非圧縮粘性流れの3次上流有限要素シミュレーション

THIRD-ORDER UPWIND FINITE ELEMENT SIMULATION OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOWS

近藤典夫*, 西村敏雄**, 加納充浩***

Norio KONDO, Toshio NISHIMURA and Mitsuhiro KANO

A third-order upwind finite element scheme for direct numerical simulation of high Reynolds number flows is presented. The scheme is proposed based on both the Petrov-Galerkin formulation and the mixed method which enables to use the linear elements. Numerical dissipation added into the scheme is expressed by the fourth-differentials with respect to the flow velocities, so that accuracy of the discretization for the advection terms becomes a third-order. Numerical results of flows in a cavity are presented to illustrate the effectiveness and robustness of the proposed upwind scheme.

Key words: third-order upwind scheme, Petrov-Galerkin formulation, mixed formulation, finite element method

3次上流スキーム、ペトロフ・ガラーキン表現、混合表現、有限要素法

1. はじめに

建築物は、居住性、機能性そしてデザインの観点から多彩な形態をもって作られており、建築物に係る多くの流体現象を把握しておくことは極めて重要なことである。この流体に関する研究体系は、実験的アプローチと平行して、スーパーコンピュータの発達と効果的な計算手法の開発に相まって、数値流体力学という名の下に発展し、多くの数値計算¹⁾が行われてきた。建築工学の分野に関する流体は、非圧縮性の条件を課すことができるので、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式と連続方程式によって支配される。このナビエ・ストークス方程式は強い非線形性を有しており、差分法か有限要素法を使って離散方程式に変換されることが多く、この結果、時間に関する連立常微分方程式として再構成される。そして、時間進行方向の積分には陰解法、準陰解法²⁾など多くの数値時間積分を適用して数値解が求められている。

離散方程式を作るとき、差分法では中心近似、有限要

素法ではガラーキン法を使うと、計算された解は数値的に不安定となることができない。これは高レイノルズ数領域において特に顕著となる。そのために、数値粘性項をナビエ・ストークス方程式の中に付加し、数値解の安定化を計ることが行われている。差分法では、4階3次の数値粘性^{3),4)}がよく使われており、これによって、移流項は上流化が計られている。田村ら⁵⁾は、この3次上流差分スキームを適用して円柱まわりの流れの計算を行い、抗力が急激に低下する臨界レイノルズ数を捉えるとともに、流れの2次元と3次元構造の相違を明らかにした。

有限要素法ではペトロフ・ガラーキン法⁶⁾⁻¹⁵⁾かテーラー・ガラーキン法^{16),17)}が主として使われている。ペトロフ・ガラーキン法では、修正重み関数へ適用する形状関数と未知関数へ適用する形状関数が異なったものとして定義される。このような中で Streamline Upwind/Petrov-Galerkin¹²⁾(SUPG) スキームが幅広く使われてきた。こ

* 日本大学理工学部海洋建築工学科 専任講師・博士(工学)

** 日本大学理工学部海洋建築工学科 教授・博士(工学)

*** 日本大学大学院理工学研究科海洋建築工学専攻大学院生・修士(工学)

Assist., Prof., Dept. of Oceanic Architecture and Engineering, College of Science and Technology, Nihon Univ., Dr. Eng.

Prof., Dept. of Oceanic Architecture and Engineering, College of Science and Technology, Nihon Univ., Dr. Eng.

Graduate Student, Graduate School of Nihon Univ., M. Eng.

のスキームの特徴は、修正重み関数の中の摂動関数が標準重み関数の1階の空間微分に比例した量で与えられ、数値粘性が流れの方向にのみ作用することにある。一方、文献6)-8)で、ペトロフ・ガラーキン法に基づいた3次精度の上流有限要素スキームが示された。この手法は、摂動関数を標準重み関数の2階と3階の空間微分の和で与えている。2階微分項は、移流項の離散化にともなう2次の打ち切り誤差を消去する働きがある。この結果、移流項の離散化は4次精度の中心近似のものとなる。3階微分項は移流項と結びついて、4階3次の数値粘性を作る働きがあり、その数値粘性は文献3)と4)の上流差分スキームの数値粘性と同じ性質を持つことが示されている。したがって、現在まで多用されてきたSUPGスキームあるいはBalancing Tensor Diffusivity(BTD)という人工粘性を導入したスキームでは、高レイノルズ数域で計算された解は拡散的になるが、3次上流有限要素スキームは高レイノルズ数域でも適切な解を与えるという利点がある。

本論文では、この3次上流有限要素スキームにより、非圧縮粘性流れの移流卓越問題に関して、安定にしかも精度良く解を計算できること、そしてこのスキームが非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の計算手法としてたいへん有効である事を示す。

ナビエ・ストークス方程式と連続方程式を用いて有限要素近似を行う時、一般に圧力のポアソン方程式はこれらの有限要素方程式から離散型方程式^{2),6)-8),12)}として導かれる。しかし、本論文ではナビエ・ストークス方程式の発散をとり、圧力のポアソン方程式を誘導した後で、有限要素近似を行う。これにより圧力のポアソン方程式へ適用する形状関数は、流速と同じものを使うことができ、本論文ではこれによる計算手法を示す。

具体的な数値計算例として、流体現象の基本的な問題として知られているキャビティ内流れと水路付きキャビティ内流れを取り上げ、高レイノルズ数領域での流れの様子を示す。

2. 基本式

非圧縮粘性流体の運動を支配しているナビエ・ストークス方程式と連続方程式は、無次元表示で以下のように与えられる。

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (2-1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2-2)$$

ここで、 u_i は流速、 σ_{ij} は全応力、 f_i は外力を示し、 $(\cdot)_{,t} = \partial/\partial t$ 、 $(\cdot)_{,i} = \partial/\partial x_i$ である。また t は時間、 x_i は座標変数を表す。

全応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-3)$$

で表され、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。

一方、式(2-1)の発散を取ることにより、以下のような圧力のポアソン方程式を得ることができる。

$$p_{,ii} = -\tilde{u}_{i,i} \quad (2-4)$$

ここで、

$$\tilde{u}_i = u_{i,t} + u_j u_{i,j} - \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}) - f_i \quad (2-5)$$

である。

3. 3次上流有限要素スキーム

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の適切な数値解を作るためには、離散スキームの上流化を行うことが必要となる。ここでは、その上流化手法の一つである3次上流有限要素法について、文献7)に沿って説明する。

3次上流スキームは、4階3次の数値粘性を付加したスキームである。有限要素法を使ってこれを達成するためにペトロフ・ガラーキン法を採用し、修正重み関数を以下のように定義する。

$$\bar{u}_i = w_i + \tilde{w}_i \quad (3-1)$$

ここで、 w_i は標準重み関数で、 $\tilde{w}_i$ は摂動関数を表す。これより、ナビエ・ストークス方程式のペトロフ・ガラーキン表現は次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i(u_{i,t} + u_j u_{i,j}) d\Omega + \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tilde{w}_i(u_{i,t} + u_j u_{i,j} - \sigma_{ij,j} - f_i) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} w_i \sigma_i d\Gamma + \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega \end{aligned} \quad (3-2)$$

連続方程式(2-2)の重み付き残差表現は

$$\int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0 \quad (3-3)$$

である。ここで、 q は標準重み関数である。また圧力のポアソン方程式(2-4)の重み付き残差表現は、標準重み関数を $\bar{p}$ として以下ようになる。

$$\int_{\Omega} \bar{p}_{,i} p_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{p} \tilde{u}_{i,i} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{p} p_{,i} n_i d\Gamma \quad (3-4)$$

物理現象を数値的に計算するとき、解の解像度を高めるために解析領域を不等メッシュに分割することが多い。しかしこのような不等メッシュの下で作られた有限要素方程式は、離散化に伴う打ち切り誤差のオーダー評価をすると、1次精度のものとなる。そこで精度を高めるためには、有限要素法の場合でも差分法と同じように、写像空間の中で離散化を行うことが必要になる。

物理空間 (x_i, t) から計算空間 (ξ_i, τ) への変換関係¹⁸⁾を

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \tau = t \quad (3-5)$$

によって定義する。これにより、式(3-2)は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i(u_{i/\tau} + U_j u_{i/j}) J d\bar{\Omega} + \int_{\Omega} \xi_{k,j} w_{i/k} \sigma_{ij} J d\bar{\Omega} \\ & + \int_{\Omega} \tilde{w}_i(u_{i/\tau} + U_j u_{i/j} - \xi_{k,j} \sigma_{ij/k} - f_i) J d\bar{\Omega} \\ & = \int_{\Gamma} w_i \sigma_i I d\bar{\Gamma} + \int_{\Omega} w_i f_i J d\bar{\Omega} \end{aligned} \quad (3-6)$$

ここで、 $(\cdot)_{/\tau} = \partial/\partial\tau$ 、 $(\cdot)_{/i} = \partial/\partial\xi_i$ 、 $d\Omega = J d\bar{\Omega}$ 、 $d\Gamma = I d\bar{\Gamma}$ 、を示し、 J と I はそれぞれヤコビアン、 U_i は次式のように表される反変流速である。

$$U_i = \xi_{i,t} + \xi_{i,j} u_j \quad (3-7)$$

式(3-6)はナビエ・ストークス方程式の厳密なベトロフ・ガラーキン表現なので、数値粘性はナビエ・ストークス方程式の全ての項に付加されることになる。しかし、数値粘性を移流項に付加するだけで数値的な安定性を十分に維持することが可能で、式(3-6)を以下のように近似化する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i u_{i/\tau} J d\bar{\Omega} + \int_{\Omega} (w_i + \tilde{w}_i) U_j u_{i/j} J d\bar{\Omega} + \int_{\Omega} \xi_{k,j} w_{i/k} \sigma_{ij} J d\bar{\Omega} \\ & = \int_{\Gamma} w_i \sigma_i I d\bar{\Gamma} + \int_{\Omega} w_i f_i J d\bar{\Omega} \end{aligned} \quad (3-8)$$

次に、4階3次の数値粘性を作るために、摂動関数 $\tilde{w}_i$ を次のように定義する。

$$\tilde{w}_i = -\frac{1}{3} \Delta \xi_{(j)}^2 w_{i/(jj)} - \frac{1}{12} \alpha \Delta \xi_{(j)}^3 \operatorname{sgn}(U_{(j)}) w_{i/(jjj)} \quad (3-9)$$

ここで、 $\Delta \xi_i$ は写像領域での要素の長さ、 α は数値粘性の強さを調整するパラメータである。またカッコ付き指標は移流項の指標 j と同じ数値を取るものと定義する。

上記の摂動関数は標準重み関数の2階と3階の微分により作られている。しかし、有限要素近似では線形形状関数の使用がたいへん便利であるので、線形形状関数を用いて高次精度の空間離散化を達成するために、以下のような補助関数を採用する。

$$\omega_i = J U_j u_{i/j} \quad (3-10)$$

$$\phi_{i(j)} = \Delta \xi_{(j)}^2 w_{i/(jj)} \quad (3-11)$$

以上より、式(2-3)、(3-9)–(3-11)を使えば、式(3-8)は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i u_{i/\tau} J d\bar{\Omega} + \int_{\Omega} (w_i \omega_i - \frac{1}{3} J U_j \phi_{i(j)} u_{i/j} \\ & - \frac{1}{12} \alpha \Delta \xi_{(j)} J |U_j| \phi_{i(j)/(j)} u_{i/j}) J d\bar{\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \xi_{k,j} w_{i/k} (\xi_{n,j} u_{i/n} + \xi_{n,i} u_{j/n}) J d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \xi_{j,i} w_{i/j} p J d\bar{\Omega} \\ & = \int_{\Gamma} w_i \sigma_i I d\bar{\Gamma} + \int_{\Omega} w_i f_i J d\bar{\Omega} \end{aligned} \quad (3-12)$$

上記の方程式では、移流項の第1項だけに補助関数 ω_i が適用されているが、他の項へも適用してかまわない⁷⁾。また、補助関数(3-10)と(3-11)の重み付き残差方程式はそれぞれ以下ようになる。

$$\int_{\Omega} \bar{\omega}_{(i)} \omega_i d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} J U_j \bar{\omega}_{(i)} u_{i/j} d\bar{\Omega} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\phi}_{(ij)} \phi_{i(j)} d\bar{\Omega} = - \int_{\Omega} \Delta \xi_{(j)}^2 \bar{\phi}_{(ij)/(j)} w_{i/(j)} d\bar{\Omega} \\ & + \int_{\Gamma} \Delta \xi_{(j)}^2 \bar{\phi}_{(ij)} w_{i/(j)} n_{(j)} d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (3-14)$$

ここで、 $\bar{\omega}_{(i)}$ と $\bar{\phi}_{(ij)}$ は標準重み関数を表す。

次に、連続方程式と圧力のポアソン方程式に関する重み付き残差方程式(3-3)と(3-4)は、写像空間内でそれぞれ以下のようになる。

$$\int_{\Omega} \xi_{k,i} q u_{i/k} J d\bar{\Omega} = 0 \quad (3-15)$$

$$\int_{\Omega} \xi_{k,i} \xi_{l,i} \bar{p}_{/k} p_{/l} J d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} \xi_{j,i} \bar{p} \tilde{u}_{i/j} J d\bar{\Omega} + \int_{\Gamma} \xi_{l,i} \bar{p} p_{/l} n_i I d\bar{\Gamma} \quad (3-16)$$

以上が微分方程式系の弱表現である。これらは有限要素近似によって離散系へ変換される。

4. 有限要素方程式

前章で示した各弱表現へ、通常の4角形要素を採用した有限要素近似を行う。まず、式(3-12)–(3-14)は次のような離散方程式で表すことができる。

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}^t \mathbf{M} \mathbf{V}_{/\tau} + \mathbf{W}^t \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\Omega} - \Phi^t \mathbf{A}_3 \mathbf{V} - \Phi^t \mathbf{A}_4 \mathbf{V} + \mathbf{W}^t \mathbf{K} \mathbf{V} \\ & - \mathbf{W}^t \mathbf{C} \mathbf{P} = \mathbf{W}^t \mathbf{F} \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{V} \quad (4-2)$$

$$\Phi = -\mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{W} \quad (4-3)$$

ここで、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{W}$ 、 $\boldsymbol{\Omega}$ 、 Φ は、それぞれ u_i 、 p 、 w_i 、 ω_i 、 ϕ_{ij} に関する未知節点ベクトル、 $\mathbf{F}$ は外力のベクトル、他のものはそれぞれ行列を表す。式(4-2)と(4-3)を式(4-1)へ代入し、整理すると

$$\mathbf{M} \mathbf{V}_{/\tau} + (\mathbf{N} + \mathbf{K}) \mathbf{V} - \mathbf{C} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (4-4)$$

となり、移流項の行列 $\mathbf{N}$ は以下の行列の計算によって与えられる。

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}_1 \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2^t \mathbf{M}_0^{-t} \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_2^t \mathbf{M}_0^{-t} \mathbf{A}_4 \quad (4-5)$$

上記行列 $\mathbf{N}$ の右辺第 1 項と 2 項の和が移流項 $U_j u_{ij}$ に関する 4 次精度の中心近似、第 3 項が 4 階 3 次の数値粘性項をそれぞれ表現することになり、全体として上流化が計られる。式 (3-15) と (3-16) の有限要素方程式は、それぞれ以下のように書くことができる。

$$\mathbf{H}\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (4-6)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{P} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{G} \quad (4-7)$$

ここで、 $\mathbf{S}$ と $\mathbf{H}$ は行列、 $\mathbf{G}$ は圧力の境界条件から得られるベクトルである。以上より、有限要素方程式 (4-4) と (4-7) を非圧縮性の条件式 (4-6) を満たしながら逐次計算を行ない、時間ステップごとに流速と圧力を決定していく。

5. 数値計算例

5.1 キャビティ内の流れ

この問題は計算スキームの有効性を調べるのに適しており、多くの研究者によって計算されてきた。本論文でも正方キャビティ内の流れの数値計算結果を示し、3 次上流スキームの有効性を述べる。Fig.1 にキャビティ内流れの境界条件、Fig.2 に計算に使用した要素分割の一例を示す。レイノルズ数は、代表流速 U 、代表長さ L および動粘性係数によって計算され、 10^3 、 10^4 、 3×10^4 として与えた。各レイノルズ数における要素数、最小メ

ッシュ幅とパラメータ α の値を Table1 に示す。最小メッシュ幅 $\Delta x_{\min}$ は、 $\Delta x_{\min} < 1/Re^{1/2}$ となるように設定した。また、2 次元計算では $Re \leq 10^4$ のとき、ほぼ定常状態に達するので、十分に要素分割がされているなら定常解に至るのにパラメータ α が小さい範囲であれば、その大きさにさほど依存しない。しかし、 $Re > 10^4$ では、非定常性がしだいに強くなるので、数値粘性を小さくするために $\alpha = 1$ とした。

Fig.3 と 4 はレイノルズ数が 10^3 と 10^4 での無次元化した流速ベクトル、圧力、キャビティ内の垂直と水平中央線上での流速分布そして粒子の軌跡を示す。これらはほぼ定常状態にある。垂直と水平中央線上の流速分布は文献 19) の結果と比較したものであり、良い一致を示している。

Fig.5 はレイノルズ数が 3×10^4 での同様な結果である。これは無次元時間 $t = 200$ まで計算したがまだ定常状態には達していない。この結果では、中心に渦が 2 つ現れ、それらが互いに回転している。一方、角では細かな渦が発生し、全体の運動としては乱流的な様相を示している。

5.2 水路付きキャビティ内の流れ

管路あるいは水路の壁面に設けられた急拡部内の流れは、吉田ら²⁴⁾により数値計算が行われている問題である。Fig.6 は本論文で対象とする境界条件、Fig.7 に計算に用いた要素分割を示す。

Table 1 Finite Elements and parameter α			
Re	10^3	10^4	3.0×10^4
Elements	2500	2500	4900
Minimum Mesh Size	3.285×10^{-3}	2.194×10^{-3}	8.632×10^{-4}
α	3.0	3.0	1.0

Fig.1 Boundary conditions for a square cavity.

Fig.2 Finite element mesh used for computation of flow.

Fig.3 Driven cavity flow at $Re=10^3$, $t=70$; (a) velocity vectors;(b) pressure contours; (c) velocity profiles on the vertical and horizontal center lines in the cavity, — presents, • Ghia et al.; (d) particle path.

Fig.4 Driven cavity flow at $Re=10^4$, $t=150$; (a) velocity vectors;(b) pressure contours; (c) velocity profiles on the vertical and horizontal center lines in the cavity, — presents, • Ghia et al.; (d) particle path.

Fig.5 Driven cavity flow at $Re=3.0 \times 10^4$, $t=200$; (a) velocity vectors; (b) pressure contours; (c) velocity profiles on the vertical and horizontal center lines in the cavity; (d) particle path.

Fig.6 Boundary conditions for a square cavity with a channel.

Fig.7 Finite element mesh used for computation of flow.

Fig.8 Driven cavity flow with a channel at $Re=10^4$, $t=40$; (a) velocity vectors; (b) pressure contours; (c) velocity profiles on the vertical and horizontal center lines in the cavity; (d) particle path.

Fig.9 Driven cavity flow with a channel at $Re=3.0 \times 10^4$, $t=90$; (a) velocity vectors; (b) pressure contours; (c) velocity profiles on the vertical and horizontal center lines in the cavity; (d) particle path.

流入境界で、

$$\hat{U} = \frac{U}{h^2}(h^2 - 4y^2), \quad h = \frac{L}{2} \quad (5-1)$$

という放物流分布を与えた。各レイノルズ数における要素数、キャビティ内の最小メッシュ幅とパラメータ α の値を Table 2 に示す。

Figs.8,9 にレイノルズ数 10^4 、 3×10^4 で、ほぼ定常状態に達した時間での無次元化した流速ベクトル、圧力、キャビティ部分での垂直と水平中央線上の流速分布、粒子の軌跡を示す。定常状態に達した後では、キャビティ内の流れは水路の流れにはさほど影響を与えていない。

Fig.10 にレイノルズ数 3×10^4 の初期状態の流速分布の一例を示す。この場合、キャビティ部分から水路内に渦が膨れ上がっている様子が見られる。このような数値結果は吉田ら²⁴⁾の結果にも見られ、同様な結果となっている。

Table 2 Finite Elements and parameter α

Re	10^4	3.0×10^4
Elements	4500	6500
Minmum Mesh Size	6.755×10^{-3}	2.194×10^{-3}
α	3.0	3.0

Fig.10 Velocity vectors at $Re = 3.0 \times 10^4$;
(a) $t = 14$; (b) $t = 15$.

6. 結語

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値解を安定に計算するための3次上流有限要素スキームを示してきた。この上流スキームの中に組み込まれる数値粘性は、流速の4階微分で表現されており、ナビエ・ストークス方程式の中の分子粘性とは直接比例しない。また修正重み関数の中の高階微分項を離散化する上で補助関数を使い、その微分の階数を下げる操作を行って、線形要素の使用を可能にしている。

この3次上流有限要素スキームは乱流モデルを採用していないので、数値的安定性を4階3次の数値粘性によって維持しているが、この場合、計算メッシュを十分に細かくとる必要があるなど制約が生じる。一方、数値粘性項が分子粘性項と同じ2階微分によって作られるような場合には、高レイノルズ数域での計算において、その数値粘性が分子粘性を覆い隠してしまうということが生じかねない。このような場合には、見かけのレイノルズ数が低下してしまう。しかし、4階3次の数値粘性では、分子粘性を直接的に覆い隠すということがないので、高レイノルズ数域に至るまで精度良く計算できるという利点がある。したがって、非圧縮粘性流れの計算手法としてたいへん有効である。

本論文で示したキャビティ内の流れでは、レイノルズ数 10^3 、 10^4 において他の解法の結果と良い一致を示すとともに、高レイノルズ数流れの計算を十分に数値的安定性を維持しながら計算することができた。

参考文献

- 1) 保原充、大宮司久明 編、数値流体力学 基礎と応用、東大出版会、1992.
- 2) Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. and Quartapelle, L. : Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 30, 53-73, 1982.
- 3) Kawamura, T. and Kuwahara, K. : Computation of High Reynolds Number Flow Around a Circular Cylinder with Surface Roughness, AIAA-84-0340, AIAA 22nd Aerospace Science Meeting, 1984.
- 4) Leonard, B. P. : A Survey of Finite Differences with Upwinding for Numerical Modelling of the Incompressible Convective Diffusion Equation, Comput. Tech. Trans. and Turb. Flow, C. Taylor and K. Morgan eds., Pineridge Press, 1-35, 1981.
- 5) Tamura, T. and Kuwahara, K. : Direct Finite Difference Computation of Turbulent Flow Around a Circular Cylinder. Proc. of International Symposium on Computational Fluid Dynamics, 701-706, 1989.
- 6) Kondo, N., Tosaka, N. and Nishimura, T. : Numeri-

- cal Simulation of Viscous Flows by the Third-Order Upwind Finite Element Method, Theoretical and Applied Mechanics, 39, University of Tokyo Press, 237-250, 1990.
- 7) Kondo, N., Tosaka, N. and Nishimura, T. : Third-Order Upwind Finite Element Formulations for Incompressible Viscous Flow Problems, Comput.Meths. Appl. Mech. Engrg., 93, 169-187, 1991.
- 8) Kondo, N., Tosaka, N. and Nishimura, T. : Computation of Incompressible Viscous Flows by the Third-Order Upwind Finite Element Method, Internat. J. Numer. Meths. Fluids, 15, 1013-1024, 1992.
- 9) Christie, L., Griffiths, D. F., Mitchell, A.R. and Zienkiewicz, O. C. : Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivative, Internat. J. Numer. Meths. Engrg., 10, 1389-1396, 1976.
- 10) Heinrich, J. C., Huyakorn, P. S., Zienkiewicz, O. C. and Michell, A. R. : A 'Upwind' Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equations, Internat. J. Numer. Meths. Engrg., 11, 131-143, 1977.
- 11) Zienkiewicz, O. C. and Heinrich, J. T. : The Finite Element Method and Convective Problems in Fluid Mechanics, Finite Elements in Fluids, 3, R. H. Gallagher et al. eds., Jhon Wiley and Sons, 1-22, 1978.
- 12) Brooks, A. N. and Hughes, J. T. R. : Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convective Dominated Flows with Particular Emphasis of the Incompressible Navier-Stokes Equations, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 32, 199-129, 1982.
- 13) Devloo, P., Oden, J. T. and Strouboulis, J. : Implementation of an Adaptive Refinement Technique for the SUPG Algorithm, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 61, 339-358, 1987.
- 14) Tezduyar, T. E. and Ganjoo, D. K. : Petrov-Galerkin Formulations with Weighting Functions Dependent Upon Spatial and Temporal Discretization: Application to transient convection-diffusion problems, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 59, 49-71, 1986.
- 15) 角田和彦、登坂宣好、非定常非圧縮粘性流れ問題の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法、日本建築学会構造系論文報告集、第 439 号、189-198、1992.9.
- 16) Donea, J. : A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problem. Internat. J. Numer. Meths. Engrg., 20, 101-119, 1984.
- 17) Selmin, V., Donea, J. and Quartapelle, L. : Finite Element Methods for Nonlinear Advection, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 52, 817-845, 1985.
- 18) Thompson, J. F., Marsi, Z. A. U. and Mastin, C. W. : Numerical Grid Generation, Foundation and application, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- 19) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T. : High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, J. Computational Physics, 48, 378-411, 1982.
- 20) Donea, J., Giuliani, S. and Laval, H. : Time-Accurate Solution of Advection-Diffusion Problems by Finite Elements, Comput. Meths Appl. Mech. Engrg., 45, 123-145, 1984.
- 21) Halow, F. h. and Welch, J. E. : Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Phys. Fluid, 8, 2182-2189, 1965.
- 22) Donea, J. and Ouartapelle, L. : An Introduction to Finite Element Methods for Transient Advection Problems, Comp. Meths Appl. Mech. Engrg., 95, 169-203, 1992.
- 23) Iwatsu, R., Ishii, K. and Kuwahara, K. : Simulation of Transition to Turbulence in a Cubic Cavity, AIAA-89-0040, AIAA 27th Aerospace Science Meeting, 1989.
- 24) 吉田裕、野村卓史、矩形キャビティ内流れ問題の解析における境界条件に関する一考察、土木学会論文報告集、第 342 号、125-143, 1984.2.
- 25) 金井恵理子、棚橋隆彦、非定常非圧縮粘性流に適する GSMAC 有限要素法 (第 2 報、高レイノルズ数に安定な解法)、日本機械学会論文集 (B 編)、53 巻 487 号、683-691、昭和 62 年 3 月。
- 26) 金井恵理子、棚橋隆彦、非定常非圧縮粘性流に適する GSMAC 有限要素法 (第 2 報、高レイノルズ数における正方形キャビティ内流れ)、日本機械学会論文集 (B 編)、53 巻 487 号、682-298、昭和 62 年 3 月。
- 27) 加納充浩、近藤典夫、西村敏雄、3 次上流有限要素法によるキャビティ内流れ解析、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第 17 巻、397-402、平成 5 年。

(1993 年 7 月 5 日原稿受理, 1994 年 1 月 21 日採用決定)