移流拡散方程式の高精度差分近似法・OPTIMAL スキームの開発

PROPOSAL OF OPTIMAL SCHEME FOR HIGHLY ACCURATE FINITE-DIFFERENCE APPROXIMATION METHOD OF CONVECTION DIFFUSION EQUATIONS

松尾 陽*, 李 政宰**, 倉 渕 隆***, 鎌田 元康****

Yoh MATSUO, Jurng-Jae YEE, Takashi KURABUCHI and Motoyasu KAMATA

A novel OPTIMAL scheme based on the second-order interpolation technique is proposed for highly accurate and non-oscillatory simulation of convection. The effectiveness of this scheme is demonstrated through applications of several scalar transport problems in two-dimensional laminar and turbulent recirculating flow.

The results are compared to currently available schemes such as PLDS, QUICK, LODA, ULTRA-SHARP etc., and these results demonstrate that the bounded OPTIMAL and the bounded LODA with local full upwinding can give accurate and wiggle free solutions with properly designed coarse mesh layout. However, the OPTIMAL evidently appears advantageous for practical applications because of its computational simplicity and stable convergent process.

Keywords: OPTIMAL scheme, second-order interpolation, finite-difference method, non-oscillatory, $k - \epsilon$ turbulent model, scalar transport equation

OPTIMAL スキーム, 2次精度近似法, 有限差分法, 非振動, $k - \epsilon$ モデル, スカラー輸送方程式

1. 緒言

温度・濃度等に関するスカラー輸送方程式の差分解を求める場合、計算領域の大半で生産項が0となる条件が多いことから、移流項に高精度スキームを用いることが全般的な精度の向上に有効と考えられる。しかし、2次精度スキームは一般に“wiggling”や非現実的な負の濃度等の問題を伴うため、実用計算では数値拡散の混入を承知の上で1次風上系のスキームが広く用いられている¹⁾。

この問題に対処するため、これまで大別して、LODA法²⁾に代表される QUICK スキーム³⁾と1次風上スキームをブレンドする手法⁴⁾や ULTRA-SHARP スキーム⁵⁾のように2次風上系のスキームを変数の局所分布に応じて使い分ける手法等が“wiggling”等の振動を回避する高精度差分近似スキームとして提案されている。前者は部分的な人工拡散の導入に相当し、後者は差分スキームが本質的に非線形化することを意味する。

LODA 法は、基本差分式を QUICK スキームとし、コントロール・ボリューム(以下、CV)界面内挿値に1次風上スキームとの加重平均を用い、安定性を向上させてい

るが、実際計算に用いると、スキームの最適化は問題に依存することになるため、スキームのチューニングは経験に頼らざるを得ない。一方、ULTRA-SHARP スキームでは、CV 界面付近の局所変数分布より、中心差分、QUICK、2次風上差分スキームを選択する方式であるが、本質的に非線形スキームになるため、一般に収束性が悪い。

筆者らは以上の点について検討を進めた結果、CV 界面の内挿値に2次風上系スキームの内挿法を一貫して用いるが、風上因子を局所セルペクレ数によって最適化することで、2次精度スキームに特徴的な“wiggling”等の問題を大幅に緩和可能な新たなスキーム(Oscillation Preventing Technical algorithm based on the second-order Interpolation Method for Advection Linked convection, 以下、OPTIMAL スキームと略称)を開発した。本論文では、OPTIMAL スキームを中心にこれらのスキームの概念、特性について述べるとともに、各スキームの精度や特性を2次元定常/非定常濃度拡散問題を対象に検討した結果について報告する。

* 東京大学工学部建築学科 教授・工博
** 東京大学工学部建築学科 大学院生・工修
*** 東京理科大学工学部建築学科 講師・工博
**** 東京大学工学部建築学科 助教授・工博

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, University of Tokyo, Dr. Eng.
Graduate Student, Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, University of Tokyo, M. Eng.
Lecturer, Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Science University of Tokyo, Dr. Eng.
Assistant Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, University of Tokyo, Dr. Eng.

2. 高精度差分スキームの概要

2.1 一般型 2 次風上系スキーム

受動的スカラー輸送方程式の基礎式はテンソル表記を用いると、以下のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial u_j \phi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (1)$$

図 1 に示す 1 次元定常の流れを考えると、CV 界面における 2 次風上系スキームの内挿値は、風上側空間分布の曲率因子 (Curvature-Factor, 以下 CF) を導入すれば以下のように一般的に表現できる。

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) - CF(\phi_P - 2\phi_W + \phi_{WW}), (u_w \geq 0) \quad (2)$$

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) - CF(\phi_E - 2\phi_P + \phi_W), (u_e \geq 0) \quad (3)$$

ここで $CF=0$ は中心差分, $CF=0.125$ は QUICK, $CF=0.5$ は 2 次精度風上差分スキームである。この 2 次風上系スキームを図 1 の記号により離散化すると、以下のような 5 点離散化方程式となり、

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_{EE} \phi_{EE} + a_{SS} \phi_{SS} + b \quad (4)$$

離散化式の各セルの係数を整理すると、下式となる。

$$a_W = D_w + (0.5 - CF)u_w^- + (0.5 + 2CF)u_w^+ + (CF)u_e^+ \quad (5)$$

$$a_E = D_e - (0.5 - CF)u_e^- - (0.5 + 2CF)u_e^+ - (CF)u_w^- \quad (6)$$

$$a_{WW} = -(CF)u_w^+ \quad (7)$$

$$a_{EE} = (CF)u_e^- \quad (8)$$

式 5)~8) から分かるように、中心差分でセルペクレ数が 2 以下の場合を除き、いずれかの係数が負となるため解の単調性は保証されない。

2.2 LODA 法

LODA 法は、基本差分近似式を QUICK スキームとし、CV 界面の内挿値に 1 次風上スキームとの加重平均を用いることで安定性を向上させる方法である。つまり、内挿式を下式とし^{2),6)}、

$$\phi_i^{\text{LODA}} = \gamma_i \phi_i^{\text{QUICK}} + (1 - \gamma_i) \phi_i^{\text{first upwind}} \quad (9)$$

式 4) の各セルの係数を求めれば以下になる。

$$a_W = D_w + \frac{3}{8}\gamma_w u_w^- + \frac{6}{8}\gamma_w u_w^+ + \frac{1}{8}\gamma_e u_e^+ + (1 - \gamma_w)u_w^+ \quad (10)$$

$$a_E = D_e - \frac{3}{8}\gamma_e u_e^- - \frac{6}{8}\gamma_e u_e^+ - \frac{1}{8}\gamma_w u_w^- - (1 - \gamma_e)u_e^- \quad (11)$$

$$a_{WW} = -\frac{1}{8}\gamma_w u_w^+ \quad (12)$$

$$a_{EE} = \frac{1}{8}\gamma_e u_e^- \quad (13)$$

<記号>

u_i	: i 方向の速度成分, $u^+ = \frac{u + u }{2}$, $u^- = \frac{u - u }{2}$
ϕ	: スカラー量の従属変数
$\phi^{(i)}$	: 内挿値
S	: ソース項
Γ	: 拡散係数
D	: 拡散パラメタ ($= \frac{\Gamma}{\delta x}$)
Pe	: セルペクレ数 ($= \frac{u}{D}$), $Pe^+ = \frac{u^+ \delta x}{\Gamma}$, $Pe^- = \frac{u^- \delta x}{\Gamma}$
$\bar{\tau}_P$	: P 点の局所平均年齢
$C_P(t)$	: P 点の時刻 t のトレーサー濃度
C_S	: 吹出し口のトレーサー濃度

図 1 離散化コントロール・ボリュームの定義点

LODA では、 P セルに隣接する W, E セルに注目し、 a_W, a_E が正あるいはゼロになるように加重係数を求める。 u_w, u_e が同一風向とすればその条件は以下となる。

$$\gamma_w = \min \left(1, \frac{8}{3|Pe_w|} \right), (u_w < 0) \quad (14)$$

$$\gamma_e = \min \left(1, \frac{8}{3|Pe_e|} \right), (u_e > 0) \quad (15)$$

なお、LODA 法をそのまま用いると計算が拡散過大となるため、解の許容範囲を予め $\phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}$ と指定し^{注 1)}、この範囲を逸脱する部分のみに LODA 法を選択的に適用する場合がある。しかし、この許容範囲は一定ではなく問題に強く依存しており、スキーム最適化は経験によるしかないのがこのスキームの欠点である。本論文ではこれらを条件付/無条件 LODA と区別するが、条件付 LODA は非線形となる。

2.3 ULTRA-SHARP スキーム

ULTRA-SHARP スキームは CV 界面付近の局所変数分布より、中心差分、QUICK、2 次精度風上差分を使い分けるスキームである。図 2 の記号を用い、 U から D 点までの変数を $\phi_D - \phi_U$ により、以下のように基準化する。

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{\phi(x) - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (16)$$

この基準化変数を用い、ULTRA-SHARP スキームでは以下の内挿式を用いる。

$$\tilde{\phi}_f = \frac{3}{2}\tilde{\phi}_C \quad , (\tilde{\phi}_C < 0) \quad (17)$$

$$\tilde{\phi}_f = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_C + \frac{3}{8} \quad , (0 \leq \tilde{\phi}_C < \frac{5}{6}) \quad (18)$$

$$\tilde{\phi}_f = 1 \quad , (\frac{5}{6} \leq \tilde{\phi}_C < 1) \quad (19)$$

$$\tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}\tilde{\phi}_C + \frac{1}{2} \quad , (1 \leq \tilde{\phi}_C) \quad (20)$$

対応する離散化方程式の係数は以下のように表される。

$$a_W = D_w + (0.5 - CF_w^-)u_w^- + (0.5 + 2CF_w^+)u_w^+ + (CF_e^+)u_e^+ \quad (21)$$

$$a_E = D_e - (0.5 - CF_e^+)u_e^+ - (0.5 + 2CF_e^-)u_e^- - (CF_w^-)u_w^- \quad (22)$$

$$a_{WW} = -(CF_w^+)u_w^+ \quad (23)$$

$$a_{EE} = (CF_e^-)u_e^- \quad (24)$$

ここに CF は CV 界面に関する変数であり以下となる。

$$CF(\tilde{\phi}_C) = \frac{1 + \tilde{\phi}_C - \tilde{\phi}_f}{2 \cdot (1 - 2\tilde{\phi}_C)} \quad (25)$$

3. OPTIMAL スキーム

3.1 OPTIMAL スキームの概要

新開発 OPTIMAL スキームは、前述した一般型 2 次風上系スキームの内挿法を一貫して使用するが、CF を変数として 1 次風上スキームとブレンドなしに、セルペクレ数の分布状況に応じて最も適切に選ぶスキームである。つまり、式 5)~8) の一般型 2 次風上系のスキームの離散化方程式の係数を、CF を変数として、セルペクレ数を用いて以下のように変形する。

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \left\{ (0.5 + 2CF_w)Pe_w^+ + (0.5 - CF_w)Pe_w^- + (CF_e)\frac{\delta x_w u_e^+}{\Gamma_w} + 1 \right\} \quad (26)$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \left\{ -(0.5 + 2CF_e)Pe_e^- - (0.5 - CF_e)Pe_e^+ - (CF_w)\frac{\delta x_e u_w^-}{\Gamma_e} + 1 \right\} \quad (27)$$

$$a_{WW} = -CF_w u_w^+ \quad (28)$$

$$a_{EE} = CF_e u_e^- \quad (29)$$

ここで、OPTIMAL スキームは隣接セルの係数 a_W, a_E が $a_W, a_E \geq 0$ となるように CF を求めて計算を行う。つまり、LODA と同様に CV 界面上の速度 u_e, u_w が同一符号と仮定した上、式 26), 27) が $a_W, a_E \geq 0$ となるように式を連立させて解くと、CF は次のようになる。

$$CF_w \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{Pe_w^-} \quad , (u_w < 0) \quad (30)$$

$$CF_e \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{Pe_e^+} \quad , (u_e \geq 0) \quad (31)$$

更に、式 28), 29) の a_{WW}, a_{EE} はいずれか負または 0 となるので、これらの係数の絶対値が最小となる条件を

図 2 ULTRA-SHARP スキームの定義点

図 3 OPTIMAL スキームの Limiter

追加すれば CF は局所セルペクレ数を用いて以下のように一意的に決定できる。

$$CF_i = \max \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{|Pe_i|} \right) \quad (32)$$

$$\text{ただし, } CF_i = 0 \quad , (|Pe_i| = 0) \quad (33)$$

OPTIMAL スキームでは、隣接係数の符号は常に正または 0 となることを条件に CF を決定しているが、これは、セルペクレ数の絶対値が 2 以下の場合は中心差分近似とし、それ以上ではセルペクレ数の分布状況に応じて QUICK を経由して最終的に 2 次精度風上スキームとなるよう内挿法の風上成分への重みを対流作用の強さに応じて連続的に調節することに相当する。

3.2 OPTIMAL スキームの Limiter

OPTIMAL スキームを実際に計算に適用すると、4 章に示すように 2 次風上系スキーム単独の場合に比べ、“wiggling”等の問題は大幅に緩和される。しかし、先に述べたように a_{WW}, a_{EE} には依然として負の値が残るために、問題によってはわずかながらアンダー/オーバーシュートが生じる場合がある。

そこで CV 界面の内挿値に関し、図 3 に示すように Limiter を作用させる対策を講じる。つまり、内挿値 ϕ' に関する物理的な許容範囲を $\phi_{\min} \leq \phi' \leq \phi_{\max}$ とし、この範囲を逸脱する場合は内挿値を許容範囲の上限下限値で置き換える。実際の計算アルゴリズムとしては、陽解法を用いる場合は flux 計算段階で、陰解法による収束計算を行う場合は予め内挿値を求めた上で、Limiter を作用させる部分についてのみ係数を変更すれば良い。上記方法を用いた場合、本報に示す全ての計算条件では、アンダー/オーバーシュートは回避可能であった。

4. 定常濃度計算における各スキームの特性

先に述べた新開発 OPTIMAL スキームと既往の移流項スキームの実用問題での特性を比較検討するため、等分割の 36×36 mesh 及び不等分割の 41×41 mesh を用いた 2 次元濃度分布の計算を行った。想定気流場は 288×288 mesh の等分割を用いて生成したものであり、同一詳細 mesh における濃度計算結果を比較用の基準解として用いた。

4.1 層流計算結果

(1) 計算条件

吹出し・吸込み幅 1 の 9×9 の正方形領域を対象とし、等分割の 288×288 mesh により 2 次元層流計算を行った。計算条件として、吹出し Re 数に 100, 吹出し・吸込み法線方向速度を境界上で 1, 接線方向の速度を仮想セルで 0 とし、壁境界条件は no-slip 条件を用いた。使用差分近似式は、運動方程式の移流項に QUICK, 他は中心差分とし、解法は ABMAC 法に準じた。図 4 に気流計算結果を示す。濃度計算は差分スキームの影響が顕在化し易い条件として、主流中の 64 セル (36×36 分割の 1 mesh 分に相当, 図 4 参照) が濃度発生点となる条件を設定し、吹出濃度 flux を 0 とし、壁境界条件として free-slip 条件を用いた。解法は逐次緩和法による陰解法、収束判定条件は最大残差を 1×10^{-5} とした。

(2) 詳細 mesh の計算結果

気流計算に用いた 288×288 詳細 mesh 分割を用い、QUICK 及び hybrid スキーム⁷⁾ を用いて濃度分布を求めた。計算濃度分布は図 5 に示すように hybrid では QUICK より右上部で若干高濃度となるが、両者は全般的によく対応し、表 1 に示すように平均濃度、最大値についてもよく一致することから、詳細 mesh では差分スキームによる差はほぼ無視できると考えられる。

(3) 36×36 等分割の計算結果

詳細 mesh による気流計算結果を 36×36 mesh に平均化した流れ場を用いて濃度分布を計算した。図 6 に平均された流れ場のセルペクレ数の分布を示す。検討スキームは表 2 に示すように、1 次風上系 3 通り、2 次風上系 6 通り、LODA 系 3 通り、ULTRA-SHARP 及び OPTIMAL 系 2 通りの計 15 種類である。計算濃度分布の一部を図 7 に、平均濃度、最大値、最小値を表 2 にまとめて示す。各スキームによる計算解の特徴は以下となる。

a. 1 次風上系スキーム スキーム間の差は小さいが、いずれも拡散が過大評価され、平均濃度は詳細 mesh の 3 倍以上大きい値となる。

b. 2 次風上系スキーム スキームの差が顕在化し、CF が小さいほど拡散が小さく評価されるもののアンダーシュートは大きくなる。2 次風上スキームを用いても負の濃度は解消されない。

図 4 気流計算結果及び濃度発生点

図 5 288×288 分割 mesh による空間濃度分布

図 6 平均流れ場のセルペクレ数の分布

表 1 288×288 詳細 mesh による濃度計算結果 (Re=100)

空間差分近似式	平均濃度	最大値 ^{a1)}	最小値
hybrid スキーム	0.232005	2.873179	0.000000
QUICK スキーム	0.231783	2.903383	0.000000

^{a1)} 最大値は 36×36 mesh 分割に平均した結果

表 2 36×36 等分割 mesh による濃度計算結果 (Re=100)

空間差分近似式		平均濃度	最大値	最小値
1 次風上系	1 次風上	0.726396	3.246998	0.00011
	hybrid	0.708181	3.413151	0.00000
	PLDS	0.703359	3.415608	0.00008
2 次風上系 (CF =)	0.0	0.088959	5.063670	-3.40310
	0.0625	0.139645	4.176262	-1.75879
	0.125	0.193733	3.607216	-1.01479
	0.250	0.280082	2.886627	-0.36355
	0.375	0.343164	2.451881	-0.08838
LODA 系	0.5	0.391231	2.162060	-0.00716
	無条件	0.695159	3.332445	-0.00046
	条件付	0.327966	3.296927	-0.00028
ULTRA-SHARP	条件付 ⁺¹ 次風上	0.326098	3.296218	0.00003
		0.486509	3.992536	0.00003
OPTIMAL	無条件	0.351395	2.313630	-0.00097
	Limiter 付	0.355001	2.313443	0.00000

図7 36×36 等分割 mesh による空間濃度分布

c. LODA 法 無条件 LODA は PLDS⁸⁾の結果に近く、拡散過大である。条件付 LODA では数値拡散は抑制されるが、依然として吹出し直下が負の濃度となること^{注1)}、SOR 法による収束過程の安定化のために極端な減速緩和^{注2)}を要すること等の問題がある。吹出口直下の負の濃度は吹出口周辺を強制的に1次風上スキームとすることで解消される。

d. ULTRA-SHARP スキーム 負の濃度は生じないが、平均濃度は詳細 mesh よりも約2倍大きくなること、条件付 LODA と同様に収束が困難となり、極端な減速緩和^{注2)}をせざるを得ない等の問題がある。

e. OPTIMAL スキーム 内挿値に Limiter を用いない場合、吹出し直下にわずかな負の濃度が現れるが、Limiter を作用させることで解消される。平均濃度は条件付 LODA と同程度であり詳細 mesh より5割程度大きい。計算安定性は極めて良く、収束計算時間は2次風上スキームと同程度となる。図8に定常時のCFの分布を示すが、セルペクレ数が大きい主流域ではほぼ2次精度風上 (CF=0.5) で、両側の渦近傍では QUICK (CF=0.125) で、その他の領域では中心差分スキーム (CF=0) で計算されており、セルペクレ数と同様な分布の傾向を見せている。

図8 OPTIMAL スキームにおける定常時のCFの分布

(4) 41×41 不等分割による計算結果

負の濃度が回避可能なスキームの中では、OPTIMAL や条件付 LODA の結果が比較的良好であるが、平均濃度はいずれも詳細 mesh 解に比べて大きい。図5-(a)の hybrid による詳細 mesh 解を 36×36 分割に平均化し、OPTIMAL を作用させて相対打切誤差を求めたところ図9示すように濃度発生点付近で大きくなった。そこで、この部分を細分割した図10の mesh を使い、先に用いた主要なスキームによる計算を行い、分割の相違による影響を検討した。計算濃度分布を図11に、平均濃度等を表3に示す。

表 3 41×41 不等分割 mesh による濃度計算結果 (Re=100)

空間差分近似式	平均濃度	最大値 ^{*1)}	最小値	比較 ^{*2)}
1 次風上	0.664353	2.357284	0.00011	2.86
QUICK	0.253770	2.315732	-0.23055	1.09
2 次風上	0.260143	2.008443	-0.12236	1.12
条件付 LODA ⁺¹ 次風上	0.264394	2.273890	0.00002	1.14
ULTRA-SHARP	0.388123	2.225826	0.00003	1.67
条件付 OPTIMAL	0.248151	2.155062	0.00000	1.07

^{*1)}最大値は 36×36mesh 分割に平均した結果

^{*2)}詳細 mesh による hybrid の計算結果との比較

a. 1 次風上スキーム 平均濃度は若干低下するが全般的に顕著な変化は認められない。1 次風上スキームでは mesh の細分化による効果は乏しい。

b. 2 次風上系スキーム 濃度分布の傾向は詳細 mesh とかなり近くなり、アンダーシュートも緩和されるが負の濃度は避けられない。

c. LODA 法 顕著な改善が認められるが、負の濃度を回避するために部分的な 1 次精度風上を要すること、収束が困難なことは先と同様である。

d. ULTRA-SHARP スキーム 平均濃度は詳細 mesh に近づくが、依然として詳細 mesh より 7 割程度の過大評価となる。

e. OPTIMAL スキーム 濃度分布、平均値、最大値ともに、詳細 mesh による解と極めてよく対応するとともに、収束計算は極めて容易である。

4.2 乱流計算結果

(1) 計算条件

計算領域、mesh 分割は層流と同様であり、壁境界条件は 1/7 乗風速分布の仮定に基づく壁関数を用いた。使用差分近似式としては、運動方程式、 k, ϵ 式の移流項に QUICK (ただし、 ϵ は部分 1 次風上使用)、他は中心差分とした。図 12 に $k-\epsilon$ モデルによる乱流計算を行った結果を示す。濃度計算条件、解法等はすべて層流計算と同様である。

(2) 詳細 mesh による計算結果

濃度発生点を層流の場合と同一とし、QUICK 及び hybrid による濃度分布計算を行った結果を図 13、表 4 に示す。QUICK ではソース発生源の直上部で負の濃度が発生し、hybrid による平均濃度は QUICK より 2 割程度大きく計算される等、スキームによる差が顕在化している。これは、乱流では空間分割が未だ不十分であることを示唆するものの、全般的な分布は比較的類似していることからこれらを比較用の基準解として用いた。

(3) 36×36 等分割の計算結果

詳細 mesh による気流計算結果 (流れ場及び渦動粘性係数) を 36×36mesh に平均化し (図 14 に平均流れ場のセルペクレ数の分布を示す)、空間濃度の計算を行った。計算結果を表 5 及び濃度分布の一部を図 15 に示す。

図 9 打ち切り誤差分布 (OPTIMAL)

図 10 不等分割 mesh

a) 1 次風上

b) QUICK

c) 2 次風上

d) 条件付 LODA⁺¹ 次風上

e) ULTRA-SHARP

f) 条件付 OPTIMAL

図 11 41×41 不等分割 mesh による空間濃度分布

a) 流線

b) 渦動粘性係数

図 12 乱流計算結果

表 4 288×288 詳細 mesh による濃度計算結果

空間差分近似式	平均濃度	最大値 ^{a)}	最小値
hybrid スキーム	0.358085	2.734762	0.000000
QUICK スキーム	0.305162	3.129004	-0.100380

^{a)}最大値は 36×36 mesh 分割に平均した結果

表 5 36×36 等分割 mesh による濃度計算結果

空間差分近似式		平均濃度	最大値	最小値
1 次風上系	1 次風上	0.763189	3.044915	0.00001
	hybrid	0.755421	3.077571	0.00000
	PLDS	0.752496	3.078965	0.00000
2 次風上系 (CF =)	0.0	0.415569	4.615625	-3.83930
	0.0625	0.371835	3.839427	-1.92942
	0.125	0.390088	3.319928	-1.10489
	0.250	0.456030	2.639191	-0.41646
	0.375	0.507022	2.238659	-0.13552
	0.5	0.541332	1.981359	-0.04345
LODA 系	無条件	0.746921	3.049489	-0.00374
	条件付	0.499633	2.982042	-0.00290
	条件付+1 次風上	0.497578	2.983131	0.00000
ULTRA-SHARP		0.748356	3.720526	0.00000
OPTIMAL	無条件	0.543286	2.009144	-0.03991
	Limiter 付	0.456748	2.664873	0.00003

図 14 平均流れ場のセルペクレ数の分布

- a. 1 次風上系スキーム スキーム間の差は小さく、拡散過大である。平均濃度は詳細 mesh 解より 2 倍以上大きくなる。
- b. 2 次風上系スキーム アンダーシュートが層流の場合よりも大きくなり、負の濃度が発生する領域も広がる。
- c. LODA 法 部分 1 次風上併用の条件付 LODA では負の濃度の発生はなく、分布の傾向も詳細 mesh の hybrid にかなり近い。ただし、平均濃度は 4 割程度大きい。収束計算は層流の場合よりも難しくなる。
- d. ULTRA-SHARP スキーム 負の濃度は生じないが、平均濃度は 1 次風上系と同様、詳細 mesh 解の 2 倍程度の大きい値となり、乱流、粗 mesh 条件では顕著な精度向上は望めない。
- e. OPTIMAL スキーム Limiter 付では負の濃度は現れない。分布の傾向は詳細 mesh 解にかなり近いが、平均濃度は 3 割程度過大評価となる。図 16 に定常時の CF の分布を示すが、層流計算結果と同じくセルペクレ数の分布状況に応じてスキームが選択されていることが分かる。乱流条件においても収束計算は極めて良い。

図 13 288×288 分割 mesh による空間濃度分布

図 15 36×36 等分割 mesh による空間濃度分布

図 16 OPTIMAL スキームにおける定常時の CF の分布

(4) 41 × 41 不等分割による計算結果

打ち切り誤差解析結果は層流と同様の結果となったので(図省略), 図 10 の mesh 分割による濃度計算を行った。計算濃度分布を図 17 に, 平均濃度を表 6 に示す。

a. 1 次風上スキーム 層流計算結果と同じく, mesh の細分化による効果は小さい。

b. 2 次風上系スキーム 濃度分布の傾向は詳細 mesh に近いが, 負の濃度が生じる領域は主流の右側に広範囲に広がる。

c. LODA 法 解の許容範囲の最適化, 1 次風上の使用領域を適切に行えば, 詳細 mesh の hybrid と良好に対応する計算結果が得られる。

d. ULTRA-SHARP スキーム 平均濃度の過大評価は緩和されるが, 依然として 6 割程度大きい値となる。

e. OPTIMAL スキーム 最適な LODA とほぼ同等の解となり, 詳細 mesh による結果にかなり近い。

5. 非定常濃度計算結果

4 章の定常濃度計算結果を見ると, 層流, 乱流条件ともに, OPTIMAL スキーム及び LODA 法が優れていると判断される。しかし, LODA では負の濃度を回避すると共に, 数値拡散を抑制するための最適な解の許容範囲の条件設定, 部分的に 1 次風上スキームの適用を要すること, 収束性が悪いこと等の問題がある。更に, LODA は陰解法を原則として提案されており, 非定常濃度計算には直接に使えない。これらの点を考慮すると, 実用計算ではより簡便かつ安定性に優れた OPTIMAL が推奨できる。そこで, 同スキームの具体的な応用例として, 吹出し空気の平均到達時間を意味する局所平均年齢 (Local Age of air, 以下 LA) の空間分布の算出を試みた。トレーサステップアップ法を想定した場合の LA の計算式は以下となる⁹⁾。

$$\bar{\tau}_P = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{C_P(t)}{C_S}\right) dt \quad (34)$$

LA の空間分布の計算に先立って, 図 18 に示す 3 通りの計算モデル及び mesh 分割を用いて k-εモデルによる

図 18 非定常濃度の計算モデル及び mesh 分割

表 6 41×41 不等分割 mesh による濃度計算結果

空間差分近似式	平均濃度	最大値 ¹⁾	最小値	比較 ²⁾
1 次風上	0.713419	2.193064	0.00002	1.99
QUICK	0.384867	2.085097	-0.28515	1.07
2 次風上	0.382828	1.802822	-0.16438	1.07
条件付 LODA+1 次風上	0.377258	2.021953	0.00000	1.05
ULTRA-SHARP	0.566084	1.962723	0.00000	1.58
条件付 OPTIMAL	0.376845	1.829680	0.00000	1.05

¹⁾最大値は 36×36mesh 分割に平均した結果

²⁾詳細 mesh による hybrid の計算結果との比較

図 17 41×41 不等分割 mesh による空間濃度分布

図 19 計算速度ベクトル

図 20 局所平均年齢^{*3)}の空間分布 (吹出口-1) 図 21 局所平均年齢^{*3)}の空間分布 (吹出口-2) 図 22 局所平均年齢^{*3)}の空間分布 (吹出口-3)

*3) 数値は名目換気回数の逆数で基準化した。

乱流計算を行った。計算条件等は4章の乱流計算と同じであるが、 k, ϵ 式の移流項スキームにOPTIMALスキームを、時間微分項は前進差分スキームを使用した。計算した流れ場を図19に示すが、これを用いた非定常濃度計算より式34)の積分を数値的にを行い、LAの空間分布を求めた。使用スキームはLimiter付OPTIMALと、比較用にQUICK、PLDS、1次風上スキームを用いた。計算結果を図20～図22に示す。図より1次風上、PLDSでは数値拡散が空間濃度の均一化を促進するのでLAの空間変化は小さい反面、OPTIMALでは循環領域で大きい値となり、気流構造を反映した結果となっている。QUICKは一部で負の値を示しているが、全般的に室平均年齢、年齢分布ともにOPTIMALとほぼ同様の計算結果となっている。但し、各スキームによる濃度の時間変化については図23に示すように、QUICKでは濃度の立上がりの時点で顕著なアンダー／オーバーシュートが生じる反面、OPTIMALではこれが回避されている。

6. まとめ

CV界面値に2次風上系スキームの内挿法を一貫して用いるが、風上因子を局所セルペクレ数によって最適化することで、2次精度スキームに特徴的な”wiggling”等の問題を大幅に緩和可能な新たなOPTIMALスキームを開発した。また、新開発OPTIMALスキームおよび従来の様々の差分スキームを、2次元層流と乱流条件の定常／非定常濃度拡散問題に適用し、粗いmesh分割の結果と細かいmesh分割の結果との比較に基づき、OPTIMALスキームの計算精度や特性について検討した。本研究で得られた結果を以下にまとめて述べる。

1) 定常濃度の計算結果を見ると、層流、乱流ともにOPTIMALスキーム及びLODA法による結果が詳細mesh解によく対応したが、LODA法では解の最適な許容範囲の条件設定、部分的に1次風上スキームの適用を要すること、収束性が悪いこと等の問題がある。それに対してOPTIMALスキームによる収束性は極めて良い。

図 23 空間濃度の時間変化

*4) 時間は名目換気回数の逆数で基準化した。 *5) 濃度は定常濃度で基準化した。

2) LODA 法と異なり, OPTIMAL スキームは非定常濃度計算に直接適用可能なスキームであり, 2 次風上スキームで現れる過渡期の振動を効果的に抑えることができる。

注

1) 条件付 LODA 法における解の許容範囲の設定が解の収束性や計算精度に与える影響を検討するため, $\phi_{\min}$ を変化させた計算を行った。本来この問題では $\phi_{\min}$ は 0 であるべきだが, 補図-1 に示すように $\phi_{\min}=0$ とした場合, 部分的に負の濃度が生じるとともに収束判定条件を厳しくすると, 収束解を得るのは困難となった。 $\phi_{\min}$ を大きくすることにより負が生じる領域が減り, 収束性も向上するが, これは 1 次風上を使用する領域の拡大に伴う人工拡散の作用によるものである。本文中に掲載した計算結果は $\phi_{\min}$ について層流, 乱流の場合にそれぞれ 0.02, 0.03 と置くことにより濃度発生点直上における負の濃度は回避された。しかし, 吹出し直下には依然として負の濃度が発生した。これは補図-2 に示す加重係数の分布から明らかなように, 吹出し直下の加重係数が 0.14 程度で完全に 1 次風上に移行していないことによるものであり, この部分を強制的に 1 次風上とする必要があった。

補図-1 条件付 LODA

($\phi_{\min} = 0$, $Re=100$)

補図-2 定常時の加重係数の分布 ($Re=100$)

a) γ_x b) γ_y

2) LODA, ULTRA-SHARP スキームでは計算安定性が悪いので解の更新に際し, 極端な減速緩和法を用いない限り収束解は得られなかった。本論文では, 減速緩和係数を 0.05 程度にした場合, 収束性は向上した。一方, 一般型 2 次風上スキーム及び OPTIMAL では, 減速緩和は不要であった。

本論文に関連する既発表文献

- 1) 松尾陽, 倉淵隆, 李政率: 移流・拡散方程式の高精度差分近似法に関する研究(その 1), (その 2), (その 3), 日本建築学会大会学術講演集, pp.489-494, 1992
- 2) Y.Matsuo, J.J.Yee, T.Kurabuchi, M.Kamata: Highly accurate and non-oscillatory finite-difference approximation method for convection diffusion equation, Preprints for International Symposium on Room Air Convection and Ventilation Effectiveness, pp.358-365, 1992

参考文献

- 1) 例えば, 貝塚正光: 室内気流の数値解析, 空気調和・衛生工学, 58-3, pp.13-24, 1984
- 2) J.ZHU and M.A.Leschziner: A local oscillation damping algorithm for higher-order convection schemes, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (67), pp.355-366, 1988
- 3) B.P.Leonard: The QUICK algorithm, A uniformly third-order finite-difference method for highly convection flows, in Computer Methods in Fluids, Pentech Press, 1980
- 4) 例えば, 村上周三, 加藤信介, 須山喜美: 室内気流数値解析の診断システムに関する研究(第 2 報), 移流項差分における一次精度風上, QUICK, 中心差分スキーム等の比較検討, 日本建築学会計画系論文報告集, No.390, pp.1-12, 1988
- 5) B.P.Leonard and Simin Mokhtari: Beyond first-order upwinding, The ULTRA-SHARP alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection, International Journal for Numerical Methods in Engineering, VOL.30, pp.729-766, 1990
- 6) R.W.Benodekar, A.J.H.Goddard, A.D.Gosman and R.I. Issa: Numerical prediction of turbulent flow over surface-mounted ribs, AIAA Journal, VOL.23, NO.3, pp.359-366, 1985
- 7) D.B.Spalding: A novel finite difference formulation for differential expression involving both first and second derivatives, International journal for Numerical Methods in Engineering, VOL.4, pp.551-559, 1972
- 8) S.V.Patankar: Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere publishing corp., 1983
- 9) W.J.Fisk, R.J.Prill and O.Seppanen: Commercial building ventilation measurements using multiple tracer gases, Proceedings of the 9th AIVV conference, Effective Ventilation, VOL.1, pp.161-182, 1988

(1993 年 6 月 4 日原稿受理, 1993 年 9 月 28 日採用決定)