シェルの構造物の自由振動特性に及ぼす初期応力の 影響に関する推定法

ESTIMATION ON THE EFFECT OF INITIAL STRESSES ON THE FREE VIBRATION BEHAVIOR OF SHELL-LIKE STRUCTURES

山田 聖志*, 竹内 明子**

Seishi YAMADA and Akiko TAKEUCHI

An alternative simple analytical procedure is presented for the estimation of the reduction of the free vibration frequency of shells or shell-like spaceframes due to initial pre-compressed stresses. Then it is applied to latticed cylindrical roof structures through orthotropic shell analogy and the results are compared with fully finite element eigenvalue analytical results. It is suggested that it is possible to predict an alternative lower bound to imperfection sensitivity for the free vibration frequency of shell-like structures by applying the so-called reduced stiffness buckling modeling.

Keywords : *latticed shell, initial stress, linear buckling analysis, free vibration, initial imperfections*
ラチスシェル, 初期応力, 線形座屈解析, 自由振動, 初期不整

1. はじめに

薄肉シェル屋根構造やスペースフレーム曲面状のいわゆるシェルの構造物では、静的座屈安定性の検討が構造設計上の主たる課題とされ、多くの研究成果が得られてきている^{2),3),4)}。一方、耐震性の検討を行う際に必要となる基本的振動性状について、この種の構造物に対しては、必ずしも十分な成果が得られている状況にはないと考える。特に、自重・積載・積雪等によって振動開始前に存在している初期応力が、座屈荷重時での応力に対して、どの程度のレベルにあるとき、その初期応力を無視して得られた振動特性値に比して、どの程度異なるものなのかの十分な議論は、なされていないようである。静的座屈解析で得られる性状との相互関係が理解しやすい振動解析手順は、こうした課題の検討に非常に有用であると考えられる。

以上の観点に立ち、2.1節では、予め線形座屈固有値解析で得られる複数の座屈モード（以下、これらを「座屈モード群」と呼ぶ）を、利用した非減衰自由振動スペクトル近似解析手法を提案している。この手法は、エネルギーのレーリー商⁵⁾を応用したものである。これによって得られる固有振動数は、静的座屈問題での古典座屈値に相当し、初期不整の存在によって低下すると予想される値の上限を与えられると考えられる。第3章で適用例として用いる部分円筒ラチスシェルのように、座屈前に

顕著な非線形変形状を示し、座屈荷重が線形座屈固有値解析で得られる値よりかなり低くなるような構造物では^{4),6)}特に、固有振動数解析においてもその低下の程度を把握することは重要であると考えられる。そこで2.2節では、その低下の下限を簡便に評価する手法として、静的座屈問題で発展した低減剛性（Reduced Stiffness : 以下「RS」と略す）モデル^{7),8)}を、新たに動的問題に適用する方法を提案し、3.4節で平行して行われる有限要素法による精密な数値解析結果との比較を通して、本手法の適用性についての検討も試みる。

2. 解析方法

2.1 座屈モード群を利用した自由振動解析法

シェルおよびシェルの構造物を、調和関数等を用いて関数離散化を行ったり、あるいは有限要素法で領域型離散化を行い、有限自由度系としてモデル化すると、その静的座屈に関する基本的な特性が線形座屈固有値解析によって得られることは良く知られている。こうした多自由度系の線形座屈固有値解析からは、仮定した自由度だけの座屈荷重 q_c が固有値として、また各々に対応する座屈モード $\{u\}$ が固有モードとして計算できる。得られた各座屈モード $\{u\}$ に対して、それぞれ次式が恒等的に成立する⁹⁾。

本論文の一部は文献1)で発表している。

* 豊橋技術科学大学建設工学系 助教授・工博

** 豊橋技術科学大学建設工学系 大学院生

Assoc. Prof., Dept. of Architecture and Civil Eng., Toyohashi Univ. of Technology, Dr. Eng.

Graduate Student, Dept. of Architecture and Civil Eng., Toyohashi Univ. of Technology

$$U_{2b} + U_{2m} + V_{2m} = 0 \quad (1)$$

ここで、 U_{2b} は曲げひずみの座屈変位に関する線形成分から計算される、いわゆる線形曲げひずみエネルギー、 U_{2m} は、面内ひずみの座屈変位に関する線形成分から計算される、いわゆる線形面内ひずみエネルギーである。 V_{2m} は、面内ひずみの座屈変位に関する2次の非線形成分と座屈前の基本平衡状態時の応力との積から計算される、いわゆる線形化された面内ひずみエネルギーである。線形座屈固有値解析では、座屈前の基本平衡状態は線形応力状態として仮定されるので、 V_{2m} は次のように書ける。

$$V_{2m} = -Q_c \alpha_m \quad (2)$$

ここに $Q_c \equiv q_c/q_d$ で、座屈荷重 q_c を正規化するための値 q_d には、設計荷重値あるいは q_c の最小値など、目的に応じて任意に設定できる。 α_m は各座屈モードに対して、部材剛性等の既知の諸量から計算できる係数である。

次に、 q_d の Q 倍の静的荷重値 $q = Qq_d$ のもとで平衡状態にあるシェルの構造物が、十分微小な振動を開始し、それが非減衰定常状態となった自由振動状態を想定する。この静的荷重値 q によって生じる初期応力を考慮して、振動問題を扱うに際し、ある振動モードが k 次の座屈モードに近似できるとき、運動に関する良く知られたラグランジェの関係式から、次の式が得られる。

$$T_2 - (U_{2b} + U_{2m} - Q\alpha_m) = 0 \quad (3)$$

ここに第1項の T_2 は、速度 $\{\dot{u}\} \equiv \{\partial u / \partial \tau\}$ についての最大運動エネルギーを意味している。 τ は時間を表わす。第2項の括弧内は、最大ポテンシャルエネルギーに相当する。この場合、各モードに対応する固有円振動数を ω とすると、 T_2 は、次のようにおくことができる。

$$T_2 = \omega^2 \alpha_i \quad (4)$$

ここで、 α_i は、対象としているモードに対して、既知の諸量から計算できる係数である。

一般に、非減衰自由振動モードが静的座屈モードに必ずしも等しいとは言えない。しかし振動開始前の静的荷重 Q が増加して Q_c に等しくなると、両者のモードが一致することは自明である。静的荷重 Q が座屈荷重の最小値以下であっても、非常に多くの座屈モードを対象にすれば、真の自由振動モードに近似するモードを得ることが可能であると考えられ、レーリー商を用いた近似固有振動数⁵⁾と同程度の工学的近似解を得られることが期待できる。以上の仮定のもとで(1)式と(3)式を連立させると次式が得られる。

$$\omega^2 = (Q_c - Q) \frac{\alpha_m}{\alpha_i} \quad (5)$$

シェルの構造物の構造設計においては、通常、先ず静的荷重に対する応力解析や座屈解析を通して、耐力の検討が行われる。この種の構造物の特徴は、最小座屈荷重の近傍に全く異なる座屈モードが存在する可能性を有していることである。こうした複数の座屈モードに対する初期不整感性を非線形解析的に検討する際、線形固有値解析から得られる座屈荷重及びRS荷重スペクトルを参考にすることは、この種の構造物の複雑な座屈性状の力学的理解に、極めて有益であることが文献[4]で明らかにされている。これら静的座屈に対する検討段階で得られた複数の座屈モードを、(5)式に代入すると直接的かつ容易に、自由振動数スペクトルを得ることができる。その結果は、静的座屈性状と動的振動性状との相互関係の理解を促進し、引き続いて行われるであろう難解な地震応答性状の予測等に対して、極めて有用な参考資料になり得ると期待される。

2.2 初期不整による座屈耐力の低下が固有振動数に及ぼす影響の分析手法の提案

建築大空間屋根構造でしばしば用いられる偏平球形シェルや部分円筒シェル並びに部分円筒ラチスシェルでは、初期不整のない完全な形状の場合でも、座屈前に非線形なたわみ性状を示し、座屈荷重が線形座屈固有値解析で得られる値よりかなり低くなる場合がある^{4),6)}。第一著者^{8),3)}は、こうした現象を境界支持部の応力かく乱に起因する「荷重不整/loading imperfection」と称し、これを等価な形状初期不整に換算する考え方を示し、結果として、弾性座屈下限荷重 q_b を解析するRS法が、この種の構造物に対しても適用可能であることを明らかにしている。一方、弾塑性座屈問題に対しても、RS法を利用するため、文献[7]で「不整型RSモデル」が提案され、文献[10]では非線形数値解析との対応からその適用性が検討されている。こうした成果を踏まえ、初期不整に起因する座屈耐力の低下が自由振動数に及ぼす影響の程度を分析するために、本研究では、弾性RS解析結果を応用する手法を提案する。

初期不整の比較的大きいシェル構造物では、ある座屈変位成分の曲げ変形が他の成分に比して卓越し、結果として、座屈耐力(弾性座屈荷重)は、 Q_c に低下するものとする。このときの変位振幅 w_{mn}^r として、初期不整振幅 w_{mn}^0 を用いた陽な形を設定してモデル化を行い、それを不整型RSモデルと呼ぶこととする。文献[7]では、外圧を受ける円筒シェルに対して、次式で表わされる初期不整を有する圧縮柱材の厳密解が採用されている。

$$w_{mn}^r = w_{mn}^0 \frac{Q}{Q_r - Q} \quad (6)$$

ところで、Virgin¹¹⁾は、初期不整を有する圧縮柱材の

振動解析を行い、非減衰自由振動数の2乗が座屈変位振幅の2乗に比例することを示している(文献[11]の(41)式参照)。シェルの構造物でも、固有振動数と座屈変位振幅との間には、形式的にこの関係が成立するものと仮定すると、初期不整を有する場合の自由振動数 ω_r は、

$$\omega_r^2 = a_0 + a_1(w_{mn}^r)^2 \quad (7)$$

(6)式を(7)式に代入し、未知の a_0 と a_1 を定めるために、

$$\omega_r = \omega \quad \text{for } Q = 0, \quad \omega_r = 0 \quad \text{for } Q = Q_r \quad (8)$$

の条件を用いると、初期不整による座屈耐力の低下を考慮した固有円振動数の最も簡潔な表現として、次式を得ることができる^{注1)}。

$$\omega_r = \omega \sqrt{1 - (Q/Q_r)^2} \quad (9)$$

ここで、右辺の ω は、初期不整による座屈耐力の低下を考慮しない場合の円振動数で、その値は(5)式を用いると容易に計算できる。

(5)式や(9)式に必要な係数 $\alpha_m, \alpha_n, Q_c, Q_r$ は、有限要素法で数値的に求めることももちろん可能である。本推定法が実設計で使用される場合には、有限要素法で求める方が汎用的で便利であろう。本研究では、本推定法のもう一つの特徴である簡潔さを強調する目的で、筆者らがこれまで静的問題で扱ってきた屋根型の扁平な円筒ラチスシェル構造物の場合を適用例として選び、連続体置換法を併用することで陽な形の推定式が得られることを次章で示す。更に、(5)式や(9)式を用いない自由振動解析を、有限要素法を用いて別途に平行して行い、それらと本推定法による結果との対応関係について言及する。

3. 部分円筒ラチスシェルの自由振動問題への適用

3.1 解析対象

図1 aに示すように、部材を正三角形に剛接合した単

図1 a 部分円筒ラチスシェルの形状

位ユニットを持ち、母線方向長さ L 、曲率半径 R 、開角 ϕ の部分円筒形の単層ラチスフレーム構造を考える。

3.2 直交異方性連続体置換を用いた静的座屈解析

山田大彦¹²⁾は、球形の単層ラチスシェルを直交異方性連続体シェルに置換し、その座屈解析を行い、剛性比や形状係数等のパラメータが座屈特性に及ぼす影響を系統的に分析している。本節でも同様の置換法を用いる。

薄肉扁平な円筒形シェルに静的法線方向荷重 q が作用するとき、振動開始前の初期応力は近似的に、

$$(N_x^F, N_y^F, N_{xy}^F) = (0, -qR, 0)$$

なる一様膜応力状態にあると考えられる。こうしたシェルとしての理想的な基本平衡状態をもつ力学モデルを、文献[8],[3]では理想モデル(idealized model)と呼んでいる。本節では、種々のパラメータが ω に及ぼす効果を理解しやすくすることを目的として、直交異方性連続体置換を用いた座屈解析を行い、(5)式で自由振動数を計算する際に必要な Q_c を陽な式で求める。

図1 aの円筒座標系 (x, y, z) に対して構成方程式を、次式とする。

$$M_x = D_x \rho_x + D_p \rho_y, \quad M_y = D_p \rho_x + D_y \rho_y, \quad M_{xy} = D_{xy} \kappa_{xy} \quad (10a)$$

$$N_x = C_x \varepsilon_x + C_p \varepsilon_y, \quad N_y = C_p \varepsilon_x + C_y \varepsilon_y, \quad N_{xy} = C_{xy} \gamma_{xy} \quad (10b)$$

ここに、 (M_x, M_y, M_{xy}) は曲げモーメント、 (N_x, N_y, N_{xy}) は面内合応力、 $(\rho_x, \rho_y, \kappa_{xy})$ は曲げひずみ成分、 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ は面内ひずみ成分である。また、 (D_x, D_p, D_y, D_{xy}) は等価な曲げ剛性、 (C_x, C_p, C_y, C_{xy}) は等価な面内剛性であり、文献[13],[14]を参考に本構造物に対して誘導した結果は、付録に示されている。

上述の一様膜応力状態でのひずみ成分は、

$$(\varepsilon_x^F, \varepsilon_y^F, \gamma_{xy}^F) = \left(\frac{C_p q R}{C_x C_y - C_p^2}, \frac{C_x q R}{C_p^2 - C_x C_y}, 0 \right)$$

である。この基本平衡状態から座屈することによって付加される、 (x, y, z) 方向の変位を (u, v, w) とすると、トータルのひずみは次式のように書ける。

図1 b 連続体解析における合応力の定義

$$\begin{aligned}\rho_x &= \rho_x', \quad \rho_y = \rho_y', \quad \kappa_{xy} = \kappa_{xy}', \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^F + \varepsilon_x' + \varepsilon_x'', \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^F + \varepsilon_y' + \varepsilon_y'', \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}' + \gamma_{xy}''\end{aligned}\quad (11)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\rho_x' &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \rho_y' = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy}' = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \varepsilon_x' &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y' = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xy}' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_x'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad \gamma_{xy}'' = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (12)$$

一方、トータルの合応力も、(11)式と同様、次のような成分に分解することができる⁹⁾。

$$\begin{aligned}M_x &= M_x', \quad M_y = M_y', \quad M_{xy} = M_{xy}', \\ N_x &= N_x' + N_x'', \quad N_y = N_y^F + N_y' + N_y'', \\ N_{xy} &= N_{xy}' + N_{xy}''\end{aligned}\quad (13)$$

(1)式を座屈変位 u, v, w で変分すると次の平衡方程式が導かれる。

$$\frac{\partial N_x'}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}'}{\partial y} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{\partial N_y'}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}'}{\partial x} = 0 \quad (14b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_x'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y'}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}'}{\partial x \partial y} \\ + N_y^F \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y' = 0\end{aligned}\quad (14c)$$

境界条件としては次のようなローラー支持に近い、古典的単純支持を採用する。

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = v = 0 \quad \text{at } x=0, L \quad (15a)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=0, R\phi \quad (15b)$$

(14)式は座屈変位 (u, v, w) に対して同次式であり、その固有値問題を解くことで座屈荷重 q_c と座屈モード (u, v, w) を求めることができる。(15)式の境界条件のもとでは、本問題では極めて簡単な形の解が容易に計算できる。すなわち、座屈モードについては、

$$u = \bar{u}_{mn} \frac{Lt}{R} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{R\phi}\right) \quad (16a)$$

$$v = \bar{v}_{mn} \frac{Lt}{R} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{R\phi}\right) \quad (16b)$$

$$w = \bar{w}_{mn} t \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{R\phi}\right) \quad (16c)$$

ただし、

$$\bar{u}_{mn} = \bar{w}_{mn} \frac{A_5 A_2 - A_3 A_4}{A_1 A_4 - A_2^2} \quad (17a)$$

$$\bar{v}_{mn} = \bar{w}_{mn} \frac{A_2 A_3 - A_1 A_5}{A_1 A_4 - A_2^2} \quad (17b)$$

m, n はそれぞれ母線方向半波数と円弧方向半波数、 t はラチスシエルの等価殻厚で、更に、

$$A_1 = C_x m^2 + C_{xy} B^2, \quad A_2 = (C_p + C_{xy}) m B,$$

$$A_3 = \frac{C_p m}{\pi}, \quad A_4 = C_{xy} m^2 + C_y B^2, \quad A_5 = C_y \frac{B}{\pi}$$

である。

一方、座屈荷重 q_c については、次の(19)式で定義される係数 q_d で正規化すると形状係数や剛性比の効果が明確となる。このとき、(5)式に用いる座屈耐力 Q_c は、

$$Q_c \equiv \frac{q_c}{q_d} = Q_b + Q_m \quad (18)$$

$$q_d \equiv \pi^2 \frac{D_y}{RL^2} \quad (19)$$

(18)式における、座屈値の曲げひずみエネルギー成分から得られるRS値 Q_b と、面内ひずみエネルギー成分から得られる Q_m は、次式のように誘導できる。

$$Q_b = B^2 + 2(D_2 + 2D_3)m^2 + D_1 \frac{m^4}{B^2} \quad (20)$$

$$Q_m = 12(C_1 - C_2^2)C_3 \frac{\beta^2 m^4}{\pi^4 B^2 S} \quad (21)$$

ただし、

$$S = C_3 B^4 + (C_1 - C_2^2 - 2C_2 C_3) B^2 m^2 + C_1 C_3 m^4$$

(20)、(21)式中において、正規化円弧方向半波数 B 、形状係数 β 、等価殻厚 t 、剛性比は、以下のように定義されている。

$$B = \frac{nL}{R\phi} \quad (22)$$

$$\beta = \frac{L^2}{Rt} \quad (23)$$

$$t = \sqrt{12D_y/C_y} \quad (24)$$

$$D_1 = \frac{D_x}{D_y}, \quad D_2 = \frac{D_p}{D_y}, \quad D_3 = \frac{D_{xy}}{D_y} \quad (25)$$

$$C_1 = \frac{C_x}{C_y}, \quad C_2 = \frac{C_p}{C_y}, \quad C_3 = \frac{C_{xy}}{C_y} \quad (26)$$

3.3 非減衰自由振動数解析の結果と考察

(16)式の座屈モード (u, v, w) の m と n を任意に変化させて得られる集合を、座屈モード群と名づけ、対応する非減衰自由振動モードを次のように仮定する。

$$(u_d, v_d, w_d) = (u, v, w) \sin(\omega\tau) \quad (27)$$

このとき、速度成分の2乗和は、(27)式より

$$\left(\frac{\partial u_d}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_d}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_d}{\partial \tau}\right)^2 \leq \omega^2(u^2 + v^2 + w^2)$$

であるので、最大運動エネルギー T_2 は、

$$T_2 = \omega^2 \frac{q_w}{g} \int_0^{R\phi} \int_0^L \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) dx dy \quad (28)$$

ここで、 g は重力加速度である。 q_w は単位面積当たりの重量で、構造設計上は自重や積載や積雪による荷重の単位面積当たりの総量に相当する。エネルギーの正規化係数を $E_0 \equiv 12D_y L \phi (\bar{w}_{mm})^2 / R$ とし、荷重係数を(19)式の q_d を用いて $Q_w \equiv q_w / q_d$ と定義し、(28)式の積分を実行すると、(5)式の α_i は次のように得られる。

$$\alpha_i = Q_w E_0 (\alpha_{tu} + \alpha_{tv} + \alpha_{tw}) \quad (29)$$

ここに α_{tu} , α_{tv} , α_{tw} は、それぞれ x , y , z 方向の慣性力に関する(28)式の積分結果である。予備解析を行なった結果、 α_{tu} と α_{tv} の自由振動数に及ぼす影響は、本節で対象とする程度の単層のラチスシェル屋根では、1%未満であることがわかったので、本研究では簡単のためこれらを省略すると、

$$\alpha_i \approx E_0 \alpha_{tw} Q_w = E_0 \frac{\pi^2 t Q_w}{96 g \beta} \quad (30)$$

一方、線形化された面内ひずみエネルギー成分 V_{2m} は、荷重 q を受ける偏平な屋根型の部分円筒ラチスの場合、近似的に次のように与えられる。

$$V_{2m} = -qR \int_0^{R\phi} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (31)$$

(31)式中の q は、重量 q_w に、建物内外の空気圧力差による圧力も加算される必要がある。しかしながら、後者については、文献[1]での予備的解析の結果、海面下に没した構造物などの特殊な環境を想定しない限り、その自由振動数に与える影響は小さいことがわかったので、本論文では、以下、 $q \approx q_w$ の場合を扱う。すなわち、

$$Q \equiv \frac{q}{q_d} \approx Q_w = \frac{q_w}{q_d} \quad (32)$$

(31)式の積分を実行すると(5)式の α_m は、

$$\alpha_m = E_0 \frac{\pi^4 B^2}{96 \beta^2} \quad (33)$$

(30)式と(33)式を(5)式に代入すると、モード (m, n) に関する固有円振動数 ω が次のように得られる。

$$\omega^2 = g \pi^2 B^2 \frac{Q_c - Q}{\beta t Q_w} \quad (34)$$

無次元振動数 F として、

$$F \equiv \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{t}{g}} \quad (35)$$

を採用すると、次式のような極めて単純な形の式を得ることができる。

$$F = B \sqrt{\frac{Q_c - Q}{4 Q_w \beta}} \quad (36)$$

形状係数 $\beta = 96.6$ 、剛性比 $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 1/3$, $D_1 = 1$, $D_2 = 0.061$, $D_3 = 0.469$ の場合の結果を、図2の太実線で示す。この図は、横軸に(22)式の正規化円弧方向半波数 B を採っているので、任意のアスペクト比 $a = L/R\phi$ に対して利用できる。また、(18)と(20)式から Q_c は m の4乗に比例して大きくなるので、 F が最小となる $m=1$ の場合のみを例として図示している。図中の λ は自重等の静的荷重の大きさを表わす無次元係数で、荷重係数と呼ぶこととし、本研究では、以下として定義されている。

$$\lambda \equiv Q_w / Q_{c0} \quad (37)$$

ただし、 Q_{c0} は最小座屈値で、静的座屈解析で B を連続的に変化させて得られる座屈耐力 Q_c の最小値を意味する。この最小座屈値 Q_{c0} を与える正規化円弧方向半波数 B_{c0} は、この例題では2.6であり、図2の $\lambda=1.0$ が横軸と接する点での B の値に一致している。

●印は、正規化振動数 F の最小点を明示したもので、この最小値を最小自由振動数 F_0 と定義し、有限多自由度系での1次の固有振動数に相当する値を意味する。荷重係数 λ が大きくなるにつれ、 F_0 は著しく小さくなることが注目される。更に λ が増加するとともに、 F_0 を与える円弧方向半波数 B_0 も増加しているが、 $\lambda > 0.1$ の範囲では、その変化の程度はわずかとなっており、座屈モードと最小自由振動モードは、ほぼ一致することがわかる注2)。

細実線は、(3)式において第4項の線形化された面内ひずみエネルギー項 $V_{2m} = -Q\alpha_m$ を省略した場合の結果で、初期応力の影響を考慮しない従来の自由振動解析結果に対応する。このときの(5)、(36)式に相当する解は、

$$\omega_d^2 = Q_c \frac{\alpha_m}{\alpha_i} \quad (38)$$

$$F_d = B \sqrt{\frac{Q_c}{4 Q_w \beta}} \quad (39)$$

振動開始前に存在する初期応力を考慮すると、本問題の場合、 $\lambda=0.3$ で14%、 $\lambda=0.6$ で33%程度と、 F_0 は λ が大きくなる程低下率は著しくなり、初期応力の影響が決して小さくないことが明らかになった。

○, △, □で示した値は、平行して行った有限要素法

図2 固有振動数に与える初期応力及び荷重係数の影響

図3 最小固有振動数に与える各種パラメータの影響

による固有振動解析結果を示す。使用した有限要素振動解析法の詳細は、既に文献[15]として公表しているものと全く同一である。具体的な形状寸法等は、先に文献[4]で座屈解析に使用した正三角形ユニット単層ラチスシェルのそれと同一とした。本有限要素解析では、アスペクト比については、 $a = L/R\phi = 0.693$ の場合のみを例題として扱ったので、横軸 $B=an$ のとり得る数値が離散値となり、自由振動スペクトルは図のような離散スペクトルとして得られている。尚、支持条件については、周辺に沿った支持点が水平に移動可能なローラー支持点としているが、コーナーの4つの支持点の移動は拘束した。(36)式による本推定値の太実線と有限要素解(○△□)とは、手法上の大きな差にもかかわらず、いずれの λ に対しても良く一致している。こうした事実は、本解析手法で取入れられている種々の仮定が、本問題では、工学的に妥当な程度になっていることを示していると考察される。

図3は、形状係数 β と剛性比 C_1 が最小自由振動数 F_0 に与える影響について、系統的に解析したものである。母線方向のラチス部材の断面寸法を他の斜材のそれより小さくして、 C_1 を図2での1.0(等方性体の場合に相当する)より小さくすると、(18)式と(21)式から、 Q_{c0} も小さくなる。しかし、経済設計上の資料となるよう考慮して、図3での λ の基準値には、 $C_1 = 1.0$ に対して得られる Q_{c0} を、便宜上 $C_1 = 0.5$ のときにも採用し整理してみた。その結果、 λ を一定にすることは、 β が同じであれば、重量 Q_w も同一であることを意味し、剛性比の自由振動数に与える影響の程度が、より理解しやすい形で図示できると考えたからである。形状係数 β の広い範囲で計算されており、 β が大きくなる程 F_0 が小さくなる傾向にある

と考察される。また、剛性比 C_1 を1.0から0.5に減少させると、扱った β の範囲において、 F_0 が3から20%程度低下することも注目される。

3.4 初期不整による座屈耐力の低下が固有振動数に及ぼす影響について

図2の解析で用いた部分円筒ラチスシェル構造物について、有限要素法により増分法と移動座標法を併用した幾何学的非線形解析を行い、静的荷重とたわみ関係を求めた結果が、図4aに示されている。形状や部材に関する諸量は、全て図2の場合と同一である。

図中の○印は形状初期不整のない場合であり、2.2節で論じた荷重不整によって非線形なたわみ性状を示し、その座屈耐力は前節で求められた Q_{c0} より大きく低下している。形状初期不整 w^0 は、モード $(m, n) = (1, 2)$ と $(m, n) = (1, 3)$ の波数成分を組み合わせて、

$$w^0 = \bar{w}_{12}^0 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{R\phi} + \bar{w}_{13}^0 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3\pi y}{R\phi} \quad (40)$$

と定義されている。□, △, +では、等価板厚単位の振幅 $\bar{w}_{12}^0$, $\bar{w}_{13}^0$ は、

$$\square \text{では、} \bar{w}_{12}^0 = +0.097, \bar{w}_{13}^0 = -0.580$$

$$\triangle \text{では、} \bar{w}_{12}^0 = +0.097, \bar{w}_{13}^0 = -0.290$$

$$+ \text{では、} \bar{w}_{12}^0 = +0.097, \bar{w}_{13}^0 = +0.097$$

尚、×印は最初に表われる極大点で、非線形解析による座屈荷重 Q_{non} 点を示す。

図4a中の(△□○+)の点として明示した種々の荷重レベル Q を、先ず静的に載荷する。その静的釣合状態のもとで非減衰微小自由振動が生ずるとし、有限要素解析して得られた1次の固有自由振動数の正規化量 F を、横

図4 ローラー支持された部分円筒ラチスシェルの静的・動的解析例

軸にとって、縦軸 Q に対してプロットしたのが図4bの($\Delta \square \circ +$)である。 Q が大きくなる程、 F のばらつく範囲が大きくなることからわかる。本研究では、こうした有限要素法による結果を、適当に仮定された初期不整に対する数値実験結果と位置づける。

一方、図4bの細い実線は、図4aで×印として示されている有限要素法による弾性座屈耐力 Q_{non} を、(9)式の Q_r に読みかえて、 $(m, n) = (1, 3)$ に対して得た曲線である。種々の仮定を含んだ簡易式であるにもかかわらず、 Q_r を精密解 Q_{non} として採用すれば、有限要素法による数値解析結果($\Delta \square \circ +$)に、それぞれ、定量的に良く一致することを示している。

(9)式の Q_r として、(20)式で計算されるRS座屈下限値 Q_b を採用すると、図4bの太い実線として得られる。先に2.2節で論じたように、RS値は、初期不整を等価殻厚程度に大きくしたときの弾性座屈耐力の下限を与えることが期待できるので、それを Q_r として採用することによって、初期不整の存在のためにばらつく自由振動数 F_r の下限を得ることができると期待される。図4bの本手法での結果(太い実線)は、数値解析結果($\Delta \square \circ +$)の近似的な下限を与えていることが注目される^{注3)}。尚、図4bでの破線は、(5)式を基として得られた(36)式の F であり、数値解析結果($\Delta \square \circ +$)の上限となっている。また、●印のa、b、cは、図2で示すa(○; $\lambda=0.1$)、b(△; $\lambda=0.3$)、c(□; $\lambda=0.6$)に各々対応する値をプロットしたもので、線形の有限要素解析結果を示している。

4. 結 語

初期応力を考慮したシェルの構造物の自由振動数を単純かつパラメトリックに推定する手法について提案を行った。振動性状に及ぼす各種パラメータの影響は、(5)式を用いると比較的に容易に検討できることを論じ、具体的に部分円筒ラチスシェルに適用した結果、(36)式のように陽な形の式として自由振動数の近似推定式を得られることが明らかになった。この種の構造物で避けることのできない初期不整の影響については、(9)式を用いることにより、座屈耐力低下に伴う自由振動数の低下の程度を、定量的に推定できる可能性が示された。(9)式で用いる座屈耐力 Q_r の評価には非線形解析を必要とし、一般的な設計の初期段階には必ずしも便利ではないが、線形RS解析で得られるRS値 Q_b を Q_r として採用することによって、初期不整によってばらつく自由振動数の下限が推定できることを、限られた条件での例題に対してではあるが、明らかにできた。

本研究は、シェルならびにシェルのラチス屋根構造の耐震設計上の観点からは、非減衰自由振動性状という、重要ではあるが極めて基礎的かつ限定された内容にとどまっている。しかし、本研究で提案された力学的解析モデルを、モーダルアナリシスとの併用によって強制振動解析に応用することも可能であると考えられ、これによって強震時の応答の上限値等の評価を得ることができると期待される。こうした興味深い課題については、今後の研究課題とする。

参考文献

- 1) 竹内明子, 山田聖志: 初期応力を考慮したラチスシェルの自由振動評価手法, 日本建築学会大会学術講演梗概集, Vol.B, pp.1349-1350, 1993.9
- 2) 日置興一郎(編): 単層ラチスドームの安定解析, 日本建築学会シェル空間構造運営委員会, 1989.8
- 3) Seishi Yamada and J.G.A. Croll: Buckling behavior of pressure loaded cylindrical panels, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.115, No.2, pp.327-344, 1989.2
- 4) Seishi Yamada: Relationship between non-linear numerical experiments and a linear lower bound analysis using finite element method on the overall buckling of reticular partial cylindrical space frames, *Computer Applications in Civil and Building Engineering*, Kozo System Inc., pp.259-266, 1991.11
- 5) D.E. Newland: *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Group UK Ltd, London, 1989
- 6) Seishi Yamada and T. Taguchi: Nonlinear buckling response of latticed barrel vaults, *Spacial, Lattice and Tension Structures*, Proc. IASS-ASCE Symp., ASCE, pp.519-528, 1994.4
- 7) J.G.A. Croll: Elasto-plastic buckling of pressure and axial loaded cylinders, *Proc. Instn Civil Engrs*, Vol.73, pp.633-652, 1982
- 8) 山田聖志: 座屈前に幾何学的非線形性を有するシェル構造物へのRS法の適用, 日本建築学会構造系論文報告集, No.390, pp.88-97, 1988.8
- 9) Seishi Yamada and J.G.A. Croll: Buckling and post-buckling characteristics of pressure loaded cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.60, pp.290-299, 1993.6
- 10) Seishi Yamada and J.G.A. Croll: Elasto-plastic buckling design for shallow cylindrical shells under external pressure, *Spacial, Lattice and Tension Structures*, Proc. IASS-ASCE Symp., ASCE, pp.936-945, 1994.4
- 11) L.N. Virgin: Postbuckling dynamics of struts as Related to their loading devices, *Engrg Struct.*, Vol.8, pp.127-133, 1986
- 12) 山田大彦: 連続体近似による単層ラチスドームの座屈耐力の評価について, 単層ラチスドームの安定解析, 日本建築学会, pp.191-254, 1989.8
- 13) K. Heki: On the effective rigidities of lattice plates, *Recent Researches of Structural Mechanics*, Uno Shoten, Tokyo, pp.31-46, 1968
- 14) J. Sumec: *Regular Lattice Plates and Shells*, Elsevier, 1990
- 15) 山田聖志: 屋根型円筒ラチス, シェル・単層ラチス構造の振動解析, 日本建築学会, pp.95-117, 1993.8
- 16) L.N. Virgin: The dynamics of symmetric post-buckling, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.27, pp.235-248, 1985

付録 剛性成分の計算

等価剛性の計算は, 文献[13],[14]を参考に, 以下のように行なった。まず, 付図のように 1, 2, 3 方向の部材から全体が構成されているものとみなし, 各部材についてローカル座標系(ξ, η)を考える。

i) 応力 - ひずみ関係

面内合応力 $\{N_\xi\}$ については, 各方向の部材ごとに, 一次元のはり要素とみなしているので,

$$\begin{Bmatrix} N_\xi \\ N_\eta \\ N_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad (i-1)$$

簡単のため,

$$\{N_\xi\} \equiv [E_\xi]\{\varepsilon_\xi\}$$

と略す。ここに, E はヤング係数であり, A は部材断面積, l' は部材間隔である。

曲げモーメント $\{M_\xi\}$ については,

$M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi} = GJ/2l'$ とし, $\kappa_{\xi\eta} = \rho_{\xi\eta} + \rho_{\eta\xi}$ とすると,

$$\begin{Bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI/l' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ/4l' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_\xi \\ \rho_\eta \\ \kappa_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad (i-2)$$

簡単のため,

$$\{M_\xi\} \equiv [D_\xi]\{\rho_\xi\}$$

と略す。尚, 本研究では, 構成部材にパイプ材を用いており, せん断剛性 $G=E/2.6$, ねじり剛性 $J=2I$, 断面二次モーメント $I = \pi/64(d_2^4 - d_1^4)$ である。ただし, d_2, d_1 は, それぞれパイプの外径と内径である。

(1 方向) (2 方向) (3 方向)

付図 部材座標系(ξ, η)の定義

ii) 全体座標系への変換

i)で定めた円筒ラチスシェルを直交異方性とし、 $i=1, 2, 3$ 方向それぞれのローカル座標 (ξ, η) を、反時計回りに ψ_i だけ回転した全体座標 (x, y) で剛性を評価する。このとき、応力の座標変換は、

$$\{\sigma_x\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \sigma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \equiv [A]\{\sigma_\xi\} \quad (\text{ii-1})$$

ただし、

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi_i & \sin^2 \psi_i & 2 \sin \psi_i \cos \psi_i \\ \sin^2 \psi_i & \cos^2 \psi_i & -2 \sin \psi_i \cos \psi_i \\ -\sin \psi_i \cos \psi_i & \sin \psi_i \cos \psi_i & \cos^2 \psi_i - \sin^2 \psi_i \end{bmatrix}$$

一方、ひずみの座標変換については、

$$\{\varepsilon_x\} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \equiv [B]\{\varepsilon_\xi\} \quad (\text{ii-2})$$

ただし、

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi_i & \sin^2 \psi_i & \sin \psi_i \cos \psi_i \\ \sin^2 \psi_i & \cos^2 \psi_i & -\sin \psi_i \cos \psi_i \\ -2 \sin \psi_i \cos \psi_i & 2 \sin \psi_i \cos \psi_i & \cos^2 \psi_i - \sin^2 \psi_i \end{bmatrix}$$

全体座標系における要素面内剛性マトリクス $[E_x(i)]$ を算出すると、

$$\{\sigma_x\} = [A][E_\xi][B]^{-1}\{\varepsilon_x\} \equiv [E_x(i)]\{\varepsilon_x\} \quad (\text{ii-3})$$

全体座標系における要素曲げ剛性マトリクス $[D_x(i)]$ を算出すると

$$\{M_x\} = [A][D_\xi][B]^{-1}\{\rho_x\} \equiv [D_x(i)]\{\rho_x\} \quad (\text{ii-4})$$

iii) 全体座標系での全体剛性マトリクス

ii)で得られた1, 2, 3方向の剛性を重ね合わせて全体剛性マトリクス $[E_X]$ 及び $[D_X]$ を求める。即ち、

$$[E_X] = \sum_{i=1}^3 [E_x(i)] \equiv \begin{bmatrix} C_x & C_p & 0 \\ C_p & C_y & 0 \\ 0 & 0 & C_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{iii-1a})$$

$$[D_X] = \sum_{i=1}^3 [D_x(i)] \equiv \begin{bmatrix} D_x & D_p & 0 \\ D_p & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{iii-1b})$$

ここで、各 i 方向部材の断面積を A_i 、及び断面二次モーメントを I_i とし、母線方向($i=1$)部材の値を基準として整理するために、

$$A_1 = A, \quad A_2 = A_3 \equiv a' A, \quad I_1 = I, \quad I_2 = I_3 \equiv b' I$$

と定義する。本研究のような正三角形のメッシュパターンでは、 $\psi_i = 0, \pi/3, 2\pi/3$ なので、(ii-3)式と(ii-4)式より、(iii-1)式の各成分は以下のように計算される。

$$C_x = (8+a')K_0, \quad C_p = 3a'K_0,$$

$$C_y = 9a'K_0, \quad C_{xy} = 3a'K_0,$$

$$D_x = \{8+b'(1+12d)\}D_0, \quad D_p = 3b'(1-4d)D_0,$$

$$D_y = 3b'(3+4d)D_0, \quad D_{xy} = \{8d+b'(3+4d)\}D_0$$

ただし、 $K_0 \equiv \sqrt{3}EA/(12l_e)$, $D_0 \equiv \sqrt{3}EI/(12l_e)$, $d = GJ/(4EI)$, l_e は部材長である。

注

注1) (6)式において Q/Q_r は0から1までの実数で、次式のように展開できる。

$$w_{mn}^r \approx w_{mn}^0 \left[\frac{Q}{Q_r} + \left(\frac{Q}{Q_r} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{Q}{Q_r} \right)^k \right]$$

これを(7)式に代入して、(8)式の条件を用いると

$$a_0 = \omega^2, \quad a_1 = -\omega^2/(w_{mn}^0 k)^2$$

と形式的に求まるので、(7)式より

$$\omega_r^2 = \omega^2 - \left[\frac{\omega}{k} \right]^2 \left[\frac{Q}{Q_r} + \left(\frac{Q}{Q_r} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{Q}{Q_r} \right)^k \right]^2$$

k をいくらとするかで各種の不整形RSモデルが可能であるが、最も簡単な例として、本論文では $k=1$ の場合を選び(9)式を導いている。その結果、初期不整によって座屈耐力が Q_c から Q_r へ低下することは考慮しているが、 k を2以上とした際に可能な非線形の復元力効果については対象としていない。非線形振動応答の為のモデル化には、更に検討する必要がある。

注2) 形状寸法が全て固定された条件では、アスペクト比 a が一定であるため、図2の横軸 B は離散的な値のみをとる。しかし、文献[8],[3]で論じられているように、連続体の部分円筒シェルに対する幾何学的非線形静的解析では、座屈荷重時の増分変位モードの波長から逆算して得られる円弧方向半波数 n は、固有値解析での半波数 n を形式的に連続量とみなした値に近いことが示されている。そこで、こうした既往の成果をふまえ、本研究でも、 n を正規化した値 B をあたかも連続的にとりえる量として力学的分析を行っている。

注3) $\bar{w}_{13}^0$ を、正でより大きな値にとり、静的非線形解析を行うと、座屈は生じなくなる。そのため、初期応力による自由振動数 F の低下は抑制され、結果として、図4bの太実線はそれらに対しても概略の下限值を与えることが予備的計算で確かめられている。この事実は、文献[16]での初期不整を有するリンク構造モデルに対する解析結果と定性的によく対応している。

(1994年3月3日原稿受理, 1994年8月25日採用決定)