n 人型社会ジレンマゲームとして見た環境問題の構造に関する考察

A STUDY ON STRUCTURES OF ENVIRONMENTAL PROBLEMS REGARDING AS THE N-PERSON'S SOCIAL DILEMMA GAME

谷本 潤*, 相良 博喜**

Jun TANIMOTO and Hiroki SAGARA

Environmental problems point of view, focusing on both Public Goods Game (PGG) and Tragedy of Commons (TOC) as representative social dilemma games, exact and general mathematical models for those two were obtained. PGG should be recognized as the providing-type dilemma game of which substance is understood by the Prisoners Dilemma (PD). While, TOC should be called as preserving-type dilemma game that is a certain specific PD or Chicken. For these asymmetric multi-person game, the Replicator Dynamics equations were obtained derived from its original definition. The analytical investigation of the Replicator Dynamics proved particular features and several relations among the game parameters for both PGG and TOC.

Keywords: *Environmental Problems, Social Dilemma, Evolutionary Game Theory, Public Goods Game, Tragedy of Commons*

環境問題, 社会ジレンマ, 進化ゲーム理論, 公共財ゲーム, 共有地の悲劇

1. 緒言

環境問題とは、人の飽くなき物質欲と化石燃料をはじめとする資源消費とを如何に折り合いを付けて持続可能な環境を保持するか、と云う設問に他ならない。この問題の大枠は、意志決定を数理的に解明する応用数学として発達してきたゲーム理論によりモデル化出来る。環境問題の全容を瞰下するには、建築が main sector の一角として関わる人間-環境-社会システム[1]を相互浸透的にモデル化[2]するアイデアの構築が必要であるが、その為には建築環境学も一翼を担って解明してきた環境の物理プロセスと意志決定を含めた人間エンティティとを架橋することが求められる。区々たる物理機構の解明はそれ自体重要で必須な営為であることは論を俟たないけれど、限定された境界条件に対する解が大域的最適解とはままた一致しないことは我らのよく承知するところであるから、建築環境学にあっても周縁学問分野との学際的架橋を模索する試みが希求されて然るべきだろう。

小論ではこれらの背景から、建築学から見てもその適用上重要と思される環境ジレンマゲーム[3]に関連した考察を行う。

環境問題のジレンマを包括する社会的なジレンマは社会ジレンマゲームと云われ、フリーライダーなど社会科学上の諸問題に加え、乱獲や資源開発、大気汚染、ゴミ処理を巡る環境諸問題など多くの応用対象が考えられるため、そのジレンマ性が依拠する数理構造を明らかにすることが重要となる。ゲーム理論的に観た社会ジレンマゲームは、2 人ゲームに対置した、所謂、

n 人 (多人数) ゲームとして定式化されるが、2 人ジレンマゲームに比較してその研究ストックは薄少である。n 人ジレンマゲームとしては、公共財ゲーム (Public Goods Game, 以下、PGG) と共有地の悲劇 (Tragedy of Commons, 以下、TOC, Snowdrift ゲームと云う場合もある) が夙によく知られている。小論で詳らかにするように、前者は 2 人 2 戦略ゲーム (以下、2×2 ゲーム) における囚人のジレンマ (Prisoner's Dilemma, 以下、PD) を、後者はチキンゲーム (以下、Chicken) を、夫々 n 人プレイヤーに拡張したゲームと看做せる。

建築学も深く関わる環境のジレンマゲームは、上記のように社会ジレンマゲームの一種であるから n 人ジレンマゲームとしてモデル化される。特に、環境の制約条件下で限定された資源を奪い合うジレンマゲームは、まさに TOC が想定する状況であり、このことから TOC の数理モデルを明示し、その力学的性質を演繹するとともに、そのジレンマ構造が Chicken 的様相を呈することを明確にすることは、問題解決の方策や社会的制度設計を考える上で重要な視座を供するであろう。木村[4]は、社会ジレンマを、所謂、Olson 問題と看做す立場から、他者の排除不可能な公共財サービスや資源管理を巡るジレンマゲームは n 人プレイヤーの Chicken で定式化すべきであると主張している。

Schelling[5]は n 人ゲームにおける協調戦略 (以下、C) と裏切り戦略 (以下、D) の利得構造関数 (全プレイヤー中の協調戦略プレイヤー数の関数として付与) の相対関係により、ゲーム構造が異なってくることを指摘している。これから、C プレイヤー数に

* 九州大学大学院総合理工学研究院 教授・工博

** 九州大学大学院総合理工学府 修士課程

Prof., Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University, Dr. Eng.
Graduate Student, Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

依存せず常に C の利得が D のそれを下回るゲーム構造として定義される PGG は、支配戦略（他プレーヤの戦略に依存せず自己にとって合理的な戦略）が D であるから、この点からも 2×2 ゲームにおける PD であることと推量される。また、TOC は、C プレーヤ数が僅少である（D 戦略が社会の多数を占める状況）ときは自己にとって C 戦略が合理的であり、C プレーヤが多くを占めるときには自己にとって D 戦略が合理的であるゲーム構造（つまり支配戦略が存在せず C 少の場合と多の場合とで再適応答が異なる構造）を有するから、2×2 で言えば Chicken に相当することが推量されるよう。

Doebeli ら[6]は、実数連続値型戦略ゲームのダイナミクスを論じる過程で、生物学で観察される共生関係をゲーム論的にモデル化すると、①自他の投資量で決まるゲインと自分の投資量で決まるコストとの差分が最終的利得となるゲームと②他者の投資量で決まるゲイン（完全に他者依存的、生物学的には寄生関係）と自分の投資量で決まるコストとの差分が最終的利得となるゲームとを分けて演繹出来、前者は Chicken 的、後者が PD 的ゲームであることを証している。彼の主張に依れば提示した枠組みはそのまま n 人ゲームにも拡張出来るとしている。実際、Doebeli らの提示した 2 つのゲームは、本稿で示す TOC と PGG とに制約条件を構えたものに相当する。この点からも、TOC が n 人型 Chicken（以下、n-Chicken）であること、PGG が n 人型 PD（以下、n-PD）であるとの推量が首肯されるのである。

三隅は TOC のモデル化に関連して、保存型モデルと供給型モデルと云う概念を提示している[7]。保存型モデルとは、例えば、まさしく「共有地の悲劇」のように、プレーヤーが得るゲイン（便益、牛を放牧して得られる収益）は環境の状態に依存し、過放牧は環境悪化を招来し遂にはゲインを上げ得なくなるとの力学が組み込まれているモデルのことであり、獲得ゲインがその単位活動量（あるプレーヤーが放牧する牛の頭数）に必ず比例する系である。対して、供給型モデルとは、例えばあるタスクを共同で行い、ゲインは熱心に取り組んだ者にもサボッタ者にも一律平等に分配され、サボッタ者はゲインを食うがコスト負担は免れてしまうと云うメカニズムが組み込まれたモデルであり、この場合、コストは必ずその単位活動量（貢献量、上記のパラグラフで云うと投資量）に比例する。石田らが考察しているタスク共同処理問題[8]はこの供給型モデルに類別され、彼らの提示に依拠すれば、これは典型的 n-IPD でモデル化されるから、保存型モデルは PD 的特徴を有するものと推量されよう。

すなわち PGG は供給型であり、TOC は保存型の社会ジレンマゲームであると言える。さらに、三隅は、供給型におけるゲインが単位活動量に比例するか、参加者全員に一律か、保存型におけるコストが単位活動量に比例するか、一律かで、合計 4 分類している。上記に例示した共有地の悲劇は、Hardin の示唆した[9]元々の意味からは、コスト（損失）も単位活動量に比例したモデル化が為されなければならない、この点で先掲した三隅の論考[7]は誤解を含んでおり、神事からの批判に晒されている[10],[11]。一方、上記例のタスク共同処理問題におけるゲインは全員一律に分配され、コストは貢献した者だけに賦課される。よって、本論で論じるモデルを小括するなら、PGG とは、ゲイ

ンは一律付与、コストは単位活動量に比例する供給型モデル。対して、TOC とは、ゲインもコストも単位活動量に比例する保存型モデル、と云うことが出来る。

小論では、先ず、第 2 章で PGG と TOC の一般的数学モデルを明示する。第 3 章では、これら n 人型ゲームを自プレーヤ（ego）に対して社会の平均的振る舞いを見せる架空の相手プレーヤー（opponent）を指定することで擬似的に 2 人ゲーム化し、これに基づき古典ゲーム論的考察を加え、夫々の PD 的特徴、Chicken 的特徴について論及する。第 4 章では数理生物学的定義に遡及することにより、PGG および TOC に対する Replicator Dynamics を導出する。第 5 章と第 6 章では夫々 PGG および TOC の Replicator Dynamics を演繹的に解析し、両ジレンマゲームのジレンマ性（PD 性と Chicken 性）とコスト原単位やプレーヤ数等のゲームパラメータが如何なる関係にあるのかについて考察する。

2. モデル

本章では PGG と TOC の数理モデルを提示するが、戦略集合における協調的戦略と裏切りの戦略の昇降順、降降順が逆になっていることに留意されたい。

2.1 PGG モデルの定式化

プレーヤー数 n の集団においてプレーヤー i は $a(i) \in \{a_1, \dots, a_{N_{st}}\}$ なる資源拠出を行う。資源拠出量はすなわち各プレーヤーにとって戦略であり、戦略総数は N_{st} である。ここで、プレーヤー i が得る利得 π_i が、以下で与えられるゲームを考える。

$$\pi_i = \frac{1}{n} \cdot r \cdot \sum_{k=1}^n a(k) - c \cdot a(i) \quad \dots (1)$$

但し、 c は単位資源拠出量に対するコスト原単位、 r は拠出量の社会和が増幅される係数であり、協調を勧奨する意味を有する。(1)式第 1 項は拠出量の社会和が増幅され、それが遍くプレーヤーに平等に還元されるリターンを表し、第 2 項はその為に当該プレーヤーが被ったコスト負担を意味する。公共財ゲームにおけるフリーライダーとは、自らは拠出せず（第 2 項ゼロ）、第 1 項の還元分をせしめる戦略をとるプレーヤーのことである。(1)式から自明なように、PGG は利得は一律付与、コストは単位活動量に比例する構造を有する。

所謂、n-PD では、 $N_{st} = 2$ 、 $a_1 = 0$ 、 $a_2 = 1$ 、 $c = 1$ である。すなわち戦略 1 ($a_1 = 0$) が裏切り(D)戦略、戦略 2 ($a_2 = 1$) が協調(C)戦略である。

2.1 TOC モデルの定式化

プレーヤー数 n の集団においてプレーヤー i は $a(i) \in \{a_1, \dots, a_{N_{st}}\}$ なる活動を行う。活動のレベル（活動量）はすなわち各プレーヤーにとって戦略であり、戦略総数は N_{st} である。プレーヤー i が得る利得 π_i は、彼の活動量が多ければより大きくなり、かつ、活動量の全社会総和と環境容量とのバランスに左右される（具体的に云うと皆が活動を密にすると、環境が細って各プレーヤーが活動量に応じて得るリターンが減殺されてしまう）との力学を抱懷しなければならない。加えて、活動に伴うコストが各プレーヤーに賦課される。以上の考察から、以下で利得が定義されるゲームを考える。

$$\pi_i = \frac{1}{n} \cdot \left\{ n(N_{st}-1) \cdot m - \sum_{k=1}^n a(k) \right\} \cdot a(i) - c \cdot a(i) \cdots (2)$$

$$\text{但し, } 1 \leq m \cdots (3)$$

ここで、パラメータ m は環境容量 ($n(N_{st}-1) \cdot m$) の余剰の程度に関する係数である。仮に、 $a_1=0, a_2=1, \dots, a_{N_{st}}=N_{st}-1$ とすると (この仮定は議論の本質上必要ない)、 $m=1$ のとき、全プレイヤーが最大活動量 ($a_{N_{st}}=N_{st}-1$) を選択すれば、環境は破綻を来し各プレイヤーへのリターンはゼロになる。つまり、 $m=1$ は環境容量がタイトな設定である (このことは(2)式右辺第 1 項の中括弧内がゼロになることから諒解される)。

$m = \frac{N_{st}-1}{N_{st}-2}$ は、全プレイヤーが最大の活動量を選択したとき、それに応じたリターンの社会総和が丁度環境の容量に一致する場合を意味する (このことは(2)式右辺第 1 項の中括弧内が $n \cdot \frac{N_{st}-1}{N_{st}-2}$ になることから諒解される)。Suzuki[12]は TOC に

ついて(2)式とよく似たモデルを提示しているが、(2)式で云えば右辺第 1 項中括弧前の $1/n$ が抜けていると云う意味で明らかな誤りを含んでおり、加えて、中括弧内の m の項が考慮されていないと云う意味でも不完全なものである。(2)式から自明のように、TOC は利得もコストも単位活動量に比例する構造を有する。

仮に $N_{st}=2$, $a_1=0$, $a_2=1$, $c=1$ を考えると、戦略 1 ($a_1=0$) とは活動を停止する戦略で、コスト負担もゼロながら利得もゼロである。対して、戦略 2 ($a_2=1$) は活動を行う戦略である。名目上、前者を協調戦略、後者を裏切り戦略と云うには馴染まない気もするが、言葉を換えるならば前者は環境維持 (C)、後者は貪りの戦略 (D) である。PGG と戦略の並びと C と D の意味が逆順になっていることに留意。

3. 古典ゲーム理論から見た PGG および TOC

PGG および TOC を古典ゲーム理論的視点から観てみよう。そのために、本来 n 人多数ゲームであるところの両ゲームを 2 人ゲーム化して扱う。すなわち、戦略 i を採用する自分 (Ego) と他者集団を平均した相手 (Opponent, Opp) を指定する。この 2 人ゲームでは、Ego と Opp の利得構造は非対称となる。

例えば、 $N_{st}=2$ における PGG, TOC の利得表を示すと表 1 のようになる。更に $a_1=0$, $a_2=1$, $c=1$, $n=5$ とし、PGG では一定の c に対して大小 2 ケースの r を、TOC では m を図 1 に例示した。PGG の黒プロットは Ego の戦略が s_1 であることを示す。白プロットは s_2 であることを示す。黒線は Opp の戦略が s_1 であることを示す、灰色線は s_2 であることを示す。TOC では逆に黒プロットは Ego の戦略が s_2 であることを示す、白プロットは s_1 であることを示す。黒線は Opp の戦略が s_2 であることを示す、灰色線は s_1 であることを示す。

図から明らかなように PGG では Opp の戦略に依らず、Ego にとっては s_1 が支配戦略になる。このことは r の大小に依存しない。非協調戦略が支配戦略となると云う意味で、このゲームは所謂 2×2 ゲームにおける PD の特徴を有する。また、著者らが提示しているジレンマ強度の考え方[13]を援用すると、図中の P_{12} と (Ego 戦略が s_1 , Opp 戦略が s_2 の解座標を表す。以下同

表 1 2 人ゲーム化した PGG および TOC の利得表

		Opponent	
		s_1	s_2
Ego	s_1	$a_1(r-c),$ $a_1(r-c)$	$r \frac{a_1 + (n-1)a_2}{n} - ca_1,$ $r \frac{a_1 + (n-1)a_2}{n} - ca_2$
	s_2	$r \frac{(n-1)a_1 + a_2}{n} - ca_2,$ $r \frac{(n-1)a_1 + a_2}{n} - ca_1$	$a_2(r-c),$ $a_2(r-c)$

		Opponent	
		s_1	s_2
Ego	s_1	$a_1 \left\{ \left(m - a_1 \right) - c \right\},$ $a_1 \left\{ \left(m - a_1 \right) - c \right\}$	$a_1 \left\{ \left(m - \frac{a_1 + (n-1)a_2}{n} \right) - c \right\},$ $a_2 \left\{ \left(m - \frac{a_1 + (n-1)a_2}{n} \right) - c \right\}$
	s_2	$a_2 \left\{ \left(m - \frac{(n-1)a_1 + a_2}{n} \right) - c \right\},$ $a_1 \left\{ \left(m - \frac{(n-1)a_1 + a_2}{n} \right) - c \right\}$	$a_2 \left\{ \left(m - a_2 \right) - c \right\},$ $a_2 \left\{ \left(m - a_2 \right) - c \right\}$

Upper: Ego's / lower: Opponent's

図 1 PGG および TOC の解可能点の例

様) P_{22} の差異を Ego の利得軸に投影した大きさは、パレート最適性に関連するギャンブル性ジレンマの強度 DL_2 に、 P_{11} と P_{21} の差異を Ego の利得軸に投影した大きさは、パレート最悪性に起因するリスク回避性ジレンマの強度 DL_1 に相当することが諒解される。 $DL_1 = DL_2 = c - r/n$ となり、図からも明らかなように r が大きくなるほどジレンマ性が弱くなることがわかるが、これは常識に整合的である (同様に $DL_1 = DL_2 = c - r/n$ の形から c が大きくなるとジレンマ性が大きくなること、 n を大きくすることは同じ r と c に対してジレンマ性を小さくする向きに作用し、無限大のプレーヤー数に対してはギャンブル性およびリスク回避性ジレンマ強度は c に収束することがわかる)。また、 $c < r/n$ ではジレンマ性は消失し、Trivial ゲームになることがわかる。

TOC では様相が異なる。 c に対して m が大きい場合には、非協調戦略である s_2 が支配戦略になるが、 m が小さくなると、支配戦略は存在しなくなる様子 (図 1(d)) がわかる (このことは m を固定して c を変化させても同様で、 c が小さい領域での s_2 支配が c の増大とともに崩れてくる)。すなわち、Opp が協調戦略 (s_1) の場合は Ego は裏切り戦略 (s_2) を、Opp が裏切り戦略の場合は Ego は協調戦略をとることが合理的になる。これは 2×2 ゲームにおける Chicken の特徴¹³⁾と軌一するものである。更に m を小さくすると、図には示していないが、協調戦略が支配戦略となって Trivial ゲームになる。

r もしくは m に対して c を変化させたときの両ゲームの特徴上の差異を小括すると以下のようになる。

すなわち、PGG では c の大きい側に PD が、小さい側に Trivial が存在するのに対して、TOC では逆に c の小さい側に PD が存在し、 c を大きくすると Chicken 的なジレンマゲームとなり、遂には Trivial ゲームに至る。PGG では、コスト c が大きくなると (相対的には協調の果実 r が小さくなると)、コスト負担に耐えかね (協調のインセンティブが減退し)、裏切りへの誘惑が勝る、と云う構造になっている。TOC では、環境の余剰 m が大きくなると (相対的にはコスト c が小さくなると)、環境破壊への懸念が減退し (コスト負担による drag force が薄れ)、食ろうとする裏切りへの誘惑が勝る、と云う構造になっている。

以上の議論は、ゲームのパラメータ N_{st} , a_1 , a_2 , n を変化させても基本的構造は変わらない。

本章で述べた条々については、次章以降の Replicator Dynamics で演繹的に論じる。

4. PGG および TOC の Replicator Dynamics 基礎式

数理生物学的 Replicator Dynamics の定義^[14]は、

$$\dot{s}_i = s_i (F_i(s) - \bar{F}(s)) \quad \dots(4)$$

ここで、 s_i は戦略 i のシステムにおけるある時間ステップでの存在割合、 s はある時間ステップでのシステムの戦略分布、 $F_i(s)$ は戦略 i がある時間ステップにおいて平均的に獲得する利得 (より一般的には適合度)、 $\bar{F}(s) = \sum s_i \cdot F_i(s)$ 、すなわち、その時間ステップにおける平均的な個体が得る平均的利得を意味する。(4)式は、「ある戦略が、システムの時間進行上、増える

か減るかの変化率 ($\dot{s}_i/s_i$) は、その戦略が上げた平均的利得がその時点での各戦略を戦略分布に応じて選択したときに得られる利得の平均値に対してどれだけ優れているかをダイナミクス上の driving force として決定される」と云う至って明快かつシンプルな物理法則を表している。多くの繰り返しゲームにおける戦略の盛衰 (淘汰を含む) も同様のダイナミクスに依拠すると考えるならば、(4)式の Replicator Dynamics を考察することは有意な営為となる。

(1)式および(2)式の Replicator Dynamics を考えるに際して、戦略 i を採用する自分 (ego) とその時点の戦略分布に基づいて行動する全体母集団 (social) の利得を考える。

このとき、(1)式より PGG における ego の得る利得は、

$$\pi_{ego} = r \cdot \frac{n-1}{n} \cdot a \cdot s - \left(\frac{r}{n} - c \right) \cdot a \cdot s_i \quad \dots(5)$$

ただし、 $a = (a_1 \dots a_{N_{st}})$, $s = (s_1 \dots s_{N_{st}})$ で、 s_i は第 i 要素のみ 1、それ以外は 0 で構成される N_{st} 次元ベクトルである。また、(5)式における、すなわち戦略 i を採用する ego については、 $\sum_{k=1}^n a(k) = (n-1) \cdot a \cdot s + a \cdot s_i$ なる関係が成立することに留意する。

対して、その時点の戦略分布に従って行動した際に得られる社会の利得 π_{social} は以下となる。

$$\pi_{social} = (r - c) \cdot a \cdot s \quad \dots(6)$$

よって、(1)式に対する Replicator Dynamics としては以下を得る。

$$\frac{\dot{s}_i}{s_i} = \left(\frac{r}{n} - c \right) \cdot (a \cdot s_i - a \cdot s) \quad \dots(7)$$

TOC についても同様に(2)式に基づいて、

$$\pi_{ego} = \left\{ m \cdot (N_{st} - 1) - c - \frac{n-1}{n} \cdot a \cdot s - \frac{1}{n} \cdot a \cdot s_i \right\} \cdot a \cdot s_i \quad \dots(8)$$

$$\pi_{social} = \left\{ m \cdot (N_{st} - 1) - c - a \cdot s \right\} \cdot a \cdot s \quad \dots(9)$$

これから、(10)式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{s}_i}{s_i} = & \left\{ m \cdot (N_{st} - 1) - c \right\} \cdot (a \cdot s_i - a \cdot s) + \left(a \cdot s - \frac{n-1}{n} \cdot a \cdot s_i \right) \cdot a \cdot s \\ & - \frac{1}{n} \cdot (a \cdot s_i)^2 \end{aligned} \quad \dots(10)$$

以上により、PGG および TOC に対する Replicator Dynamics が得られた。

5. PGG の Replicator Dynamics 解析

(7)式の静止点 S_0 は、 $s_1 + \dots + s_{N_{st}} = 1$ かつ $s_1 \geq 0, \dots, s_{N_{st}} \geq 0$ なる定義域では、その定義域の端部の点 N_{st} 個しか存在しない (例えば、 $N_{st} = 2$ では $(1 \ 0)$, $(0 \ 1)$ の 2 点、 $N_{st} = 3$ では $(1 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \ 0)$, $(0 \ 0 \ 1)$ の 3 点)。

N_{st} 個の静止点における Replicator Dynamics の Jacobian の固有値は解析的に求めることが出来る。ただし、その一般解は記述するにきわめて冗長であり、議論の見通しもよくないので、一般的傾向は変わらないことを確認した上で、以下では主として $N_{st} = 2$ について議論を進める。

2つの静止点 $\text{pole}_1: (s_1 \ s_2) = (1 \ 0)$, $\text{pole}_2: (s_1 \ s_2) = (0 \ 1)$ における夫々の Jacobian の固有値は、

$$\lambda_{p1,1} = -a_1 \left(-c + \frac{r}{n} \right) \quad \lambda_{p1,2} = (-a_1 + a_2) \left(-c + \frac{r}{n} \right)$$

表2 PGG ($N_{st}=2$, $a_1=0$, $a_2=1$) における Replicator Dynamics の Jacobian 固有値正負とダイナミクスの行方

	$c < r/n$	$r/n < c$
$\lambda_{p1,1}$	0	0
$\lambda_{p1,2}$	+	-
$\lambda_{p2,1}$	-	+
$\lambda_{p2,2}$	-	+
Destination	pole ₂	pole ₁
Game type	Trivial	PD

$$\lambda_{p2,1} = (a_1 - a_2) \left(-c + \frac{r}{n} \right) \quad \lambda_{p2,2} = -a_2 \left(-c + \frac{r}{n} \right)$$

ここで、前章の例に倣って $a_1=0$, $a_2=1$ とすれば, $\lambda_{p1,1}=0$, $\lambda_{p1,2}=-c+r/n$ および $\lambda_{p2,1}=\lambda_{p2,2}=c-r/n$ となる。よって、ダイナミクスの帰結は表2のようにまとめられる。すなわち, $c=r/n$ の前後で2固有値の正負が分かれ, pole₁: (s_1 s_2)=(1 0)が sink となる PD 型のジレンマゲームか, pole₂: (s_1 s_2)=(0 1)が sink となる Trivial ゲームかに分岐する。これは3章で述べた点と軌一する。

$N_{st}=3$ では, 3つの静止点が存在し, それら pole₁: (s_1 s_2 s_3)=(1 0 0), pole₂: (s_1 s_2 s_3)=(0 1 0), pole₃: (s_1 s_2 s_3)=(0 0 1)における夫々の Jacobian の固有値は3つあって,

$$\begin{aligned} \lambda_{p1,1} &= -a_1 \left(-c + \frac{r}{n} \right) & \lambda_{p1,2} &= (-a_1 + a_2) \left(-c + \frac{r}{n} \right) & \lambda_{p1,3} &= (-a_1 + a_3) \left(-c + \frac{r}{n} \right) \\ \lambda_{p2,1} &= (a_1 - a_2) \left(-c + \frac{r}{n} \right) & \lambda_{p2,2} &= -a_2 \left(-c + \frac{r}{n} \right) & \lambda_{p2,3} &= (-a_2 + a_3) \left(-c + \frac{r}{n} \right) \\ \lambda_{p3,1} &= (a_1 - a_3) \left(-c + \frac{r}{n} \right) & \lambda_{p3,2} &= (a_2 - a_3) \left(-c + \frac{r}{n} \right) & \lambda_{p3,3} &= -a_3 \left(-c + \frac{r}{n} \right) \end{aligned}$$

ここで, $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$ とすれば, $\lambda_{p1,1}=0$, $\lambda_{p1,2}=-c+r/n$, $\lambda_{p1,3}=2(-c+r/n)$ と $\lambda_{p2,1}=\lambda_{p2,2}=c-r/n$, $\lambda_{p2,3}=-c+r/n$ および $\lambda_{p3,2}=c-r/n$, $\lambda_{p3,1}=\lambda_{p3,3}=-2(-c+r/n)$ となる。この場合も, $c=r/n$ の前後で pole₁: (s_1 s_2 s_3)=(1 0 0)が sink となる PD 型のジレンマゲームと, pole₃: (s_1 s_2 s_3)=(0 0 1)が sink となる Trivial ゲームとに分岐する基本構造には変わらない。

6. TOC の Replicator Dynamics 解析

(10)式の静止点 $\mathbf{S}_0$ は, $s_1 + \dots + s_{N_{st}} = 1$ かつ $s_1 \geq 0, \dots, s_{N_{st}} \geq 0$ なる定義域では, その定義域の端部の点 N_{st} 個しか存在しない (例えば, $N_{st}=2$ では (1 0), (0 1) の2点, $N_{st}=3$ では (1 0 0), (0 1 0), (0 0 1) の3点)。

N_{st} 個の静止点における Replicator Dynamics の Jacobian の固有値は解析的に求めることができるが, その一般解は PGG のそれ同様, 記述するにきわめて verbose であり, 議論の見通しもよくないので, 一般的傾向は変わらないことを確認した上で, 以下では主として $N_{st}=2$ について議論を進める。

pole₁: (s_1 s_2)=(1 0), pole₂: (s_1 s_2)=(0 1)における夫々の

表3 TOC ($N_{st}=2$, $a_1=0$, $a_2=1$) における Replicator Dynamics の Jacobian 固有値正負とダイナミクスの行方

	$m-c < \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n} < m-c < 1$	$1 < m-c < 1 + \frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n} < m-c$
$\lambda_{p1,1}=0$	0	0	0	0
$\lambda_{p1,2}=-c+m-1/n$	-	+	+	+
$\lambda_{p2,1}=1+c-m$	+	+	-	-
$\lambda_{p2,2}=1+c-m+1/n$	+	+	+	-
Destination	pole ₁	Inner equilibrium	(pole ₂)	pole ₂
Game type	Trivial	Chicken-like	Almost PD	PD
Region	#1	#2	#3	#4

Jacobian の固有値は,

$$\begin{aligned} \lambda_{p1,1} &= a_1^2 - a_1(-c+m) + 2a_1 \left(a_1 - \frac{a_1(n-1)}{n} \right) - \frac{a_1^2}{n} \\ \lambda_{p1,2} &= (-a_1 + a_2)(-c+m) + a_1 \left(a_1 - \frac{a_2(n-1)}{n} \right) - \frac{a_2^2}{n} \\ \lambda_{p2,1} &= (a_1 - a_2)(-c+m) + a_2 \left(a_2 - \frac{a_1(n-1)}{n} \right) - \frac{a_1^2}{n} \\ \lambda_{p2,2} &= a_2^2 - a_2(-c+m) + 2a_2 \left(a_2 - \frac{a_2(n-1)}{n} \right) - \frac{a_2^2}{n} \end{aligned}$$

ここで, 前章同様, $a_1=0$, $a_2=1$ とすると, 各固有値およびダイナミクスの帰結として表3を得る。

ダイナミクスの帰結, すなわち2固有値の正負は, $m-c$ の大小により4つの領域に分かれる。そこで, $c=1$, $n=5$ で固定し, $m=1$ (Region #1), 1.5 (Region #2), 2.1 (Region #3), 2.5 (Region #4) とした場合のベクトル図 (図2) を見てみる。ベクトル図上, 2点 (s_1 s_2)=(1 0), (s_1 s_2)=(0 1) を結んだ線上 (定義域) での矢印群の指し示す向きがダイナミクスの帰結を意味する。

Region #1 と Region #4 は表3の固有値正負の構成からも夫々 pole₁ が sink となる Trivial, pole₂ が sink となる PD であることが自明であり, 図2のベクトル図からもそのことが諒解される。

Region #2 は表3の固有値正負を見ると両静止点は全て正の固有値を持つから, いずれも source 点として作用することがわかる。2×2 ゲームでは定義域端部静止点がいずれも source となる場合, 第3の静止点が必ず定義域内部に存在し, これが sink となってダイナミクスの帰結点 (内部静止点かつ均衡点) となる。すなわち Chicken である。図2の Region #2 を見るとベクトルは定義域外の静止点に吸引され, 結果的には定義域では静止点ではない内部均衡点に至ることが理解される。よって, これは Chicken 的なゲームであると言える。

Region #3 のベクトル図では, ほとんど pole₂ に吸引され, PD の様相を呈していることがわかる。

$N_{st}=3$ では, 3つの静止点が存在し, それら pole₁: (s_1 s_2 s_3)=(1 0 0), pole₂: (s_1 s_2 s_3)=(0 1 0), pole₃: (s_1 s_2 s_3)=(0 0 1)における夫々の Jacobian マトリクスの固有値は3つあって,

$$\lambda_{p1,1} = a_1^2 - a_1(-c+2m) + 2a_1 \left(a_1 - \frac{a_1(n-1)}{n} \right) - \frac{a_1^2}{n}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{p1,2} &= (-a_1 + a_2)(-c + 2m) + a_1 \left(a_1 - \frac{a_2(n-1)}{n} \right) - \frac{a_2^2}{n} \\ \lambda_{p1,3} &= (-a_1 + a_3)(-c + 2m) + a_1 \left(a_1 - \frac{a_3(n-1)}{n} \right) - \frac{a_3^2}{n} \\ \lambda_{p2,1} &= (a_1 - a_2)(-c + 2m) + a_2 \left(a_2 - \frac{a_1(n-1)}{n} \right) - \frac{a_1^2}{n} \\ \lambda_{p2,2} &= a_2^2 - a_2(-c + 2m) + 2a_2 \left(a_2 - \frac{a_2(n-1)}{n} \right) - \frac{a_2^2}{n} \\ \lambda_{p2,3} &= (-a_2 + a_3)(-c + 2m) + a_2 \left(a_2 - \frac{a_3(n-1)}{n} \right) - \frac{a_3^2}{n} \\ \lambda_{p3,1} &= (a_1 - a_3)(-c + 2m) + a_3 \left(a_3 - \frac{a_1(n-1)}{n} \right) - \frac{a_1^2}{n} \\ \lambda_{p3,2} &= (a_2 - a_3)(-c + 2m) + a_3 \left(a_3 - \frac{a_2(n-1)}{n} \right) - \frac{a_2^2}{n} \\ \lambda_{p3,3} &= a_3^2 - a_3(-c + 2m) + 2a_3 \left(a_3 - \frac{a_3(n-1)}{n} \right) - \frac{a_3^2}{n}\end{aligned}$$

ここで, $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $n=5$ とし, m と c を変化させて, pole_1 , pole_2 , pole_3 に対する 3 つの固有値の正負を

表4 TOC ($N_{st}=3$, $a_1=0$, $a_2=1$, $n=5$) における
Replicator Dynamics の Jacobian マトリクス固有値正負と
ダイナミクスの行方

	$m=1,$ $c=5$	$m=1.1,$ $c=1$	$m=5,$ $c=1$
$\lambda_{p1,1}, \lambda_{p1,2}, \lambda_{p1,3}$	0, -, -	0, +, +	0, +, +
$\lambda_{p2,1}, \lambda_{p2,2}, \lambda_{p2,3}$	-, +, +	-, -, -	-, -, +
$\lambda_{p3,1}, \lambda_{p3,2}, \lambda_{p3,3}$	+, +, +	+, +, +	-, -, -
Destination	pole_1	pole_2	pole_3
Game type	Trivial	(Chicken-like)	PD

見ると表4の如くなる。 m と c の相対関係で, m の小さい側に Trivial が, m の大きい側に PD があることは, $N_{st}=2$ の場合と同様である。 $N_{st}=2$ では, この中間領域に, 両端部静止点とも source となって定義域外静止点に吸引されることで, 定義域内部に均衡点 (ただし非静止点) が発生する Chicken-like ゲームの領域があった。 $N_{st}=3$ でも定義域端部静止点の3点全てが source となる条件範囲は存在する ($N_{st}=3$, $a_1=0$, $a_2=1$,

図2 TOC のベクトル ($N_{st}=2$, $a_1=0$, $a_2=1$, $c=1$, $n=5$, X 軸は s_1 , Y 軸は s_2 を表す)。

$n=5$ における3静止点夫々における3固有値, すなわち9つの固有値全てが正値をとる連立不等式を解析的に解くことが可能). よって, $N_{st}=2$ の場合と同意の Chicken-like の領域も存在する. また, 表4からわかるように, $N_{st}=3$ では協調的戦略 s_1 (環境護持) と裏切り戦略 s_3 (貪り戦略) との中間領域に, 中間的戦略 s_2 にダイナミクスが吸引される領域が存在する. これも, 中途半端な戦略が均衡解になると言う意味で Chicken 的なゲームであると云える.

7. 結論

環境問題をジレンマゲームとしてみると, それらを含む n 人型社会ジレンマゲームの基本的数理構造を理解することが重要となる. そこで, 本論では先ず, 多人数ジレンマゲームとして供給型の Public Goods Game (PGG) と保存型の Tragedy of Commons (TOC) を取り上げ, 夫々の一般的数学モデルを明示した.

古典ゲーム理論的考察から PGG はコスト c と協調の果実 r の大小関係により, Trivial と PD に分岐すること, TOC ではコスト c と環境の余剰 m との関係により, Trivial, Chicken-like, PD に相変化することを示した. また, PGG は c が大きくなると (相対的には r が小さくなると), コスト負担に耐えかね, 裏切りへの誘惑が勝る, と云う構造を有するのに対して, TOC は m が大きくなると (相対的には c が小さくなると), 環境破壊への懸念が減退し, 裏切りへの誘惑が勝る, と云う構造を持ち, コスト c の利き方が逆になっている.

このことを証明するために, PGG と TOC の Replicator Dynamics を導出し, これを演繹的に解析し, 如上を確認した.

【参考文献】

- [1]谷本潤,萩島理,三浦泰久; マルチエージェントシミュレーションに基づく人間-環境-社会システムのモデル化一試論, 日本建築学会環境系論文集 No.586, pp.91-97, 2004.12
- [2]Haruyuki Fujii and Jun Tanimoto; Exploration in Complex Systems for Environmentally Symbolic and Sustainable Society, Journal of Asian Architecture and Building Engineering, Vol.2 No.1, pp.107-114, 2003.5
- [3]谷本潤,藤井晴行; 我々が将来に持続可能社会はあるか?, 日本建築学会環境系論文集 No.583, pp.87-94, 2004.9
- [4]木村邦博; 大集団のジレンマ, ミネルヴァ書房, 2002 年
- [5]T.Schelling; Micromotives and Macrobehavior, W.W.Norton & Company, 1960
- [6]M.Doebeli, C.Hauert, T.Killingback; The evolutionary origin of cooperators and defectors, SCIENCE Vol.306, pp.859-862, 2004.10
- [7]三隅一人; 社会的ジレンマ・モデルの一般化, 理論と方法, Vol.8 No.1, pp.69-88, 1993
- [8]石田崇,横井浩史,嘉数侑昇; 競争社会系における価値観群の創発, 人工知能学会誌 No.15 Vol.5, pp.896-903, (2000)
- [9]G.Hadin; The Tragedy of Commons, Science Vol.162, pp.1243-1248, 1968
- [10]神事直人; 「保存」型ジレンマモデルの再考, 理論と方法 Vol.11 No.2, pp.145-156, 1996
- [11]神事直人; 「保存」型ジレンマモデルの再考-海野デルの再検討と一般モデルの構築-, 理論と方法 Vol.12 No.1, pp.15-30, 1997
- [12]K.Suzuki; Effects of conflict between emergent charging agents in social dilemma, Lecture Notes in Computer Science, 3012, pp.120-136, 2003
- [13]相良博喜,谷本潤; ジレンマゲームにおけるジレンマ性に関する考察, 情報処理学会研究報告 知能と複雑系 (ICS-205), pp.-, 2005.3
- [14]C.Hauert, N.Haiden, K.Simund; The dynamics of public goods, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, Vol.4 No.3, pp.575-587, 2004

(2005年1月26日原稿受理, 2005年5月6日採用決定)