風環境の CFD 解析に対する直交格子自動生成

有限体積法 CFD 解析における誤差推定法の比較 (その 1)

AUTOMATIC CARTESIAN GRID GENERATION FOR CFD ANALYSIS
OF WIND ENVIRONMENT

Comparison of error estimation methods in finite volume CFD analysis Part 1

今野 雅*¹, 鎌田 元康*², 坂本 雄三*²

Masashi IMANO, Motoyasu KAMATA and Yuzo SAKAMOTO

In this paper we compare several error estimation methods in finite volume CFD analysis using Cartesian grid method. One of the methods is Richardson's extrapolation method. It is most popular form but it has a lack of requirements of calculation on two meshes. The rest are new methods Jasak proposed, namely Direct Taylor method, Moment method and Residual method. These enable single-mesh error estimation unlike the Richardson method. As a result of our survey about these methods' performance for several rather complex flow test cases, we find that the Residual method's efficiency for adaptive mesh refinement is better than other methods.

Keywords: Error Estimation, Adaptive Mesh Refinement, Cartesian Grid Method, CFD

誤差推定, 解適合格子生成, 直交格子法, 数値流体解析

1 はじめに

近年, 計算機能力の向上に伴ない, 建築の分野においても, 複雑な形状を対象とした数値流体解析 (以下 CFD) が多く行なわれるようになってきている。しかし, 並列計算技術の著しい発展によって, CFD に対する計算時間の短縮が容易になってくると, 今度は, 効率的な格子形成には CFD と格子形成に対する高度な経験が必要であり, それに掛る人的負荷が非常に大きいという問題が相対的に大きくなってきた。一方, 航空や機械の分野では, 複雑な形状に対する格子生成手法として, 直交格子をベースとして, 物体周辺の格子を再帰的に細分して物体形状に概ね適合する格子を生成する直交格子法を用いることが多くなってきている¹⁾⁻³⁾。また, 解適合格子法⁴⁾ (以下 AMR) を併用することにより, 流れ場の性状に応じて自動的に格子の疎密調整を行なうことが可能である。このため, 両者を組み合わせた格子生成法は, CFD や格子形成に対する経験が少ない実務者でも, ほぼ自動的に質の良い格子を生成する手法として期待されている。ところで, AMR により生成される格子の質は, 誤差推定法の精度に大きく影響される。誤差推定法としては, Richardson の補外法⁵⁾ が従来より良く知られており, 建築の分野でも格子の密度の良し悪しを判断する評価法として室内環境や風環境の CFD で用いられてきた^{6), 7)}。この手法では, 必ず 2 つの異なる格子幅による計算結果が必要となるが, 建築設計実務で行う CFD 解析では, 既に建物等の形状を再現するだけでも多くの格子数が必要となるので, 全計算領域でさらに細かい格子を用いて計算するのは現実的ではないこ

とも多い。これに対し, 有限体積法 CFD 解析において単一の格子による結果から誤差を推定できる 3 種の手法が, Jasak らによって提案されており, 様々な流れ場に対して比較・検討されている^{8), 9)}。しかしながら, 検討対象が比較的単純な流れ場に限定されているので, 建築設計実務で対象とするような複雑な流れ場での AMR に適用できるかどうか不明である。また, Richardson の補外法との定量的な比較もされていない。そこで, 本報では, Jasak によって提案された誤差推定法と Richardson の補外法について, ある程度複雑な数種類の流れ場を対象に詳細なスタディを行い, AMR で使用する上での効率の比較を行なったので報告する。

2 誤差推定法の概略

ここでは, 次の定常時における移流・拡散方程式を, 有限体積法を用い, p 次の精度で離散化した場合を対象とする。

$$\nabla \cdot (U\phi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S_u + S_p \phi \quad (1)$$

なお, 支配方程式の厳密解と数値解との差である離散化誤差には, 離散化方程式における打ち切り誤差と, それが移流・拡散された効果が含まれる^{6), 7)}。ここでは移流・拡散した成分は誤差解析の対象としない。その理由としては, 移流・拡散方程式のような非線形な方程式では打ち切り誤差の移流・拡散効果の厳密な評価は難しいことと, 直交格子法における AMR では格子が粗く打ち切り誤差が大きい領域を細分割していき, 全体の誤差を減少するのが主要な目的となるので, 移流・拡散効果の評価は必ずしも重要ではないと考えられることが挙げられる。

本論文は, 既往発表文献¹⁰⁾をもとに加筆・修正したものである。

*¹ 東京大学大学院工学系研究科建築学専攻 助手・修士 (工学)

*² 東京大学大学院工学系研究科建築学専攻 教授・工博

Research Assoc., Dep. of Arch., Grad. Sch. of Eng., the Univ. of Tokyo, M. Eng. Prof., Dep. of Arch., Grad. Sch. of Eng., the Univ. of Tokyo, Dr. Eng.

2.1 Richardson の補外法

Richardson の補外法⁹⁾(以下 Richardson 法) は、格子幅の異なる 2 種類の格子を用いた数値解の差を取ることで、打ち切り誤差を推定する手法である。今、格子の代表的な幅 h を格子の体積と表面積の比で以下のように表す。

$$h = \frac{V_P}{\sum_f |S_f|} \quad (2)$$

この時、 p 次精度の離散化手法を用いて算出した数値解と、厳密解の関係は、2 種類の格子について各々以下のように記述できる。

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, h_1) + h_1^p C(\mathbf{x}) + O(\mathbf{x}, h_1^q) \quad (3)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, h_2) + h_2^p C(\mathbf{x}) + O(\mathbf{x}, h_2^q) \quad (4)$$

ただし、 $h_2 < h_1$, $p < q$ とする。ここで、格子幅がどちらも小さく、打ち切り誤差の主要項である $h^p C(\mathbf{x})$ に比べ、残差項 $O(\mathbf{x}, h^q)$ が概ね無視できるとすると、主要項の係数は以下のように推定できる。

$$C(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x}, h_2) - \phi(\mathbf{x}, h_1)}{h_1^p - h_2^p} \quad (5)$$

この係数を式 (4) に代入することにより、 p 次の打ち切り誤差を取り除いた q 次精度の解を、以下のように補外的に推定できる。

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, h_2) \frac{(h_1/h_2)^p}{(h_1/h_2)^p - 1} - \phi(\mathbf{x}, h_1) \frac{1}{(h_1/h_2)^p - 1} \quad (6)$$

よって、Richardson 法では、細かい格子での解の誤差は、粗い格子での解との差に比例して、以下のように見積もられることになる。

$$e_R(\phi) = \phi(\mathbf{x}, 0) - \phi(\mathbf{x}, h_2) = \frac{\phi(\mathbf{x}, h_2) - \phi(\mathbf{x}, h_1)}{(h_1/h_2)^p - 1} \quad (7)$$

この Richardson 法は、打ち切り誤差の残差項が主要項に比べ十分小さいと仮定しているが、粗い格子ではこの仮定が満たされず、一般に精度が落ちる。

2.2 Direct Taylor 級数法

Direct Taylor 級数法 (以下 Taylor 法) は、解を Taylor 展開した時の p 次の打ち切り誤差を、格子の control volume (以下 CV) 内で積分して、そのまま推定誤差とする手法である⁸⁾⁻¹⁰⁾。今、簡便のため $p = 2$ とすると、この推定誤差は以下のように表せる。

$$e_t(\phi) = \frac{1}{2V_P} |\mathbf{M} : (\nabla \nabla \phi)_P| \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ は以下のように CV の形状で定まる幾何的 2 次テンソルであり、演算子 $:$ はテンソル間の 2 重内積である。

$$\mathbf{M} = \int_{V_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)^2 dV \quad (9)$$

さらに、格子が直方体である時、 $\mathbf{M}$ は以下のように算出される。

$$\mathbf{M} = \frac{V_P}{12} \begin{bmatrix} \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

この時、誤差の推定式は以下のように簡略化される。

$$e_t(\phi) = \frac{1}{24} \left| \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + \Delta y^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_P + \Delta z^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_P \right| \quad (11)$$

この手法は、 p 次以上の打ち切り誤差を完全に無視しているために、誤差をかなり過小評価する。また、 $\nabla \nabla \phi$ といった 2 階の空間微分の CV 内の空間積分値を求める必要があるが、これは格子が十分細かくないと精度良く算出することが出来ないという欠点を有する。

2.3 Moment 法

今、式 (1) の解 ϕ の 2 次中心モーメントを考える。

$$m = \frac{1}{2} \phi^2 \quad (12)$$

このモーメントは、解析的には、以下の支配方程式を満たす。

$$\nabla \cdot (Um) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla m) = S_u \phi + 2S_p m - \Gamma (\nabla \phi \nabla \phi) \quad (13)$$

しかしながら、式 (1) を離散化して求めた解 ϕ を、上式の離散式に代入しても、一般には満たさない。しかし、解が厳密解に近づくにつれて、以下の式で表される残差は消滅する。

$$r_m(m) = \int_{V_P} [\nabla \cdot (Um) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla m) - S_u \phi - 2S_p m + \Gamma (\nabla \phi \nabla \phi)] dV \quad (14)$$

この性質を利用して、上式の残差から解の誤差を推定するのが Moment 法である⁸⁾⁻¹⁰⁾。ただし、残差の次元は $[\phi]^2 \cdot L^3 \cdot T^{-1}$ であるが、推定する誤差の次元は解と同じであることが望ましいため、以下で定義されるタイムスケールを用い規格化を行なう。

$$U_{trans} = |U| + \Gamma/h \quad (15)$$

$$T = \frac{h}{U_{trans}} = \frac{h^2}{|U| + \Gamma} \quad (16)$$

最終的に、Moment 法での残差は次式により求まる。

$$e_m(\phi) = 2 \sqrt{\frac{|r_m(m)T|}{V_P}} \quad (17)$$

Moment 法では解の 2 乗量を扱うため、推定される誤差の分布が双曲面状になりやすい上、誤差を過大評価する傾向がある。

2.4 Residual 法

Residual 法は、有限要素法で用いられる各要素での支配方程式の残差を基にした誤差推定法を、有限体積法用にアレンジしたものである⁸⁾⁻¹⁰⁾。今簡便のため、支配方程式は 2 次精度の離散化を行うとする。この時、Fig.1 に示すように、数値解 ϕ は格子内で線形に分布していると仮定している。

Fig. 1 Inconsistency between interpolation and extrapolation on a face

すると CV 内の ϕ の分布は、以下の式で表すことができる。

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla \phi)_P \quad (18)$$

ここで、有限体積法では、通常、解の勾配はガウスの定理を用いて、以下のように求める。

$$(\nabla \phi)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f S_f \phi_f^i \quad (19)$$

また、上記のような離散化に必要な界面での値 ϕ_f^i は、隣接する格子の定義点での値を線形に補間して以下のように求める。

$$\phi_f^i = \alpha \phi_P + (1 - \alpha) \phi_N \quad (20)$$

一方、格子内での線形分布を仮定した式 (18) で求められる界面での値 ϕ_f^e は以下で与えられ、一般に ϕ_f^i と異なる。

$$\phi_f^e = \phi_P + (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla \phi)_P \quad (21)$$

両者は、隣接する格子を含めて解が線形に分布する場合でないと厳密には一致しないが、その不一致の度合は、格子内で線形分布を仮定して構成した離散化方程式の残差と関係づけられる。

以上より、Residual 法では、格子における残差を以下のようにして求める。式 (1) を格子内で空間積分し、以下のように離散化する。

$$r(\phi) = \int_{V_P} [\nabla \cdot (U\phi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) - S_u - S_p \phi] dV \quad (22)$$

$$= \sum_f S_f \cdot [U_f \phi_f - \Gamma_f (\nabla \phi)_f] - (S_u + S_p \phi_P) V_P \quad (23)$$

上記の式は、数値解 ϕ が満足しているため零になるが、残差法では、ここで、界面の値 ϕ_f として ϕ_f^g を用い、界面での勾配 $(\nabla \phi)_f$ として、 $(\nabla \phi)_P$ を用いて上記を評価するので、以下に示す残差が発生する。

$$r_r(\phi) = \sum_f S_f \cdot [U_f \phi_f^g - \Gamma_f (\nabla \phi)_P] - (S_u + S_p \phi_P) V_P \quad (24)$$

さらに、以下に示すような拡散フラックスと対流フラックス、生成項の比例係数を足して規格化用フラックスを算出する。

$$F_{diff} = \sum_f (|S_f| \Gamma_f / |d|) \quad (25)$$

$$F_{conv} = \sum_f \max(S_f \cdot U_f, 0) \quad (26)$$

$$F_{norm} = F_{conv} + F_{diff} + S_p V_P \quad (27)$$

最終的には、式 (24) を、式 (27) のフラックスで除して、Residual 法での推定誤差が求まる。

$$e_r(\phi) = \frac{r_r(\phi)}{F_{norm}} \quad (28)$$

この手法は、CFD 解析する際に用いる移流・拡散方程式の離散化方程式に非常に近い形を用いて誤差を推定するので、解の Taylor 展開に基づく Richardson 法や Taylor 法と異なり、誤差の推定精度が格子の疎密さにあまり依存しないという特徴を持つ。ただ、誤差推定自体のコストは他の手法に比べて高いが、別の格子上でも解を計算する Richardson 法に比べると、全体のコストは非常に低い。

3 誤差推定法の比較

ここでは、前節で概説した誤差推定法について、3 種類の流れ場に関して、比較・検討を行なった。基礎方程式に対する離散化手法としては有限体積法を用い、定常状態を対象として SIMPLE 法を用い解析した。また、用いた格子は非構造格子であり、流れ場の速度、圧力等の諸量の定義点は、格子の中心である。なお、この研究では、複雑な市街地を想定した環境解析等の実務計算を最終的な対象としているため、乱流モデルとしては、現時点において計算負荷が高すぎてまだ実務的では無いと考えられる低レイノルズ数型 RANS モデルや、LES モデルを使うことは想定せず、高レイノルズ数型の $k-\epsilon$ モデルを使用した場合を想定している。また、Jasak らの研究¹⁰⁾によると、格子を細かくしても乱流エネルギー消散率の推定誤差はあまり減少しないことから、AMR での格子細分割を判断する対象としては有効ではないと考え、本研究では乱流エネルギー消散率の誤差は扱わない。

3.1 AMR 用効率の定義

本報では、誤差推定法を AMR に使う上での性能を定量的に測るために、以下の式で定義される AMR 用効率という指標を導入した。

$$\eta(\epsilon) \equiv \frac{\sum_{\Omega(\hat{e}_O > \epsilon)} e_E V_P}{\sum_{\Omega(\hat{e}_O > \epsilon)} 1} \div \frac{\sum_{\Omega(\hat{e}_E > \epsilon)} e_E V_P}{\sum_{\Omega(\hat{e}_E > \epsilon)} 1} \quad (29)$$

ここで、 $\Omega(\hat{e} > \epsilon)$ は、Fig.2 に示すように、規格化誤差が設定した閾値 ϵ より大きい領域であり、細分割の対象となる領域である。また、 $\Omega(\hat{e}_E > \epsilon)$ は、上記において、正解値の規格化誤差を用いた場合であり、 $\Omega(\hat{e}_O > \epsilon)$ は、誤差推定法で推定した規格化誤差を用いた場合である。なお、規格化誤差とは、誤差から、格子の体積重み付け平均値を引いた後に、標準偏差で割って規格化した値であるが、細分割の判断に規格化誤差を使用する理由は後述する。

Fig. 2 Candidate region for mesh refinement

また、 $\sum_{\Omega(\hat{e} > \epsilon)}$ は、上記の領域で積算することを表し、 e_E は格子での正解誤差、 V_P は格子の体積であるから、式 (29) の右辺第 1 項の分子は、「推定された規格化誤差が閾値以上の領域において、正解誤差を積算したもの」である。同様に、右辺第 1 項の分母は、「推定された規格化誤差が閾値以上の領域の格子数」である。これらはそれぞれ、領域 $\Omega(\hat{e} > \epsilon)$ 内の格子を細分割し、再計算を行なった場合に、以下に示す指標を良く代表すると考える。

分子 (正解誤差の積算値) : 再計算により減少する正解誤差の積算値
分母 (格子数) : 再計算にかかる計算時間

よって、式 (29) の AMR 用効率 $\eta(\epsilon)$ は、対象の誤差推定法を用いて推定された誤差が、設定した閾値より大きい領域を細分割して流れ場を再計算する AMR を行なった際の、「単位計算時間当たりの、正解誤差の積算値に関する減少量」というコストパフォーマンスを、仮に誤差の正解値がわかっている場合を基準に表わしていると言える。なお、この $\eta(\epsilon)$ は、式 (29) の定義上、 $\Omega(\hat{e}_E > \epsilon)$ と $\Omega(\hat{e}_O > \epsilon)$ が同一の場合には 1 となる。また、 $\Omega(\hat{e}_O > \epsilon)$ の体積が小さくて、そこに高い正解誤差が密集していた場合には、1 を越えることもある。

AMR 用効率 $\eta(\epsilon)$ の算出は、具体的には以下に行う。

1. 対象となる流れ場を、最密格子上で計算し、これを精密解とおく。
2. 対象となる格子上で、上記の流れ場を計算し、これを粗格子解とする。
3. 誤差推定法により、粗格子解の誤差を推定し、規格化した誤差も算出する。
4. 精密解を対象の格子上に線形補間し、それと粗格子解との差の大きさ (絶対値) を正解誤差とする。速度については、ベクトル差の大きさを誤差とする。また、正解誤差についても規格化誤差を算出する。
5. 規格化誤差に対する閾値を 0 から 2 の範囲で設定し¹¹⁾、推定誤差の規格化誤差が閾値を超える領域を求める。
6. 上記の領域内の全ての格子において、正解誤差を積算する。また、格子数も求め、その比であるコストパフォーマンスを算出する。
7. 正解誤差についても、その規格化誤差が閾値を超える領域を求め、上記と同様にコストパフォーマンスの算出を行う。
8. このように求めた推定誤差についてのコストパフォーマンスを正解誤差についてのコストパフォーマンスで割ることで AMR 用効率 $\eta(\epsilon)$ が求まる。

この $\eta(\epsilon)$ は、閾値 ϵ に依存した値であるが、閾値に依存しない効率を求めたほうが、誤差推定法相互の比較が容易と思われる。そこで、 $\hat{\eta} \equiv \int_0^2 \eta(\epsilon) d\epsilon / 2$ で定義される AMR 用平均効率 $\hat{\eta}$ を算出し、誤差推定法の AMR に対する全体的な効率を示す指標として用いた。なお、 $\hat{\eta}$ を数値積分する際の閾値の刻みは 0.01 とした。

3.2 層流 2 次元バックステップ流れ

まず初めに、層流の 2 次元バックステップ流れ¹¹⁾を対象に、各誤差推定法の基礎的な比較を行った。解析対象の Fig.3 に、計算条件

を Tab.1 に示す。格子には等間隔の正方形格子を用い、格子の level が 1 つ上る毎にさらに 4 分割していった。なお、この流れ場には厳密解が現時点では存在しないため、誤差推定の正解値となる厳密解からの差は算出できない。しかし、Fig.4 に示す通り、最密格子付近で再付着距離は収束しており、レイノルズ数も 100 と低く層流状態にあるため、これ以上格子数を増やしても流れ場はほとんど変化しないと考えられる。よって、最密格子での解がほぼ厳密解に近いと見なし、これとの差を解の正解誤差 (以下 Exact) とした。まず、Fig.5 に速度の誤差を流入風の最大値で除した誤差割合の最大値と平均値を示す。Residual 法と Richardson 法はどちらも、Exact とほぼ一致しているが、Moment 法は過大評価し、Taylor 法では過小評価している。なお、Richardson 法ではその性質上、最粗格子である level 1 での誤差は推定できていない。Fig.6 に level 3 格子における誤差割合の累積相対頻度分布を示すが、Moment 法と Taylor 法の累積相対頻度分布は Exact と大きく離れている。このため、Moment 法と Taylor 法では、AMR における細分割の判断基準として誤差割合を用いてしまうと、細分割が過大または過小になってしまい現実的ではない。また、Residual 法と Richardson 法においても、格子が粗くなるにつれ Exact の分布と離れるため、格子が粗い段階で誤差割合を用いるのは同じく避けるべきと考える。そこで、本研究では、細分割の判断基準として、規格化誤差を用いることにした。実際、Fig.7 に示す通り、規格化した誤差の累積相対頻度分布は、どの手法においても、格子の疎密によらず、概ね Exact と一致するので、格子が粗い段階での過大・過小な細分割を避けることが出来る。

以上から、速度の誤差を規格化した規格化誤差の分布を、速度の誤差の平均値・標準偏差と併せて Fig.8 に示すが、Richardson 法が Exact と最も良く対応している。どの手法においても、段差の角における大きな規格化誤差を推定できているが、Moment 法では流出に近い領域で分布が他と異なる。Residual 法と Taylor 法の分布は似ているが、Taylor 法は Residual 法に比べ、dividing streamline 付近で過小に、流入口では過大に規格化誤差を推定している。

次に level 3 格子での AMR 用効率を Fig.9 に示すが、Richardson 法が一番良く、他の手法にあまり差はない。なお、ここでは参考までに、閾値が 0 以下と 2 以上の場合の AMR 用効率も描いている。

最後に、AMR 用平均効率を Fig.10 に示す。全体的に Richardson 法が一番良いが、level が 4 以上の細かい格子では、Residual 法や Taylor 法も高い平均効率を持つ。誤差割合の最大値・平均値については Residual 法が Exact と良く一致することを併せて考えると、Residual 法は Richardson 法の次に良い手法と言える。

Fig. 3 Laminar flow over a 2-D backward-facing step test case

3.3 乱流 2 次元バックステップ流れ

次に乱流 2 次元バックステップ流れを対象に検討を行った。解析対象を Fig.11 に、計算条件を Tab. 2 に示す。ただし、先程の層流解析と異なり、高レイノルズ数型 RANS モデルでの解析は、壁面境界条件は壁関数により定めるため、壁に最近傍の格子における物理

Tab. 1 Laminar 2-D flow: Calculation conditions

Reynolds number	$U_{max}H_s/\nu = 100$
Inlet boundary	$U_{in} = U_{max} [1 - (2y/H_s - 3)^2]$
Outlet boundary	Zero gradient for all properties
Wall boundary	Non slip wall
Conv. diff. scheme	Central differencing
No of cells	level 1: 1.2×10^2 ($1/2H_s$)
(Mesh spacing)	level 7(Exact): 5.1×10^5 ($1/128H_s$)

Fig. 4 Laminar 2-D flow: Reattachment length

Fig. 5 Laminar 2-D flow: Percentage of velocity error

Fig. 6 Laminar 2-D flow: Cumulative relative frequency about the percentage of velocity error on the third level mesh

Fig. 7 Laminar 2-D flow: Cumulative relative frequency about the normalized velocity error on the third level mesh

Fig. 8 Laminar 2-D flow: Normalized error field and error statistics of velocity on the third level mesh

量の定義点を対数則領域に置く必要があり、壁の法線方向の格子幅をあまり細かくできない。また、法線方向の分割が粗すぎても、壁面摩擦応力が良く再現されないため、流れ場の様相が大きく変化してしまい、誤差評価が難しい。そこで、本解析では Fig.12 に示すように、どの level の格子でも上下床面に最近傍の格子の壁法線方向

Fig. 9 Laminar 2-D flow: Efficiency for AMR on the third level mesh

Fig. 10 Laminar 2-D flow: Mean efficiency for AMR

の幅は統一し、壁座標の平均を 30 程度に揃えた。このため、格子の滑らかさも考慮すると、最密格子での格子幅を層流時のように非常に小さくすることは出来なかったが、ここでも最密格子での解を正解値と見做し、誤差の解析を行なった。

Fig.13 に規格化誤差分布を誤差の平均値・標準偏差と併せて示すが、速度に関しては Residual 法の分布形状が Exact に一番近い。その他は、概ね層流の時と同様な傾向が得られた。乱流エネルギーに関しては、どの手法も後流付近における大きな規格化誤差を推定できているが、ここでも Exact と一番近いのは Residual 法である。

次に、誤差割合の平均値を Fig.14 に示す。速度については、層流の時と異なり、あまり良い一致は見られない。乱流エネルギーに関しては、Exact に比べ、Taylor 法がかなり過小評価する一方、その他の手法での対応は概ね良い。

最後に、AMR 用平均効率を Fig.15 に示す。速度に関しては、Residual 法が良く、Taylor 法が悪い。乱流エネルギーに関しては、Residual 法が一番良く、その他はほぼ変わらない。

Fig. 11 Turbulent flow over a 2-D backward-facing step test case

Tab. 2 Turbulent 2-D flow: Calculation conditions

Inlet boundary	Interpolate from exp. results ¹²⁾
Outlet boundary	Zero gradient for all properties
Wall boundary	Generalized log-law (wall function)
Turbulence model	RNG $k - \epsilon$ ¹³⁾
Conv. diff. scheme	TVD (van Leer limiter)
No. of cells	level 1: 2.6×10^2 ($1/2H_s$)
(mesh spacing)	level 4(Exact): 1.1×10^4 ($1/16H_s$)

Fig. 12 Turbulent 2-D flow: Examples of mesh

Fig. 13 Turbulent 2-D flow: Normalized error field and error statistics of velocity and turbulent energy on the second level mesh

Fig. 14 Turbulent 2-D flow: Percentage of the mean error

Fig. 15 Turbulent 2-D flow: Mean efficiency for AMR

3.4 低層建物周辺の流れ

最後に低層建物周辺の流れを対象に検討を行った。解析対象を Fig.16 に、計算条件を Tab. 3 に示す。対称面における格子を Fig.17 に示すが、この流れ場でも、格子の違いによって、地表面での摩擦

応力が大幅に変化しないよう、地表面法線方向の格子幅は統一し、壁座標の平均を 100 程度に揃えた。さらに、建物表面での離・再付着性状が大きく変わらないようにするため、建物最近傍の格子はどの level でも同じ大きさとなるようにした^{注2)}。

まず、Fig.18 に、level 2 格子での対称面における速度と乱流エネ

ルギーの規格化誤差分布を、誤差の平均値・標準偏差と併せて示す。速度に関しては、どの手法も地表面や建物近傍での大きな規格化誤差は推定できている。Moment 法では、建物周辺での規格化誤差が過大なうえ、分布の様相が明らかに Exact とは異なる。Richardson 法は、建物後流での規格化誤差が過大である。Residual 法と Taylor 法は誤差の分布が似ているが、建物後流での分布は Residual 法のほうが Exact に近い。乱流エネルギーに関しては、Richardson 法の分布が一番 Exact の分布と近いが、その他の手法でも概ね Exact での分布を再現している。紙面の都合上、図は省略したが、建物の半分の高さにおける水平面の分布においても概ね同様の傾向が得られた。

ところで、この対象では、最粗格子においても、上空における規格化誤差は低く、厳しい閾値を設定しない限り、これ以上細分割する必要がある。しかし、誤差推定法として、全領域に対して Richardson 法を用いるとすると、細分割が必要がない領域も含め、一度全領域を細分割して CFD 計算を行わなくてはならず、Richardson 法の計算効率が悪いことが改めて確認された。

次に、誤差割合の平均値を Fig.19 に示す。速度については、Richardson 法と Residual 法が Exact とかなり近いが、乱流エネルギーに対しては、両者が Exact に比べ過大に推定するようになる。

最後に、AMR 用平均効率を Fig.20 に示す。速度に関しては、Residual 法、Taylor 法の効率が良い^(注3)。乱流エネルギーに関しては、Residual 法と Moment 法が良いが、どの手法でもあまり大きな差はない。この流れ場では、規格化誤差の分布や速度の誤差割合に対する Exact との一致度合、および AMR 用平均効率の高さを総合的に考慮すると、Residual 法が一番良い性能を示していると言える。

Fig. 16 Turbulent 3-D flow around a low-rise building test case

Tab. 3 Turbulent 3-D flow: Calculation conditions

Mesh dimension	$16H_b(x) \times 6.3H_b(y) \times 4.8H_b(z)$
Inlet boundary	U, k : Interpolate from exp. results ⁽⁴⁾ ϵ : calc. under the assumption: $P_k = \epsilon$
Top, side, outlet boundary	Zero gradient for all properties
Ground and wall boundary	Generalized log-law (wall function)
Turbulence model	Shih's Quadratic non-linear $k - \epsilon$ ⁽¹⁵⁾
Conv. diff. scheme	TVD (van Leer limiter)
No. of cells	level 1: 1.3×10^4 ($4/5H_b$)
(largest mesh spacing)	level 4(Exact): 1.5×10^6 ($1/10H_b$)

Fig. 17 Turbulent 3-D flow: Examples of mesh on the symmetric plane

4 まとめ

本研究で得られた知見をまとめると以下ようになる。

- AMR で誤差推定法を使用する上での効率を定量的に測るため

Fig. 18 Turbulent 3-D flow: Normalized error field of velocity and turbulent energy on the symmetric plane of the second level mesh

Fig. 19 Turbulent 3-D flow: Percentage of the mean error

Fig. 20 Turbulent 3-D flow: Mean efficiency for AMR

に、AMR 用効率という指標を導入した。

- Jasak らが提案した単一な格子のみで CFD 解析値の誤差の推定ができる 3 種類の誤差推定法と、古くから一般的に用いら

れている Richardson の補外法について、ある程度複雑な数種類の流れ場を対象にして、その性能を詳細に比較・検討した。

- Taylor 法は、規格化誤差の分布の正解値との対応や AMR 用効率が悪くないが、誤差割合をかなり過小評価する。
- Moment 法は、速度の誤差割合を過大評価し、規格化誤差の分布の形状も正解値と大きく異なる。
- Richardson 法は、層流流れにおいては、他の手法に比べ卓越した誤差推定性能を持つが、乱流の複雑な流れ場においては、他の手法とそれほど変わらない。元々この手法は単一の格子上下での CFD 結果から誤差推定が出来ない欠点を考えると、実務上 Richardson 法で誤差推定を行なうのは効率が悪いと言える。
- Residual 法は、どの流れ場においても、規格化誤差の分布や誤差割合が正解値とかけ離れておらず、かつ、概ね良い AMR 用平均効率を持っているため、本報で比較した他の手法に比べ、誤差の推定性能に優れていることがわかった。

また、今後の課題としては、以下が挙げられる。

- 市街地での風環境解析等さらに複雑な流れ場を対象とした比較。
- 実際に AMR を用いて格子生成をした場合での検証。

謝辞

本研究は文部科学省科学研究費補助金若手研究 (B) 「解適合格子・超並列計算を用いた住宅の通風性予測ソフトウェアの開発」(平成 16-17 年度、研究代表者:今野 雅) によるものである。また、CFD 解析や誤差推定のソフトウェア開発には、オープンソースの CFD ツールキットである OpenFOAM^{[6], [7]}を用いた。

注

注 1) 閾値として 0 以下の値を用いる、つまり平均値以下の誤差を持つ格子を細分割してしまうと、格子数が莫大に増え、計算量が過大になってしまう。また、閾値として 2 以上の値を用いると、逆に細分割される格子が少なく、AMR の 1 ステップでは誤差が減少する領域が狭いため、AMR のステップを多く反復する必要がある、結果的に計算量を増加させてしまう。さらに、細分割する領域での誤差積算値や格子数が小さすぎて、AMR 用効率算出の適用範囲を超えてしまう可能性がある。そこで、本研究では、AMR 用効率の適用範囲は 0 から 2 までは適当であるとした。なお、我々の研究では、AMR 時の細分割の閾値としては通常 1 を用いている。

注 2) Richardson 法では、異なる大きさの格子間でないと誤差の推定が出来ないので、建物最近傍の格子での誤差は推定することが出来なかったが、その領域の体積は小さいので、誤差割合の平均値や AMR 用効率にはほとんど影響しない。

注 3) level 2 の格子における速度に対する AMR 用平均効率に関して、Richardson 法や Moment 法での効率が 0.7 以下なのに対して、Residual 法や Taylor 法では 1.5 を超える大変良い効率が出ているが、これは以下のように説明できる。AMR 用効率の定義である式 (29) は、以下のように誤差の積算値の比と、格子数の比の積の形で書くことができる。

$$\eta(\varepsilon) = \frac{\sum \Omega(\varepsilon_{\text{推定}} > \varepsilon) \varepsilon_F V_P}{\sum \Omega(\varepsilon_{\text{推定}} > \varepsilon) \varepsilon_F V_P} \times \frac{\sum \Omega(\varepsilon_{\text{正解}} > \varepsilon) 1}{\sum \Omega(\varepsilon_{\text{正解}} > \varepsilon) 1} \quad (30)$$

この流れ場では、格子が粗い場合、速度場に関する誤差正解値の大きな領域はほぼ地表面付近に集中しているが、どの誤差推定法でも、地表面の規格化誤差は良く推定できているので、式 (30) の右辺第 1 項の誤差の積算値の比は、どの誤差推定法でも、AMR 用平均効率を算出する閾値の範囲で、1 程度の大きな値を示す。しかし、Moment 法や Richardson 法では、地表面や建物周辺以外で規格化誤差を過大に推定している領域が多いため、式 (30) の右辺第 2 項の細分割の候補である格子数の比が 0.4 から 0.9 程度に留まり、AMR 用平均効率も 0.5 から 0.7 程度となった。これに対し、Residual 法や Taylor 法では、建物周辺や後流での規格化誤差を過小に推定している領域が多いので、細分割の候補となる格子数の比が 1.3 から 2.6 程度と大きくなり、結果として AMR 用平均効率が 1.5 以上と大きくなった。規格化誤差を過小評価すると、本来は細分割すべき格子を見落すことが多くなるが、この AMR 用効率ではあくまで、推定された誤差が閾値以上の格子を細分割して再計算した場合での、「単位計算時間当りの正解誤差の積算値に関する減少量」という、実際にその誤差推定法を用いて AMR をした場合でのコストパフォーマンスの指標であり、本来細分割すべきだが、閾値以下の誤

差が推定されたために細分割されない領域についてはここでは考慮しない。正解誤差の分布が非常に偏っているような流れ場では、このような見落としの領域における正解誤差の積算値が大きくなる可能性があるため、そのような場合には、見落とし分を含めた、より総合的な AMR 用効率の評価が必要となると考える。

記号表 記号

C: 打ち切り誤差の主要項の係数, d: 隣接格子の中心点間ベクトル, e: 誤差, F: フラックス, h: 代表的格子幅, H: 高さ, k: 乱流エネルギー, L: 距離, M: 格子の幾何的 2 次テンソル, m: 2 次中心モーメント, p, q: 離散化次数, P: 生産項, r: 残差, S: 生成項, S: 面積ベクトル, T: タイムスケール, T: 時間, U: 速度ベクトル, V: CV 体積, x, y, z: 空間座標, x: 位置ベクトル, X: 再付着距離, α : 内挿補間係数, Γ : 拡散係数, Δ : 直方体格子の幅, η : AMR 用効率, ε : 細分割閾値, ε : 乱流エネルギー消散率, ν : 動粘性係数, Ω : 細分割領域, ϕ : 数値解, Φ : 厳密解, σ : 標準偏差

添字

$\square_f$: 格子の界面, $\square_u, \square_p$: 生成項係数, $\square_P$: 格子の中心点, $\square_N$: 隣接格子の中心点, $\square_R$: Richardson 法, $\square_T$: Taylor 法, $\square_m$: Moment 法, $\square_r$: Residual 法, $\square_E$: Exact, $\square_O$: 誤差推定法, $\square_{conv}$: 移流, $\square_{diff}$: 拡散, $\square_{norm}$: 規格化, $\square_{trans}$: 輸送, $\square_P$: 床面, $\square_{in}$: 流入風, $\square_{max}$: 流入風での最大値, $\square_s$: 段差, $\square_b$: 建物, $\square^d$: 内挿, $\square^e$: 勾配, $\square$: 格子の体積重み付け平均, $\bar{\square}$: 平均値と標準偏差を用いて規格化した値 (e.g. 規格化誤差: $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon - \bar{\varepsilon})/\sigma_\varepsilon$), $\bar{\eta}$: AMR 用効率の平均値

参考文献

- 1) Wang, Z.J. and Srinivasan, K.: An Adaptive Cartesian Grid Generation Method for 'Dirty' Geometry, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 39, pp. 703-717, 2002
- 2) 小野謙二: 設計における直交格子法の利用, 日本流体力学会誌 ながれ 21, pp.16-25, 2002
- 3) 藤本圭一郎, 藤井孝蔵: 特徴線保持 Viscous Cartesian Grid 法による粘性計算用格子生成の自動化, 第 18 回数値流体力学シンポジウム, D9-3, 2004
- 4) Berger M.J., Oliger J.: Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations, Journal of Computational Physics, Vol. 53, pp.484-512, 1984
- 5) L.F. Richardson: The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a masonry dam, Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A, Vol. 210, pp. 307, 1910
- 6) 村上周三, 加藤信介, 永野紳一郎: 差分間隔に伴う数値誤差の推定・評価方法室内気流数値解析の診断システムに関する研究 (第 1 報), 日本建築学会計画系論文報告集, No.385, pp.113-121, 1988.3
- 7) 村上周三, 持田灯, 村上里美: Adaptive Grid 手法を用いた建物周辺乱流の数値解析, Passive Method の 3 次元 k- ε モデルへの適用, 日本建築学会計画系論文報告集, No.393, pp.1-9, 1988.11
- 8) Jasak, H.: Error analysis and estimation for the Finite Volume method with applications to fluid flows, PhD. Thesis, Imperial College, University of London, 1996
- 9) Jasak, H. and Gosman, A.D.: Automatic resolution control for the Finite Volume Method. Part 1: A-posteriori error estimates, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, Vol. 38, No. 3, pp.237-256, 2000
- 10) Jasak, H. and Gosman, A.D.: Residual error estimate for the Finite Volume Method, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, Vol. 39, pp.1-19, 2001
- 11) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F., Schoenung, B.: Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 127, pp. 473-496, Feb. 1983
- 12) N.Kasagi et al.: Three-dimensional particle-tracking velocimetry measurement of turbulence statistics and energy budget in a backward-facing step flow, Vol.16, No.6, pp.477-485, Dec. 1995
- 13) V. Yakhot, S. A. Orszag, S. Thangam, T. B. Gatski, and C. G. Speziale: Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, Vol. 4, Issue 7, pp.1510-1520, 1992
- 14) 持田 灯, 村上周三, 近藤宏二, 土屋学: 改良 k- ε モデルを用いた低層建物モデル壁面風圧力の数値解析, 生産研究, 48 巻, 2 号, 1996.2.
- 15) Shih, Tsan-Hsing, Zhu, Jiang, Lumley, John L.: A realizable Reynolds stress algebraic equation model, NASA-TM-105993, 1993
- 16) H.G.Weller et al.: A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques, Computers in physics, Vol.12, No.6, pp.620-631, Nov./Dec. 1998
- 17) 今野 雅, 鎌田元康: 解適合格子・超並列計算を用いた住宅の通風性予測ソフトウェアの開発 (その 1) オープンソース CFD ツールを用いた CFD 解析ベンチマークテスト, 日本建築学会大会学術講演会梗概集, D-2, pp.779-780, 2005
- 18) 今野 雅, 大西直紀, 坂本雄三, 鎌田元康: 住宅の通風性予測に適した自動格子生成に関する研究 (その 1) CFD 解析における誤差推定法の比較, 日本建築学会大会学術講演会梗概集, D-2, pp.697-698, 2006

(2006年9月7日原稿受理, 2006年11月1日採用決定)