロピーモデル

本文 (11) 式のラグランジュ関数から総トリップ数制約を外す、

$$\begin{aligned} L(\{t_{ij}\}; \gamma) = & \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln p_{ij} + \gamma \left(C - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} c_{ij} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

極値のための条件は

$$\frac{\partial L}{\partial t_{ij}} = -\ln t_{ij} + \ln p_{ij} - \gamma c_{ij} = 0 \quad (67)$$

と (4) である。上式を変形すると次を得る、

$$t_{ij} = p_{ij} e^{-\gamma c_{ij}} \quad (68)$$

一応重力モデルの形式となっているが、これの実データ $\{T_{ij}\}$ へのフィットは、先験的な強度 $\{p_{ij}\}$ を如何に設定するか、という工夫に収斂するだけである。それは、無制約型重力モデルに新たな展開を与えるものではない。

【附録 3】総移動コスト制約を外した生起確率最大化エントロピーモデル

本文 (11) 式のラグランジュ関数から総移動コスト制約を外す、

$$\begin{aligned} L(\{t_{ij}\}; \xi) = & \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln p_{ij} + \xi \left(T - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

極値のための条件は

$$\frac{\partial L}{\partial t_{ij}} = -\ln t_{ij} + \ln p_{ij} - \xi = 0 \quad (70)$$

と (3) である。上式を変形すると $t_{ij} = e^{-\xi} p_{ij}$ を得る。 t_{ij} が先験的強度 p_{ij} のみに依存し、移動コストによる減衰はない。これでは勿論重力モデルとは言えないし、分布交通量の記述に役立たない。

(2010年7月27日原稿受理, 2010年11月17日採用決定)