視対象のある部屋のビジビリティに基づく形状最適化

SHAPE OPTIMIZATION OF ROOMS WITH A VISUAL TARGET TO MAXIMIZE ITS VISIBILITY

本間 健太郎^{*1}, 今井 公太郎^{*2}

Kentaro HONMA and Kotaro IMAI

We research theoretically about optimal shapes of rooms such as classrooms with a blackboard, theaters with a stage, and galleries with a painting. (i) A reasonable formula “point-visibility” is proposed from an arbitrary viewpoint, introducing angle-resistance α and distance-resistance β . (ii) As aggregation of the point-visibility “area visibility” is proposed, introducing inequality p . (iii) The optimal room shape to maximize its area-visibility is derived. In conclusion, by determining “ α and β representing human eyesight” and “ p depending on rooms’ usage”, we can immediately acquire the optimal room shape.

Keywords : Visibility; Room shape optimization, Equality; Distance-resistance, Angle-resistance, Solid angle

ビジビリティ, 部屋形状最適化, 公平性, 距離抵抗, 角度抵抗, 立体角

1. はじめに

本論の目的は、部屋の形状を「ビジビリティ」（部屋内にある視対象の見やすさ）という観点から評価し、それに基づき最適な部屋形状を求めることである。想定する視対象は、教室における黒板や教師、劇場におけるステージ、展示室における絵画など多岐にわたるが、その見やすさが部屋形状に影響をおよぼすほど重要だという共通点がある。それら視対象を見やすくさせる部屋の形状について、計画上設計上の指針を得るために、統一的かつ演繹的に論を展開する。具体的には、(i) まず任意の視点からの「ビジビリティ」を表す妥当な関数を提案する（4章）。その提案式は、直観的に理解できて操作的であるだけでなく、視対象を見込む立体角の近似式を広く一般化したものと示される。(ii) 次にビジビリティの妥当な集計方法を提案し、視点を点から面に広げたときの部屋形状の評価値「エリアビジビリティ」を導出する（6章）。エリアビジビリティは、見づらい場所を減らすべき用途（着席した生徒間の公平性を高めたい教室など）も、見やすい場所を増やすべき用途（鑑賞者が鑑賞位置を決められる展示室など）も、包括的に評価できる表現になっている。(iii) 最後にエリアビジビリティを最大化する、最適な部屋の形状を導出する（8章）。ここでは面積を所与とする長方形プランの部屋において、ひとつの壁の中央に視対象を設置したときの、最適な部屋の幅と奥行を求めている。

本論は、上記のプロセスを経て、エリアビジビリティを3つのパラメータを含む形で明確に書き下し、パラメータと最適部屋形状の関係性を明らかにする。この3パラメータのうち2つは、ビジビリティ関数に由来するもので、視対象を斜めに見ることの負の影響度 α と、視対象から遠ざかることの負の影響度 β である。残りの1つのパラメータは、ビジビリティの集計時に導入するもので、ビジビリ

ティ分布の不公平度 p である。まとめると、「 α と β で表される人間の視認感覚や視対象の性質」と「 p で表される部屋の使い方や社会の通念」を、「エリアビジビリティという部屋形状の評価値」ひいては「部屋の最適形状」に直結できるのである。つまり前提条件を決めるとプランニングに役立つ情報が直ちに求まるわけで、従来経験的に行われがちであったビジビリティ評価を客観的に行うための基礎知見として有用だと考えている。

2. 本研究の位置づけ

建築計画・都市計画分野におけるビジビリティの研究は数多く、なかでも外部空間を対象としたものが多い。例えば天空や建築物や並木の見え方について、実測・実験・アンケート・シミュレーションする研究が見られる。これらの大半は調査ベースの研究であるが、理論ベースの研究として、平澤ら¹⁾は、並木の立体角を定式化し、歩行者が移動する際の緑視率の変化を計算している。これに対し本論は、時間変化を扱わない代わりに、線（移動ルート）でなく面（視点が存在する領域）の評価値を議論するものである。

内部空間については、展示室における絵画のビジビリティについての研究がいくつかある。平林ら²⁾は、鑑賞者から絵画までの距離と角度にもとづくビジビリティ分布を定式化し、被験者実験により得られた鑑賞位置の選好順序を再現するような分布パラメータを推定している。ビジビリティの空間分布を考えている点と同じであるが、本論はそれを用いて部屋形状の評価と最適化を行うところに独自性がある。

また本論は広範な対象を一括して議論する。これに対し、より直接的なアプローチとして、設計案の個別検討の手段としてビジビリティ解析を用いる立場がある。佐藤ら³⁾は、劇場の各座席からみた舞

^{*1} 東京大学生産技術研究所 准教授・博士(工学)^{*2} 東京大学生産技術研究所 教授・博士(工学)Assoc. Prof., Inst. of Industrial Science, The Univ. of Tokyo, Dr.Eng.
Prof., Inst. of Industrial Science, The Univ. of Tokyo, Dr.Eng.

台の可視率を、手すりや他の観客までも考慮した緻密なシミュレーションにより計算し、複数プランの比較を行っている。

また本論で行うことを数学的に表現すると、(a)点（視対象の代表点）と(b)長方形領域に一樣分布する点（部屋内の視点）の間の(c)角度つき距離の冪乗（ビジビリティ）を面積分することになる。これは解析的に取り扱うのが難しい問題である。これに關係して栗田⁴⁾は、(a)点と(b)多角形領域に一樣分布する点の間の(c)距離の2乗の平均を求めている。さらにこれを一般化して栗田⁵⁾は、(a)多角形領域に一樣分布する点と(b)多角形領域に一樣分布する点の間の(c)距離の冪乗の平均の近似値を求める手法を開発している。これは一般性の高い方法で、近似式も簡易で扱いやすい。本論ではこれを、(a)点に限定し、かつ(b)長方形に限定する代わりに、(c)距離だけでなく角度を考慮したうえで、厳密解を求めたものだと位置づけられる。

3. 立論のための単純化

我々が暮らすのは3次元空間であるが、本論では以下2つの前提に立ち、議論を「平面上の点」のビジビリティに落とし込む。

3. 1. 視点集合の平面近似

「視対象を見るすべての視点は、近似的に同一の水平面上にある」ことを前提とし、その水平面を「視点集合平面」と呼ぶ（Fig.1の「Plane of viewpoints」）。たとえば展示室の展示物に対する視点集合平面は、立位の鑑賞者における眼の高さの水平面であり、教室の黑板については座位の生徒のそれである。視点集合平面は壁やパネルなどの障害物によって境界づけられる（Fig.1の「Projected wall」）。

3. 2. 視対象の点近似

視対象は面状もしくは3次元的オブジェクトであるので、網膜に映るその像は拡がりをもつ。しかしその拡がり方を示す「立体角」は、「視点」と「視点集合平面上にある視対象の代表点」の位置関係から精度よく換算できる（5.4.で述べる）。そこで視対象をその代表点で近似する。ここでいう代表点とは「視対象の中心から視点集合平面へ下ろした垂線の足」のことである（Fig.1の「Representative point」）。この中心は、通常は重心のことだが、視対象内の情報度分布に偏りがある場合は「情報度分布によって重みをつけた重心」のことだとする。また視点集合平面のうち視対象の代表点を見ることができる領域を「ビジブルエリア」と呼ぶことにする。

Fig.1 Visual target, viewpoint, and coordinate system setting

4. ビジビリティ

本論のゴールは、部屋形状の評価および最適化である。評価対象の部屋空間は3次元であり、前章で述べたように視点集合を「平面」

で近似してもそれは2次元に過ぎない。しかし見やすさは、固定された「視点」——つまり空間内の0次元の「点」——から評価されるべきと考えるのが自然である。そのため段階を踏んで演繹的に論を展開する。本章ではまず「視点からの見やすさ」を議論し、6章において「部屋全体からの見やすさ」を議論する。

4. 1. 座標

「視対象の代表点」を原点としたときの視点*i*の位置を極座標(r_i, θ_i)で表す（Fig.1に重ねて描く）。ここで $r_i (> 0)$ は視距離である。また $\theta_i (0 \leq \theta_i \leq \pi)$ は、視対象が絵画やスクリーンなどの面状オブジェクトのときの、オブジェクト面と視線が成す角を表す。視線がオブジェクト面と直交していれば $\theta_i = \pi/2$ 、一致していれば $\theta_i = 0$ ないし $\theta_i = \pi$ である。ただし、視対象が人物やある種の彫刻などの無方向性オブジェクトのときには、 r_i のみが視点位置の有意意味な変数になる。しかしその場合も、便宜的に θ_i も導入したうえで一般化して論を進めたいので、後述するパラメータ α （視対象を斜めに見ることの負の影響度）をゼロにすることで θ_i の影響をキャンセルする。

4. 2. ビジビリティ関数

ビジビリティとは「視点*i*から視対象を見たときの見やすさの度合い」であり、 $v_i (\geq 0)$ と表す。 v_i は大きい方が望ましい。なお添字の*i*を省略することがある。ビジビリティ v は、ビジビリティ関数 f で記述されるとする。本節では妥当な f を求める。

ビジビリティすなわち見やすさを規定する変数は、視対象の種類や色、視対象内部のパターン、周辺の光環境、観測者の個人属性など、さまざまなものが考えられる。しかし主要な変数は、(i)視対象の大きさ、(ii)視対象と視点の位置関係、の2つと見てよいだろう。ここで(i)を、視対象の「代表的な面積」 $A (> 0)$ で表す。そして(ii)を、4.1.で述べたとおり、(ii-1)視対象と視点の距離 r 、(ii-2)視対象面と視線の成す角度 θ 、の2値で表す。このときビジビリティ関数 f は以下の3条件を満たすべきであろう。なお視対象に極端に近い視点位置においてはこの3条件の成立は自明ではないが、これは問題にならないことを補遺1で述べる。

条件(i): 視対象が大きいほど網膜に映る像は大きくなるから、 f は視対象の「代表的な面積」 A の増加関数である。

条件(ii-1): 視点が視対象から遠ざかるほど網膜に映る像は小さくなるのでビジビリティは下がるべきだから、 f は視距離 r の減少関数である。

条件(ii-2): 視対象を斜めに見るほど像が歪むのでビジビリティは下がるべきだから、 f は偏角 θ の単峰関数で、最大値をとるのは $\theta = \pi/2$ のときである。

条件(i)における視対象の「代表的な面積」 A として、たとえば視対象が黑板の場合にはその面積、視対象が人間の場合にはその平行投影面積を想定している。ただし実はこれをどのように設定しても支障はない。なぜなら本研究の操作対象は視対象ではなく空間形態だからである。言いかえると、複数の部屋形状の案を比較するにあたり、 A の値を変更しても、エリアビジビリティの値は全案に共通して増減するので、その優劣順序に影響を与えないからである。したがって条件(i)を満たす関数として、最も単純な A を採用しておく。

条件(ii-1)を満たす最も単純な関数は $\frac{1}{r}$ であろう。また「受けるエネルギーはその発生源からの距離の2乗に反比例する」という「逆

2乗則」から類推すると、 $\frac{1}{r^2}$ が妥当な関数の候補となる。本研究ではこれを一般化して冪乗関数 $\frac{1}{r^\beta}$ を提案する。パラメータ $\beta(\geq 0)$ は視点が視対象から遠ざかることの負の影響度を表す。 $\frac{1}{r^\beta}$ は、視距離 r がゼロのときに無限大に発散するという直感に反する性質をもつが、補遺1で示したように、 r が小さな値のときのビジビリティを議論する意味はないので、これは問題ない。

条件(ii-2)を満たす関数も候補は無数にあるが、「均等拡散面から出る光度はその面の法線方向と成す角の余弦に比例する」という「ランベルトの余弦則」から類推すると、 $\sin \theta$ が考えられる。なお余弦でなく正弦になっているのは θ のとり方が異なることによる見かけの違いにすぎない。本研究ではこれを一般化して $\sin^\alpha \theta$ を提案する。パラメータ $\alpha(\geq 0)$ は視対象を斜めに見ることの負の影響度を表す。とくに $\alpha=0$ であることは、視対象を斜めに見てもビジビリティへ影響が無いこと、つまり視対象が面状オブジェクトでなく無方向性オブジェクトであることを意味する。逆に $\alpha \rightarrow \infty$ で、正対して見ることに価値があり斜めに見ても意味がない視対象であることを意味する。

「条件(i)から誘導される関数 A 」と「条件(ii-1)から誘導される関数 $\frac{1}{r^\beta}$ 」と「条件(ii-2)から誘導される関数 $\sin^\alpha \theta$ 」を合体してビジビリティ関数 f にする際に、その妥当な合体演算は乗算であろう。なぜならいずれかの関数値がたとえば半減したらビジビリティも半減すると考えるのが自然だからである。以上をもって、ビジビリティ関数として下式を提案する：

$$v = f(r, \theta) = A \frac{1}{r^\beta} \sin^\alpha \theta . \quad (1)$$

式(1)のパラメータを、上述の逆2乗則およびランベルトの余弦則に基づき $\beta=2, \alpha=1$ と特定した下式も理論上重要である。なお視対象が面状でなく無方向性のケース($\alpha=0$)も改めて示している。

$$v = f(r, \theta) = \begin{cases} A \frac{1}{r^2} \sin \theta & (\text{planar target}) \\ A \frac{1}{r^2} & (\text{nondirectional target}) \end{cases} \quad (2)$$

式(2)の f を「狭義ビジビリティ関数」ということにする。また一般性を強調するときに、式(1)の f を「広義ビジビリティ関数」ということもある。

ところで、例えば教室において黒板と教師が存在するように、面状の視対象と無方向性の視対象が2つ同時にあるときに、それらのビジビリティをどのように合算するべきかを知りたい場合がある。これについて補遺2で議論する。結論として、面状視対象の狭義ビジビリティ $\frac{1}{r^2} \sin \theta$ と、無方向性視対象の狭義ビジビリティ $\frac{1}{r^2}$ の妥当な合成は、 $\frac{1}{r^2} \sin^\alpha \theta$ ($0 < \alpha < 1$)であると示される。

5. 立体角の一般化としてのビジビリティ関数

本章では、狭義ビジビリティ関数式(2)が、立体角の近似計算によっても導出されることを示す。これにより、広義ビジビリティ関数式(1)は立体角を広く一般化した式だと理解できるようになる。

一旦、4.2.で行ったビジビリティの定式化を考慮の外に置く。それとは別の定式化として、本章では、「ビジビリティは立体角と等しい」と仮定する^{注1)}。網膜に映る視対象の大きさは立体角で表せることから、この仮定はそれなりに正当化されよう。

本章では上記の仮定に基づいたうえで、視対象の例として単純形状のオブジェクトを2種とりあげ、その立体角を計算する。とりあげる視対象は、人の頭やある種の彫刻などを想定した、方向性のないオブジェクト「球」(5.1.)と、黒板や絵画を想定した、方向性のあるオブジェクト「長方形」(5.2.)である。

5.1. 球を見込む立体角

Fig.2に示すように、半径 c の球状の視対象が、その中心が視点集合平面から h 離れた位置にあり、視対象の代表点（視対象の中心から視点集合平面へ下ろした垂線の足）から r 離れた場所に視点があるとすると、このとき視対象を見込む立体角 Ω_{sphere} を求めたい。なおこれ以降、立体角の単位はステラジアン (sr) とする。

Fig.2 Solid angle of a sphere

一般に、半頂角 l の円錐をその頂点から見込んだ立体角は $2\pi(1 - \cos l)$ であると知られている。この式の l を r, c, h で表して整理することで下式を得る：

$$\Omega_{\text{sphere}} = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2 + h^2}} \right) . \quad (3)$$

5.2. 長方形を見込む立体角

Fig.3に示すように、視点集合平面と直交した縦 a 横 b の長方形の視対象が、その中心が視点集合平面から h 離れた位置にあり、視対象の代表点から r 離れた場所に視点があり、代表点と視点を結ぶ線分（視線）と長方形平面が成す角を θ とする。このとき視対象を見込む立体角 $\Omega_{\text{rectangle}}$ を求めたい。

文献⁶⁾の結果を応用すると、Fig.3に示す4角 m_1, m_2, n_1, n_2 を用いて、長方形を見込む立体角は下式で表せる：

$$\Omega_{\text{rectangle}} = \arcsin(\sin m_1 \sin n_1) + \arcsin(\sin m_2 \sin n_2) - \arcsin(\sin m_1 \sin n_2) - \arcsin(\sin m_2 \sin n_1) . \quad (4)$$

Fig.3 Solid angle of a rectangle

式(4)の m_1, m_2, n_1, n_2 を r, θ, a, b, h で表して整理し、下式を得る：

$$\Omega_{\text{rectangle}} = \frac{\arcsin \frac{(a-2h)(b-2r \cos \theta)}{\sqrt{(b^2+4r^2-4br \cos \theta)[(a-2h)^2+4r^2 \sin^2 \theta]}}}{\arcsin \frac{(a-2h)(b+2r \cos \theta)}{\sqrt{(b^2+4r^2+4br \cos \theta)[(a-2h)^2+4r^2 \sin^2 \theta]}}} + \frac{\arcsin \frac{(a+2h)(b-2r \cos \theta)}{\sqrt{(b^2+4r^2-4br \cos \theta)[(a+2h)^2+4r^2 \sin^2 \theta]}}}{\arcsin \frac{(a+2h)(b+2r \cos \theta)}{\sqrt{(b^2+4r^2+4br \cos \theta)[(a+2h)^2+4r^2 \sin^2 \theta]}}} \quad (5)$$

5.3. 立体角の近似

以上、球の立体角 Ω_{sphere} および長方形の立体角 $\Omega_{\text{rectangle}}$ をそれぞれ求めた（これらをまとめて立体角 Ω と書くことにする）。しかしこの式のままでは、変数が多く、かつ視対象の形状に固有の議論になってしまうため、見通しが良くない。そのため立体角 Ω の近似表現を得ることで、2式の統一化を目指す。

補遺1に示したように、本論の趣旨に照らすと視対象至近のビジビリティを議論することに意味はない。したがって立体角 Ω の近似をするにあたっては、視距離 $r (> 0)$ が長いところでの近似誤差は小さい必要がある一方で、 r が短いところでの誤差は許容できる。その観点から、それぞれの Ω を $r = \infty$ のまわりで2次の項までテイラー展開することで、下式を得る。具体的な計算法は注²⁾に示す。

$$\Omega_{\text{sphere}} \approx \pi c^2 r^{-2} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (6)$$

$$\Omega_{\text{rectangle}} \approx ab \sin \theta r^{-2} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (7)$$

上式それぞれの右辺は、狭義ビジビリティ関数式(2)の右辺と本質的には同じ式である。なぜなら、式(2)右辺の「視対象の代表面積」 A を、視対象が球 (Ω_{sphere}) の場合は「円の面積」 πc^2 とみなし、視対象が長方形 ($\Omega_{\text{rectangle}}$) の場合は「長方形の面積」 ab とみなすのが自然だからである。なお、たとえ A を πc^2 や ab とみなすことを認めなくとも支障はない。というのも、前述のとおり A は、視点位置によらない正定数のため、部屋形状の最適化の結果に影響を与えないからである。

このように、狭義ビジビリティ関数式(2)は、立体角の近似式(6)(7)と本質的に一致する。ところで、広義ビジビリティ関数式(1)のパラメータを $\beta = 2, \alpha = 1$ と特定すると式(2)になるのであった。したがって式(1)は、立体角を広く一般化した式だと理解できる。

5.4. 近似の精度評価

本節では、前節で行ったテイラー近似の精度評価を行う。具体的には、球型の視対象として人間の頭部を、長方形の視対象として絵画および黒板を想定し、計3パターンの視対象について大きさと中心高さを設定した。それらに対し、厳密な立体角を表す式(3)と(5)および、その近似としての狭義ビジビリティ関数式(2)（すなわち式(6)と(7)）をそれぞれ計算した。またその相対誤差として、「(近似値－厳密値)/厳密値」も算出した。それぞれの値についての空間分布を Fig.4 にまとめる。

Fig.4 をみると、立体角（左列）と、その近似としての狭義ビジビリティ関数（中列）の分布形状は、極めてよく似ている。じっさい視対象から5mほど離れたところでの相対誤差は、人間の頭部は1万分の1のオーダー、小さめの絵画（「モナ・リザ」サイズ）は千分の1のオーダーであり、近似の精度はとても高い。つまり小さめの視対象に対しては、立体角と狭義ビジビリティ関数はほぼ等しい。

また、大きさを持った視対象をその代表点で近似することの妥当性が傍証されたといえる。

これに対し、視対象が黒板（縦1.2×幅3.6m）の場合はそうともいえない。Fig.4の右下に重ねて描いたように、平均的な形状の小学校教室において、座席が配置されて生徒の視点が存在する領域を考える。教室の形状を微小変更するときにエリアビジビリティ（後述）に影響をあたえるのは、当該領域のコの字型の境界部分（図のグレイ一部分）なので、そこでの相対誤差に興味がある。そこにおいて最も近似精度の悪い場所は手前の角であり、その相対誤差は-0.2程度であった。上記以外にも視対象の大きさを変えて実験したところ、共通した性質として、視対象の大きさに比べて視対象に近い場所においては、近似精度がそれほど高くないことが分かった。ただしいずれの場合も、立体角と狭義ビジビリティ関数の分布形状はよく似ている。部屋形状最適化を行ううえで、ビジビリティ分布の系統的な誤差（たとえば定数倍されたり定数和されたりする誤差）は結果に影響を与えないので、立体角と狭義ビジビリティ関数は等しいと考えておむね問題にならないと考えている。

Fig.4 Evaluation of approximate solid angle for 3 examples

6. エリアビジビリティ

4章と5章では「視点からの見やすさ」を定式化した。本章では、これをもとに「部屋全体からの見やすさ」を議論する。

エリアビジビリティを「ビジブルエリア全域から視対象を見たときの見やすさの度合いによって規定される、部屋形状の評価値」と定義し、 $g (\geq 0)$ と表す。ビジビリティ v_i はある視点 i からの視対象の見やすさを表していた。これに対しエリアビジビリティ g は、 v_i の集計値であり、ビジブルエリア全体からの見やすさを表している。 g は大きい方が望ましい。部屋形状がパラメータベクトル $\mathbf{a}$ で表されるとすると、エリアビジビリティは $g(\mathbf{a})$ と表現可能であり、「 $g(\mathbf{a})$ を最大化する $\mathbf{a}$ を探る問題」が建築計画学的に重要な問題になる。そのときに本論では「部屋の面積は $\mathbf{a}$ によらず一定」という制約条

件をつける。そうする理由は、床面積は建設費や維持費と比例関係にあると考えるのが自然であり、コスト一定の条件下でのエリアビジビリティが計画上重要な指標になるからである。

エリアビジビリティを数式で表すにあたり、単純な想定に基づく、「ビジブルエリアに均質かつ稠密な視点 $i = 1, \dots, n$ を設定し、ビジビリティ v_i を全視点にわたって足し合わせると、エリアビジビリティ $g = \sum_{i=1}^n v_i$ になる」と定義するのが自然であろう。このときビジブルエリアの面積が一定ならば、「ビジビリティ v_i の相加平均がエリアビジビリティ $g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ である」と定義しても同じことである。

しかしこの定式化には2つの前提が必要である。(i)ひとつは視点の分布が均斉であること。たとえば教室・劇場において座席が均一に分布していて、面積あたりの学生・観客の視点数が一定という前提である。(ii)もうひとつは、部屋形状の評価値（エリアビジビリティ）は、視点からの評価値（ビジビリティ）の単純和であること。そのときには、ある場所のビジビリティを減らし、同じ量だけ別の場所のビジビリティを増やしても、エリアビジビリティは変わらないことになる。

しかし上記の前提が成り立たない場合は多い。たとえば空いている展示室においては、鑑賞者は鑑賞位置を自由に決められる（(i)に反するケース）。そのときには、見づらい場所はある種切り捨て、見やすい場所をより重視することが必要になる。一方で小学校の教室においては、公平なビジビリティ分布が望まれる（(ii)に反するケース）。そのときには、見やすい場所を多少減らしてでも、見づらい場

所を底上げすることが必要になる。

以上の考察から、「見やすい場所（あるいは見づらい場所）を重視する度合い」を操作できればよいことが分かる。そこで、その度合いをパラメータ p ($p \neq 0$) として組み込み、エリアビジビリティはビジビリティの一般化平均（Generalized mean）であると提案する：

$$g = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^p \right)^{1/p} \quad (8)$$

以下、この定式化におけるパラメータ p とエリアビジビリティ g の関係について述べる。まず指摘できることは、特定の p の値を選ぶと、 g はビジビリティ $v_1 \dots v_n$ の、最小値・調和平均・相乗平均・相加平均・最大値という様々な集計値になることである（Table 1 の、見出し列を除いた1列目）。よってこの g は、「ビジビリティの相加平均」を一般化した指標だといえる。また厚生経済学の知見から、 p は「非公平性」すなわち「ビジビリティ分布がどのくらい偏るのを是とするか」を表すパラメータだと解釈できる（Table 1 の2, 3列目）。具体的には、 p が小さな値のときは、場所によらず公平な見やすさを志向する状況を表す [例えば教室における黒板の見やすさを評価するケース]。 $p = 1$ のときは、ビジビリティの総和を問題にする状況を表す [例えば入場料とビジビリティが比例関係にあるときのホールにおけるステージ]。 p が大きな値のときは、ベストポジションからの見やすさを偏重する状況を表す [例えば展示室における展示物]（Table 1 の5, 6列目）。このように p を適切な値に設定することで、多様な部屋用途や社会通念を評価できるのである。

Table1 Examples of applications corresponding to various exponents p

		Value of area visibility g エリアビジビリティ g の値 $g = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^p \right)^{1/p}$	g as social welfare function g を社会的厚生関数だとみなすと	What kind of visibility distribution is good? どのようなビジビリティ分布を是とするか?	Planning principle to maximize g g を最大化するためのプランニング方針	Examples of applications 適用例	
						$\alpha = 1$ (planar target) (面状の視対象)	$\alpha = 0$ (nondirectional target) (無方向性の視対象)
Value of exponent p 冪指数 p	$p \rightarrow -\infty$	$g = \min\{v_1, \dots, v_n\}$ (minimum) (最小値)	Rawls-type ロールズ型 (max-min)	$\uparrow$ Equal distribution is good 公平な分布が良い	$\uparrow$ Reduce bad place 見づらい場所を減らす	-Black board in classroom -Screen in theater -教室における黒板 -映画館におけるスクリーン	-Teacher in classroom -教室における講師
	$p = -1$	$g = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}}$ (harmonic mean) (調和平均)	—				
	$p \rightarrow 0$	$g = (v_1 v_2 \dots v_n)^{\frac{1}{n}}$ (geometric mean) (相乗平均)	Nash-type ナッシュ型				
	$p = 1$	$g = \frac{v_1 + \dots + v_n}{n}$ (arithmetic mean) (相加平均)	Bentham-type ベンサム型 (max-sum)	Total amount of visibility is important ※ ビジビリティの総和が重要 ※	$\downarrow$ Expand good place 見やすい場所を増やす $\downarrow$	-Stage in box-type theater -シューボックス型劇場におけるステージ	-Stage in arena-type theater -アリーナ型劇場におけるステージ
	$p \rightarrow \infty$	$g = \max\{v_1, \dots, v_n\}$ (maximum) (最大値)	Nietzsche-type ニーチェ型 (max-max)	The most visible place is important ベストポジションからの見やすさを偏重 $\downarrow$		-Painting in exhibition room -TV in living room -展示室における絵画 -リビングにおけるテレビ	-Sculpture in exhibition room -展示室における彫刻

※ Total tickets' sales is important when tickets' fee is proportional to the visibility of the seat at a concert.

※ 例えばコンサートのようにチケット代がその席のビジビリティと比例するときの、総チケット売上を重視する状況。

また計算上は、式(8)を空間的に連続化して、

$$g = \left(\frac{1}{S} \int_B v^p du \right)^{1/p} \quad (9)$$

とする。ここで積分範囲である領域 B はビジブルエリアを表し、 du はその微小面積を表す。 S はビジブルエリアの面積 $\int_B du$ である。

7. 長方形領域のエリアビジビリティ

本章では、4章で定式化したビジビリティを用いて、6章で定式化したエリアビジビリティを実際に計算する。

本章で扱うのは、幅 w 奥行 d の長方形プランの部屋において、正面中央に視対象が設置されている状況である。この視対象は、学校教室における黒板、映画館におけるスクリーン、展示室における絵画などを想定している。このとき視対象を原点とする直交座標を Fig. 5 のように張る。視対象に近い「 y が 0 から ϵd の範囲」($0 \leq \epsilon < 1$) はビジブルエリアではない、つまり視点が存在しないゾーンとして扱う。このゾーンは、教室であれば教壇、映画館であればスクリーン前の座席のないスペース、展示室であれば絵画近くの立ち入り禁止エリアを意味する。

Fig.5 Shape of visible area and coordinate system

まずビジビリティ関数を表す式(1)に対して、極座標系 (r, θ) を直交座標系 (x, y) に変換し、下式を得る。ただしここでは、部屋形状の評価に無関係である「視対象の代表的な面積 A 」を無視している。

$$v = \frac{y^\alpha}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \quad (10)$$

次にエリアビジビリティは、定義式(9)から、下式で表現できる：

$$g = \left(\frac{2}{wd(1-\epsilon)} \int_{\epsilon d}^d \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} v^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad (11)$$

この準備を経て、式(11)に式(10)を代入して2重積分を解きたい。すなわちエリアビジビリティ g を初等関数のみで陽に表したい。もしこれができれば、各種パラメータとエリアビジビリティを直結して理解できるので、非常に有用である。そのため数多くの試行錯誤を重ねたが、一般の α, β, p についてエリアビジビリティ g を陽に表すことは不可能だと思われる^{注3)}。ただし α, β, p が特定の値のときには、それができるケースがあることを発見した。その中で解釈上重要なものを次ページの Table 2 にまとめる。それぞれの導出過程は非常に煩雑である^{注4)}。よって結果のみを示している。

Table 2 により、「 α と β で表される視認感覚や視対象特性」と「 p で表される部屋用途や社会通念」を、「エリアビジビリティ g という部屋形状の評価値」に直結できたといえる。これにより第一に、 α, β, p という3つのパラメータ(実質的には2つに退化)を設定し、

かつ部屋の幅 w 、奥行 d 、視点が存在しないゾーンの奥行 ϵd を入力することで、エリアビジビリティを直ちに求められる。すると複数の部屋形状を客観的に比較できる。第二に、パラメータの変化に対するエリアビジビリティの感度分析を行うことができる。すなわち、視認感覚・視対象特性・部屋用途・社会通念・部屋形状を変化させたときに、部屋の評価値がどう変動するかが分かるのである。

8. 長方形プランの部屋の形状最適化

前章で、長方形領域のエリアビジビリティを求めた。本章ではこれをもとに、最適な部屋形状を導出する。すなわち、面積を所与とする長方形プランの部屋において、ひとつの壁の中央に視対象を設置したときの、部屋のエリアビジビリティを最大化するような、最適な部屋の幅と奥行を導出する。想定している適用先は、黒板あるいは教師を見やすい教室の形状(p が小さな値のとき)、スクリーンを見やすい映画館の形状(p が小さな値のとき)、ステージを見やすい劇場の形状($p = 1$ のとき)、絵画を見やすい展示室の形状(p が大きな値のとき)などである。

様々なパラメータの組について求めた最適形状を次ページの Table 3 にまとめる。なお所与の面積が例えば2倍になっても、ビジビリティの定義式上、最適な部屋の奥行と幅がそれぞれ $\sqrt{2}$ 倍になるだけで、プロポーションには影響を与えない。そこで重要な指標として最適な「奥行・幅」比を表に記し、その形の模式図も同時に描いている。

Table 3 および感度分析から得られた定性的な知見を以下にまとめる。

- (1) 視対象が面的になるほど(α が1に近づくほど)、最適部屋形状は奥行が深くなる。逆に無方向的になるほど(α が0に近づくほど)、幅が広くなる。たとえば学校において、黒板のビジビリティが重要な講義型の教室は奥行が深くあるべきで、講師のビジビリティが重要な参加型の教室は幅広くあるべき、という通念と整合している。
- (2) 視距離について、ビジビリティが立体角に等しいとき($\beta = 2$ のとき)、最適部屋形状は幅が広い。これに比べて、離れることの負の影響度が低くなると(β が0に近づく)、奥行が深くなる。
- (3) 公平性が高い用途のとき(p が小さな値のとき：教室など)、最適形状は奥行が深くなる。これは、幅が広いときには視対象側の角部が際立ってビジビリティが低くなってしまいうので、そのエリアを無くしたいからである。一方ベストポジションからの見やすさを重視する用途のとき(p が大きな値のとき：展示室など)、幅が広くなる。
- (4) 立入禁止エリアが広いほど(ϵ が1に近づくほど)、最適形状は幅が広くなる。逆に狭いほど(ϵ が0に近づくほど)、奥行が深くなる。これは、ビジビリティの高い場所を立入禁止エリアに充てたくないからである。

これらはいずれも直感的に納得できる性質であり、ある種当たり前でもある。しかしこれらの定性的な性質を数値的に評価でき、感度分析も可能で、しかも相反する各パラメータをどのような値に設定しても最適形状を求められるところに、本論の有用性と独自性がある。

計画時に考慮すべき事項は、もちろんビジビリティ以外にも存在

する。たとえば教室では座席配置のしやすさ、劇場では音響の良さ、展示室では動線のスムーズさも、重要なプランニング要件である。しかし本手法によって、エリアビジビリティを独立して数値的に評価できる。他の要件と併せて多目的な最適化を行う前段の基礎的な知見として有用であろう。

9. まとめ

本稿では、教室における黒板、劇場におけるステージ、展示室における絵画などを見やすくさせる部屋の形状を理論的に導出した。(i)まず任意の視点からの「ビジビリティ」を表す妥当な関数を提案

した。ここで視対象を斜めに見ることの負の影響度 α と、視対象から遠ざかることの負の影響度 β を導入した。(ii)次にビジビリティの妥当な集計方法を提案し、部屋全体の評価値「エリアビジビリティ」を求めた。ここでビジビリティ分布の不公平度 p を導入した。(iii)最後にエリアビジビリティを最大化する、最適な部屋の形状を導出した。結論として、「 α と β で表される視認感覚や視対象特性」と「 p で表される部屋用途や社会通念」を決めると、部屋の最適形状が直ちに求まるようになった。これは、従来経験的に行われてきたビジビリティ評価を客観的に行うための補助線として、有用な知見だと考えている。

Table2 Area visibility g corresponding to various parameter sets

		Sets of α (angle-resistance parameter) and β (distance-resistance parameter)			
		$\alpha = 1$ (Planar target)		$\alpha = 0$ (Nondirectional target)	
		$\beta = 2$ ($\approx$ Solid angle)	$\beta = 1$	$\beta = 2$ ($\approx$ Solid angle)	$\beta = 1$
Value of exponent p	$p \rightarrow -\infty$ (minimum)	$g = \min \left\{ \frac{d^\alpha}{m^{\alpha+\beta}}, \frac{(d\epsilon)^\alpha}{n^{\alpha+\beta}} \right\}$ where $m = \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 + d^2}$, $n = \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 + (d\epsilon)^2}$			
	$p = -1$ (harmonic mean)	$g = 192wd(1-\epsilon) / \left[19(m-n)w^3 + 46wd^2(m-n\epsilon^2) + 6(6d^4-w^4) \log \frac{w+2m}{2d} - 6(6d^4\epsilon^4-w^4) \log \frac{w+2n}{2d\epsilon} \right]$	$g = \frac{12d(1-\epsilon)}{6d^2(1-\epsilon^2) - w^2 \log \epsilon}$	$g = \frac{12}{w^2 + 4d^2(1+\epsilon+\epsilon^2)}$	$g = 24(1-\epsilon) / \left[8(m-\epsilon n) + \frac{8d^2}{w} \left(\log \frac{w+2m}{2d} - \epsilon^3 \log \frac{w+2n}{2d\epsilon} \right) + \frac{w^2}{d} \log \frac{d+m}{d\epsilon+n} \right]$
	$p \rightarrow 0$ (geometric mean)	$g = d^\alpha m^{\frac{\alpha+\beta}{1-\epsilon}} n^{\frac{(\alpha+\beta)\epsilon}{1-\epsilon}} \epsilon^{-\frac{\alpha\epsilon}{1-\epsilon}} \exp \left\{ \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\beta + \frac{(\alpha+\beta)}{4dw(1-\epsilon)} \left[(4d^2-w^2) \arctan \frac{2d}{w} - (4d^2\epsilon^2-w^2) \arctan \frac{2d\epsilon}{w} - 2d^2\pi(1-\epsilon^2) \right] \right\}$			
	$p = 1$ (arithmetic mean)	$g = \frac{2}{wd(1-\epsilon)} \log \frac{w+2n}{\epsilon(w+2m)}$	$g = \frac{2}{w(1-\epsilon)} \left[\arctan \frac{w}{2d} - \epsilon \arctan \frac{w}{2d\epsilon} + \frac{w}{2d} \log \frac{m}{n} \right]$	g cannot be expressed with elementary functions.	$g = \frac{2}{w(1-\epsilon)} \left[\frac{w}{2d} \log \frac{d+m}{d\epsilon+n} + \log \frac{w+2m}{2d} - \epsilon \log \frac{w+2n}{2d\epsilon} \right]$
	$p \rightarrow \infty$ (maximum)	$g = (d\epsilon)^{-\beta}$			

Table3 Optimal plan to maximize area visibility corresponding to various parameter sets

		Sets of α (angle-resistance), β (distance-resistance) and ϵ (off-limits ratio)							
		$\epsilon = 0$				$\epsilon = 0.1$			
		$\alpha = 1$ (Planar target)		$\alpha = 0$ (Nondirectional target)		$\alpha = 1$ (Planar target)		$\alpha = 0$ (Nondirectional target)	
		$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 1$
Value of exponent p	$p \rightarrow -\infty$ (minimum)	∞		Optimal plan		0.977	1.581	0.5	
	$p = -1$ (harmonic mean)					0.804	1.078	0.475	0.460
	$p \rightarrow 0$ (geometric mean)	0.921	1.326			0.743	1.011	0.429	0.429
	$p = 1$ (arithmetic mean)	0.866	1.187			0	0.851	0	0.342
	$p \rightarrow \infty$ (maximum)	0.806	1			0			

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP15H02974, JP16K20971 の助成を受けたものです。またエリアビジビリティの導出にあたり栗田治先生（慶應義塾大学）に重要な助言をいただきました。ここに謝意を表します。

補遺 1 視対象至近のビジビリティ不定性とその無影響性

本補遺では、視対象の大きさに比べて視対象に極端に近い視点からのビジビリティについて議論する。そのような視点においては、4.2. で述べた条件(i), (ii-1), (ii-2)の成立は自明でないことを述べたうえで、しかしながらそれが問題にならないことを示す。

たとえば視対象が映画スクリーンの場合、一般にスクリーンは大きくかつ席は近い方が見やすい。しかし大きすぎるあるいは近すぎると、全体を一望するのが難しくなるため、むしろ見やすさは下がるだろう（条件(i)あるいは条件(ii-1)が不成立のケース）。一方で視対象が横に長い絵画の場合に、絵画の中心正面に立つ鑑賞者が、その中心つまり代表点からの距離を保ったままサイドに回り込むと、絵画の一部分に対しては視距離が近くなるので、むしろ見やすさが上がることもあろう（条件(ii-2)が不成立のケース）。このように、視対象至近でのビジビリティは、視対象の種類や大きさあるいは見る人の視認感覚によって異なり、一般化して定式化するのが難しい。

しかし上記の問題は、本研究の最終目的である「部屋形状の評価」に向かって論展開していく際には、おおむね支障にならない。なぜなら、視対象至近に壁などの障害物が配置されるとは考えづらく、またそのような部屋形状が最適解になることもありえないからである。よって部屋形状の案を複数比較するに際し、どの案も必ず視対象至近は全域がビジブルエリアになるため、視対象至近のエリアビジビリティの値は案による差が無いと考えてよい。だから視対象至近のビジビリティ関数を変えても、エリアビジビリティに対するその変更の影響は全ての案に共通して加算減算されるだけなので、案どうしのエリアビジビリティの差は変わらず、その優劣順序も変わらない。したがって視対象至近のビジビリティをどのような関数で表そうとも、部屋形状の優劣に影響を与えないのである。

補遺 2 教室における黒板と教師の合成ビジビリティ

本補遺では、教室において黒板と教師という2種の視対象が存在するとき、それらの狭義ビジビリティを合成する方法について議論する。

式(2)から、面状オブジェクトである黒板の狭義ビジビリティ $v_{\text{黒板}}$ を、 $A_{\text{黒板}} 1/r^2 \sin \theta$ で表す。また無方向性オブジェクトである教師の狭義ビジビリティ $v_{\text{教師}}$ を、 $A_{\text{教師}} 1/r^2$ で表す。これは、黒板は斜めから見ると見づらいのに対し、教師は体の向きを変えるのでそうではないという前提に基づいている。また教師は黒板の中央に立ちがちと考え、黒板と教師の代表点は一致しているとする。教師によって黒板が隠れる影響は、場所によらず一定で、部屋形状評価のうえでは無視できるとする。

そのとき黒板と教師を合わせた合成ビジビリティ $v_{\text{合成}}$ をどのように定式化すべきだろうか。単純に考えると、 $v_{\text{黒板}}$ と $v_{\text{教師}}$ を、それぞれの重要度で重みをつけたうえで相加平均をとるという定式化を思いつくが、これは不適切といえる。なぜなら黒板と教師のどちらか片方がほとんど見えなければ、もう片方がよく見えたとしても、視覚体験の満足度は著しく低いはずなので、全体としてのビジビリティはゼロに近づくべきであるが、上記の定式化ではそれが達成できないからである。そこで、 $v_{\text{合成}}$ を、 $v_{\text{黒板}}$ と $v_{\text{教師}}$ の重み付き相乗平均 (weighted geometric mean) で表すことにする：

$$v_{\text{合成}} = \left(v_{\text{黒板}}^{\mu_{\text{黒板}}} v_{\text{教師}}^{\mu_{\text{教師}}} \right)^{\frac{1}{\mu_{\text{黒板}} + \mu_{\text{教師}}}} .$$

ここで $\mu_{\text{黒板}}$ と $\mu_{\text{教師}}$ は、それぞれ黒板と教師の相対的な視覚的重要性を表す正の数である。この式に、上述の $v_{\text{黒板}}$ と $v_{\text{教師}}$ の定義式を代入して整理することで下式を得る：

$$v_{\text{合成}} = A_{\text{合成}} \frac{1}{r^2} \sin^{\alpha} \theta$$

$$\text{ただし } A_{\text{合成}} = \left(A_{\text{黒板}}^{\mu_{\text{黒板}}} A_{\text{教師}}^{\mu_{\text{教師}}} \right)^{\frac{1}{\mu_{\text{黒板}} + \mu_{\text{教師}}}}, \quad \alpha = \frac{\mu_{\text{黒板}}}{\mu_{\text{黒板}} + \mu_{\text{教師}}} .$$

上式から、 $A_{\text{黒板}}$ は部屋形状の評価順序に影響を与えない正定数であり、合成ビジビリティ $v_{\text{合成}}$ の本質は $1/r^2 \sin^{\alpha} \theta$ で表現できると分かる。すなわち $v_{\text{合成}}$ は広義ビジビリティ関数式(1)の特殊ケースと理解できる。またパラメータ α は、 $0 < \alpha < 1$ ととり、 $\mu_{\text{黒板}} \ll \mu_{\text{教師}}$ のとき0に近づき、 $\mu_{\text{教師}} \ll \mu_{\text{黒板}}$ のとき1に近づく。

参考文献

- 1) Hirasawa Y., Ukai T, and Kurita O.: Ratio of visible green associated with pedestrian location and visual line - Solid angle calculation introducing sphere model, Journal of the City Planning Institute of Japan, Vol.52, No.3, pp.1276-1283, 2017.10. (in Japanese)
平澤雄基, 鶴飼孝盛, 栗田治: 歩行者の位置と視線を反映した並木の緑視率-球体モデルに基づく立体角の計算方法, 日本都市計画学会都市計画論文集, Vol.52, No.3, pp.1276-1283, 2017.10.
- 2) Hirabayashi S., Kurita O., and Ukai T.: Distance- and distortion-based appreciation spot decision model, Abstracts. Spring National Conference of Operations Research Society of Japan, Vol.2017, pp.41-42, 2017.3. (in Japanese)
平林新, 栗田治, 鶴飼孝盛: 対象までの距離と歪み指標に基づく絵画鑑賞位置決定モデル, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, Vol.2017, pp.41-42, 2017.3.
- 3) Sato T., Takatori A., Satoh Y.: Visibility evaluation method for auditorium design using visible area ratio, Journal of Architecture and Planning (Transactions of AIJ), Vol.82, No.737, pp.1695-1702, 2017.7. (in Japanese)
佐藤大樹, 高取昭浩, 佐藤康弘: 可視率を用いた観客席設計のための舞台への見通し評価手法に関する研究, 日本建築学会計画系論文集, Vol.82, No.737, pp.1695-1702, 2017.7.
- 4) Kurita, O.: The average and the second moment of Euclidean distance from points uniformly distributed in a polygon to fixed point - A way to draw the contours of the average Euclidean distance, Geographic Information Systems Association, Vol.9, No.1, pp.29-37, 2001.3. (in Japanese)
栗田治: 多角形領域で一様に分布する点から固定点への直線距離の平均値と2次の積率-平均直線距離の等高線の描画法, GIS-理論と応用, 地理情報システム学会, Vol.9, No.1, pp.29-37, 2001.3.
- 5) Kurita, O.: Approximation Theory for the Moments of Inter-Regional Euclidean Distance, Journal of the City Planning Institute of Japan, Vol.51, No.3, pp.915-922, 2016.10. (in Japanese)
栗田治: 領域間直線距離の積率近似理論, 日本都市計画学会都市計画論文集, Vol.51, No.3, pp.915-922, 2016.10.
- 6) Budzier, H. and Gerlach, G.: Thermal Infrared Sensors: Theory, Optimisation and Practice, Wiley, pp.295-298, 2011.

注

注 1) 5章では、「ビジビリティ = 立体角」と考える。一方でそうではなく、<心理的な感覚量は物理的な刺激量の対数に比例して知覚される>というヴェーバー・フェヒナーの法則を当てはめ、「ビジビリティ = $\log$ 立体角」と考えることもできよう。さらにこれを一般化して、<刺激量が増加すると感覚量も増加するが、その増分は緩やかになる>という定性的な法則に基づき、「ビジビリティ = 立体角 q ($0 < q \leq 1$)」と考えることも自然であろう。なお「 $\log$ 立体角」は、本質的には「立体角 q 」の $q \rightarrow 0$ とした特殊ケースにすぎない。それは、 $1/q(\text{立体角}^q - 1) \rightarrow \log \text{立体角}$ ($q \rightarrow 0$) になることから理解できる。

この「ビジビリティ = 立体角 q 」という一般化された立式も、本論の範疇にある。なぜなら、後ほど導入するエリアビジビリティの冪指数 p の解釈を変えることで、この一般化に対応できるからである。具体的には、非公平性パラメータとして p を導入するが、そうではなく、「 p は非公平性と q の積」だと読み替えればよい。

さらにいうと、「ビジビリティ = 立体角 q 」を認めなくとも、5章以外の論展開にはおおよそ支障はない。なぜなら、5.3. の計算結果から、「ビジビリティ = 立体角 q 」は、近似的に「ビジビリティ $\propto r^{-2q}$ 」もしくは「ビジビリティ $\propto (\sin \theta r^{-2})^q$ 」と表せる。これに対し5章以外においては、「ビジビリティ $\propto \sin^{\alpha} \theta r^{-\beta}$ 」という、より一般的な前提に基づいて論展開しているからである。

注 2) まず新たな変数 t ($t > 0$) を導入し、 $t = 1/r$ において変数変換し、立体角 Ω を t の関数と考える。すると $t \rightarrow +0$ の近似誤差はゼロであるべきで、 $t \rightarrow \infty$ での誤差は許容できるといえる。この前提から、立体角 Ω を $t = 0$ のまわり (ただし $t > 0$) でテイラー展開する。具体的には、 $\Omega(t)$ の n ($= 0, 1, 2, \dots$) 階の導関数について $t \rightarrow +0$ として係数を求めていく。計算過程は煩雑であるので省略し、結果のみを下に記す。なお O はランダウの記号である。これらは共に6次の項まで計算したもののだが、奇数次の項は消去されるので、

結果的に3項しか残っていない。また式を見やすくするために $r = 1/t$ の関係を用いて変数 t を r に逆変換している。つまり結果的にいわば Ω を $r = \infty$ のまわりでテイラー展開したことになる。これらの2次の項まで残したものが、式(6)と式(7)である。

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{sphere}} &= \pi c^2 r^{-2} + 1/4 \pi c^2 (c^2 - 4h^2) r^{-4} + 1/8 \pi c^2 (c^4 - 4c^2 h^2 + 8h^4) r^{-6} + O(r^{-8}) \\ \Omega_{\text{rectangle}} &= ab \sin \theta r^{-2} + 1/16 ab (-2a^2 + 3b^2 - 24h^2 + 5b^2 \cos 2\theta) \sin \theta r^{-4} \\ &+ 1/6144 ab [(144a^4 + 18b^4 - 120a^2 b^2 + 5760a^2 h^2 - 1440b^2 h^2 + 11520h^4) \sin \theta \\ &+ (63b^4 - 280a^2 b^2 - 3360b^2 h^2) \sin 3\theta + 189b^4 \sin 5\theta] r^{-6} + O(r^{-8})\end{aligned}$$

注 3) ただし式(10)を代入した式(11)の定積分を、特殊関数を用いて表すことは可能である。例えばガウスの超幾何関数 ${}_2F_1(a, b, c; t)$ を用いると、エリアビジビリティ g は以下のように表せる：

$$\begin{aligned}g &= \frac{d^{-\beta}}{(\beta-2)(1-\epsilon)} \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{w^2}{4d^2}\right) + \epsilon^{-\beta+1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{w^2}{4d^2\epsilon^2}\right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{\beta-1} {}_2F_1\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta+1}{2}; -\frac{w^2}{4d^2}\right) - \frac{\epsilon^{-\beta+1}}{\beta-1} {}_2F_1\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta+1}{2}; -\frac{w^2}{4d^2\epsilon^2}\right) \right]\end{aligned}$$

注 4) 式(11)を解くための方針を、 p の値ごとに以下にまとめる。

$p = -1$ のとき：一般の α と β に対しては式(11)の2重積分を陽に解けなかった（初等関数で表せなかった）ので、パラメータ α と β の特定の4パターンの組み合わせに対してのみ解いている。なお式を見やすくするために、 $m = \sqrt{((w/2)^2 + d^2)}$, $n = \sqrt{((w/2)^2 + (d\epsilon)^2)}$ という2変数を導入している（共通）。

$p = 1$ のとき：一般の α と β に対しては式(11)を陽に解けなかったため、特定の3パターンの組み合わせに対して解いている。 $p = 1, \alpha = 0, \beta = 2$ のときには陽に解けないと思われる。

$p \rightarrow -\infty$ のとき： g がビジビリティの最小値と等しくなることを利用して計算している。視対象からみて奥の角部 $(x, y) = (w/2, d)$ もしくは手前の角部 $(x, y) = (w/2, d\epsilon)$ においてビジビリティは最小値をとる。

$p \rightarrow \infty$ のとき： g がビジビリティの最大値と等しくなることを利用して計算している。視対象に最も近い視点 $(x, y) = (0, d\epsilon)$ においてビジビリティは最大値をとる。

$p \rightarrow 0$ のとき： g がビジビリティの相乗平均と等しくなることを利用して計算している。 $(\prod_{i=1}^n v_i)^{1/n} = \exp(1/n \sum_{i=1}^n \log v_i)$ の関係を用い、対数をとってから積分計算している。結果、一般の α と β において、式(11)を初等関数で表すことができる。

Kentaro HONMA^{*1} and *Kotaro IMAI*^{*2}^{*1} Assoc. Prof., Inst. of Industrial Science, The Univ. of Tokyo, Dr.Eng.^{*2} Prof., Inst. of Industrial Science, The Univ. of Tokyo, Dr.Eng.

The objective of this paper is to quantify the room shape in terms of visibility of a visual target within the room, thus finally to obtain the optimal room shape. A wide variety of visual targets are envisaged, such as a blackboard within a classroom, a stage in a theater, or a painting in a gallery. Their common point is that they are so important that their visibility impacts the room shape. In order to obtain planning guidelines of various rooms with various visual targets, the visibility theory is developed in both a unified and a deductive way. In concrete terms, (i) A reasonable function for expressing “point-visibility” is proposed from an arbitrary viewpoint. The proposed formula not only is understandable intuitively and operational, but represents generalization of approximation equation for the solid angle of the visual target. (ii) Next, a reasonable method of aggregating point-visibility is proposed. Therefore “area-visibility” as a value for evaluating the space as a whole is derived, doubly integrating the p -th power of point-visibility. Area-visibility can be used to evaluate both classrooms that need equality among students by focusing bad view areas, and galleries where the visitor can determine the viewing position by focusing good view areas. (iii) Finally, the optimal room shape is derived in which area-visibility is maximized. Here, we obtain the optimal aspect ratio of a rectangular plan room where the visual target is on one wall.

Through the process described above, this paper is successful in clearly describing area-visibility as the formula containing three parameters and obtaining the relationship between these values and optimal room shapes. These three consist of the two parameters derived from the point-visibility function (negative impact α when viewing the target at an angle, and negative impact β when viewing the target far away), and one parameter introduced when aggregating point-visibility (degree of inequality p in the visibility distribution).

This means that “ α and β representing human eyesight” and “ p depending on rooms’ usage” can be directly linked to an “evaluation value of room shape known as area-visibility”, and thus the “optimal shape of the room”. In other words, once the preconditions are determined, we can obtain information immediately that is useful for planning and design. In consequence, this is considered to be valid knowledge that allows the visibility evaluation that previously was carried out based on experience to be performed objectively.

(2018年6月10日原稿受理, 2019年1月22日採用決定)