不連続特性を有する構造システムの設計感度解析と最適設計

DESIGN SENSITIVITY ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF STRUCTURAL SYSTEMS WITH DISCONTINUOUS PROPERTIES

大崎 純*

Makoto OHSAKI

An incremental approach is presented for design sensitivity analysis of structural systems with discontinuous properties. In the proposed approach, the transition time, at which the governing equations change discontinuously, is considered as a function of the design variables. The incremental response analysis and design sensitivity analysis are carried out simultaneously. Newton-Raphson type incremental and iterative approach is presented for systems with geometrical nonlinearity. Efficiency of the proposed method is demonstrated in the examples of a contact problem of a truss and elasto-plastic structures subjected to cyclic loading conditions.

Keywords : *discontinuous property, sensitivity analysis optimum design, contact problem, elasto-plastic structure, geometrical nonlinearity*

不連続特性, 感度解析, 最適設計, 接触問題, 弾塑性構造物, 幾何学的非線形性

1. 序

設計感度解析法は, 部材断面積等の設計変数の変化にともなう応答量の変化率(設計感度係数)を求める手法であり, 最適設計法, 逆問題型設計法, 構造同定法等の基礎的役割を果たす手法である。さらに, 設計感度係数は, それ自身, 設計変更の過程において, 設計者に対する有意義な情報となるものである。構造システムの設計感度解析法及び最適設計法に関する従来の研究のほとんどは, 弾性構造物等の, システムのあらゆる状態においてその特性が1組の方程式系で支配されるような系を取り扱ったものである¹⁻³。ところで, 構造システムの応答解析問題には, 弾塑性応答解析問題, 接触問題⁴, 片側応力問題⁵等の, システムの特性を決定する支配方程式の成立範囲が, 変位, 応力等の状態量に関する不等式で定められる問題が多く存在する。

弾塑性構造物の設計感度解析法及び最適設計法に関する初期の論文⁶⁻⁹では, 幾何学的非線形性及び応答量の履歴依存性は考慮されていない。また, 最近の論文¹⁰⁻¹³でも, 履歴依存性は厳密には考慮されていない。境界条件が変分不等式で与えられる構造物の感度解析法及び最適設計法に関する論文^{14,15}では, 境界条件が載

荷にともない変化するような接触問題については論じられていない。それに対し, 著者らは, 繰り返し載荷を受ける弾塑性構造物に対し, 応力-ひずみ関係の接線係数が不連続に変化することを厳密に考慮した設計感度解析法を開発した¹⁶。

建築構造物の設計においては, 力学的条件以外にも, 建築計画, 施工等に関わる種々の制約条件が考慮される。本論では, 手法の簡単な説明のため, 構造設計のみを取り扱い, 制約条件には力学的条件を考慮して, 目的関数には全構造コストを与える。本論で展開する一般的定式化を用いれば, 他の要因についても定式化可能な範囲で容易に導入することができる。また, 「最適設計問題」(optimum design problem)は, 1つの数値計画問題として定式化できるような設計問題を意味する。さらに, 「構造システム」(structural system)は, いくつかの要素が結合してある力学的条件下で要求される目的を達成する系という意味で用いる¹⁷。

本論では, 文献16の手法を一般化して, 種々の不連続特性を有する構造システムに対して適用可能な一般的設計感度解析法を提示し, 接触問題のプロトタイプとしての変位拘束を有するトラス及び, 繰り返し載荷を受け

* 京都大学工学部建築学教室 助手・博士(工学)

Research Assoc., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Dr. Eng.

る弾塑性構造物に対して適用することによりその有効性を明らかにする。また、汎用最適化プログラムを用いて最適設計解を求め、幾何学的非線形性の最適設計解に及ぼす影響について考察する。

2. 不連続特性を有する構造システムの応答解析

有限要素法を用いて離散化された構造システムを考える。応力 - ひずみ関係の接線係数等のシステムの特性量が変位等の状態変数 (state variable) の不連続関数である場合、その応答量を求めるためには増分応答解析を行わなければならない。いま、簡単のため、荷重ベクトル $P(t)$ が荷重パラメータ (時刻) t の関数である荷重係数 $\alpha(t)$ を用いて

$$P(t) = \alpha(t)P^0 \quad (1)$$

のように表わされる場合を考える。ここで、 P^0 は与えられた基準ベクトルである。要素の断面積等の設計変数ベクトルを A とする。以後簡単のため、設計変数 A で定義されるシステムを設計 A とよぶ。システムの釣合い状態が

$$F(u(t, A), A) = P(t) \quad (2)$$

で表わされるものとする。ここで、 $u(t, A)$ は変位ベクトルであり、 F は設計 A の時刻 t における内力と等価な節点力ベクトルである。

第 i 列が $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ である行列を K とすると、 K は接線剛性行列とよばれる¹⁸⁾。このとき、(1) を用いると、(2) の速度型表現は次のようになる。

$$K(t, A)\dot{u}(t, A) = \dot{\alpha}(t)P^0 \quad (3)$$

ここで、 $(\dot{\quad})$ は t に関する微分である。

初期状態において、(2) によって釣合い状態が決定されるための不等式条件が全て不等号で満たされているものとする。その条件は、弾塑性構造物では降伏条件、片側応力問題では応力あるいはひずみの符号が変化しない条件であり、接触問題では変位の拘束条件である。ここでは、簡単のため、

$$G(u(t, A)) \leq 0 \quad (4)$$

のような u に関する条件が与えられるものとする。 G が応力あるいはひずみの関数である場合にも同様の定式化が可能である。

t を増加させたとき、(4) の 1 つ $G_j \leq 0$ が $t = t^{(j)}$ で等号で満たされ、以後 $G_j = 0$ が成立するものとする。また、さらに t を増加させると $t = t^{(j+1)}$ で条件 $G_{j+1} \leq 0$ が等号で満たされるものとする。すなわち $t^{(j)}$ 及び $t^{(j+1)}$ は

$$G_j(u(t^{(j)}, A)) = 0, \quad (5a)$$

$$G_{j+1}(u(t^{(j+1)}, A)) = 0 \quad (5b)$$

図-1 荷重パラメータ (時刻) と変位の関係

で求められる。簡単のため $t^{(j)}$, $t^{(j+1)}$ 等を境界時間とよぶ。

いま、 $K(t, A)$ は t の不連続な関数であり、区間 $t^{(j)} \leq t \leq t^{(j+1)}$ において一定値 $K^{(j)}(A)$ をとるものとする。さらに、区間 $t^{(j)} \leq t \leq t^{(j+1)}$ において $\dot{\alpha}(t)$ は一定値 $\dot{\alpha}^{(j)}$ をとるものとする。本節では、本論で提示する手法の特長を 3 節で述べるための準備として、 K が t に関して区分的に一定値をとる場合を考える。 t の各区間において K が u に依存する場合、すなわち幾何学的非線形性を考慮する場合については、4 節で詳しく述べる。このとき、

$$u^{(j)}(A) = u(t^{(j)}, A) \quad (6)$$

等の記号を用いると、(3) より次の増分型表現を得る。

$$\begin{aligned} K^{(j)}(A)\{u^{(j+1)}(A) - u^{(j)}(A)\} \\ = (t^{(j+1)} - t^{(j)})\dot{\alpha}^{(j)}P^0 \end{aligned} \quad (7)$$

$t^{(j)}$, $\dot{\alpha}^{(j)}$, $K^{(j)}$ 及び $u^{(j)}(A)$ が既知であるとき、(7) より $u^{(j+1)}(A)$ は

$$u^{(j+1)}(A) = d_1^0 t^{(j+1)} + d_2^0 \quad (8)$$

のような形で表現できる。ここで、 d_1^0 , d_2^0 は既知ベクトルである。(8) を (5b) に代入することにより $t^{(j+1)}$ が得られ、これを再び (8) に用いると $u^{(j+1)}(A)$ を求めることができる。

$t = t_1^{(j)}$ ($t^{(j)} < t_1^{(j)} < t^{(j+1)}$) において $\dot{\alpha}(t)$ が不連続に変化するときには、 $\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_1^{(j)}$ ($t^{(j)} \leq t \leq t_1^{(j)}$), $\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_2^{(j)}$ ($t_1^{(j)} \leq t \leq t^{(j+1)}$) とすると、

$$\begin{aligned} K^{(j)}(A)\{u(t_1^{(j)}, A) - u^{(j)}(A)\} \\ = (t_1^{(j)} - t^{(j)})\dot{\alpha}_1^{(j)}P^0 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} K^{(j)}(A)\{u^{(j+1)}(A) - u(t_1^{(j)}, A)\} \\ = (t^{(j+1)} - t_1^{(j)})\dot{\alpha}_2^{(j)}P^0 \end{aligned} \quad (9b)$$

が成立する。 $t_1^{(j)}$ は荷重条件により定められる指定値であるから、(9a) より $u(t_1^{(j)}, A)$ が得られ、(9b) 及び

(5b)を用いて $t^{(j+1)}$ 及び $u^{(j+1)}(A)$ を求めることができる。 $t^{(j)} < t < t^{(j+1)}$ において複数の時刻で $\dot{\alpha}(t)$ が不連続に変化する場合も同様である。

t と u_j の関係が図1の折線状経路oabで表わされるようなシステムを考える。 t を0から増加させたとき $t = t^{(1)}$ で点aに達し、接線剛性行列は不連続に変化する。最も単純な増分応答解析法としては、 t の一定増分 Δt を与える方法が考えられる。このとき、 t を t_0 から Δt 増加させると、経路上の点eからcに移動する。点cは正解の経路oab上に存在しないから、点cで接線剛性行列を変更してもそれ以後の経路はcdのようになり、正確な応答量を得ることができない。したがって、精度の良い応答値を得るためには、境界時間を正確に求めることが必要である。

3. 最適設計問題及び設計感度解析法

変位、応力、ひずみ等の応答量の絶対値の最大値を表わすベクトルを $H(A)$ とし、 $H(A)$ に対する指定上限値のベクトルを $\bar{H}$ とする。コスト関数を $C(A)$ とし、次のような最適設計問題を考える。

[構造システムの最適設計問題] 最大応答量に関する制約条件 $H(A) \leq \bar{H}$ の下で、全コスト $C(A)$ を最小とするような最適設計解を求めよ。

ここでは、簡単のため、応答量の最大値に関する制約条件のみ考慮したが、 t の関数の形式での制約条件を指定することも可能である。この最適設計問題に対する最適設計解を数値計画法の何らかの手法を用いて求めるためには、 $H(A)$ の A に関する感度係数が得られなければならない。

最大応答量の設計感度係数を求める際に、境界時間の感度係数を求めることの必要性について考察するため、設計 $A = A_0$ の t と u_j の関係が図2の折線状経路oabで表わされるようなシステムを考える。簡単のため、 $u_j = u_j^{(1)}$ で接線剛性行列が不連続に変化するものとする。設計 A_0 において、 $u_j = u_j^{(1)}$ が成立する t の値を $t_0^{(1)}$ とする。 A_0 から設計変数ベクトルを微小量 ΔA 変化させた設計 $A_0 + \Delta A$ 及び $A_0 - \Delta A$ の t と u_j の関係がそれぞれocd及びoefで表わされるものとする。このとき、 $t = t_0^{(1)}$ において、設計 $A_0 + \Delta A$ では $u_j < u_j^{(1)}$ 、設計 $A_0 - \Delta A$ では $u_j > u_j^{(1)}$ が成立し、 $t = t_0^{(1)}$ での接線剛性行列は異なる値をとる。したがって、 t を $t_0^{(1)}$ で固定させたときの u_j の設計感度係数は A の不連続な関数であり、 $t = t_0^{(1)}$ での設計感度係数は存在しないため、この方法では $u_j > u_j^{(1)}$ が成立する

図-2 設計変化にともなう時刻-変位関係の変化

領域での変位の設計感度係数を正確に求めることができない。

一方、明らかに、 $u_j = u_j^{(1)}$ が成立するような時刻での u_j の値は A にかかわらず一定であり、その設計感度係数は A の連続な関数である。ところが、このときの t の値 $t^{(1)}(A)$ は A の変化にともない変化する。ゆえに、 $u_j > u_j^{(1)}$ が成立する領域での変位の設計感度係数を求めるためには、 $t^{(1)}(A)$ の設計感度係数を求める必要がある。以上より、力学的特性が不連続に変化する構造システムの設計感度解析では、境界時間 $t^{(j)}$ を正確に求める必要があり、さらに、境界時間が設計変数 A の関数であることを考慮しなければならない¹⁶。

変位の自由度を f とすると、(5b)、(7)の両辺を A_i で微分することにより次の各式を得る。

$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial G_{j+1}}{\partial u_k} \frac{\partial u_k^{(j+1)}}{\partial A_i} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K^{(j)}}{\partial A_i} (u^{(j+1)} - u^{(j)}) + K^{(j)} \left(\frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial A_i} - \frac{\partial u^{(j)}}{\partial A_i} \right) \\ &= \left(\frac{\partial t^{(j+1)}}{\partial A_i} - \frac{\partial t^{(j)}}{\partial A_i} \right) \dot{\alpha}^{(j)} P^0 \end{aligned} \quad (11)$$

$u^{(j)}$ 、 $u^{(j+1)}$ 、 $\frac{\partial u^{(j)}}{\partial A_i}$ 、 $t^{(j)}$ 、 $t^{(j+1)}$ 及び $\frac{\partial t^{(j)}}{\partial A_i}$ が既知のとき、(11)を用いて $\frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial A_i}$ と $\frac{\partial t^{(j+1)}}{\partial A_i}$ の間の次のような関係式を得る。

$$\frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial A_i} = d_1 \frac{\partial t^{(j+1)}}{\partial A_i} + d_2 \quad (12)$$

ここで、 d_1 及び d_2 は既知のベクトルである。(12)を(10)に代入することにより $\frac{\partial t^{(j+1)}}{\partial A_i}$ が得られ、それを再び(12)に用いることにより $\frac{\partial u^{(j+1)}}{\partial A_i}$ が得られる。ゆえに、 $t = t^{(j+1)}$ での感度係数を求めるためには、

$t^{(j)}$ 及び $t^{(j+1)}$ の正確な値が得られていなければならない。

$t = t_1^{(j)}$ ($t^{(j)} \leq t_1^{(j)} \leq t^{(j+1)}$) において $\dot{\alpha}(t)$ が不連続に変化するときには、 $t_1^{(j)}$ は載荷条件として指定された量であるから、 $\frac{\partial t_1^{(j)}}{\partial A_i} = 0$ であり、(11)のみを用いて $t = t_1^{(j)}$ での設計感度係数が得られる。以上より、増分応答解析と並行して感度解析を実行することができる。

4. 幾何学的非線形性を考慮した定式化

幾何学的非線形性を updated Lagrangian 法¹⁹を用いて定式化し、時刻 t での応答量が得られているとき、 $t + \Delta t$ での応答量を修正ニュートン法を用いて計算する。

いま、簡単のため、第 i 要素の応力 σ_i 及びひずみ ε_i が要素内で一定である場合を考える。これらの量が要素内で一定でない場合にも、文献 16 と同様の定式化が可能である。システム全体の応力ベクトル及びひずみベクトルをそれぞれ σ 及び ε で表わす。第 i 要素の体積、線形ひずみ - 変位関係行ベクトル及び材端力ベクトルをそれぞれ V_i, B_{Li} 及び F_i とする。このとき、増分関係の基礎式は、

$$F_i^{(r)} = {}^t V_i {}^t B_{Li}^T \sigma_i^{(r)} \quad (13)$$

$${}^t K \left(u^{(r+1)} - u^{(r)} \right) = \alpha(t + \Delta t) P^0 - F^{(r)} \quad (14)$$

$$\varepsilon_i^{(r+1)} - \varepsilon_i^{(r)} = {}^t B_{Li} \left(u^{(r+1)} - u^{(r)} \right) \quad (15)$$

$$\sigma_i^{(r+1)} - \sigma_i^{(r)} = {}^t D_i \left(\varepsilon_i^{(r+1)} - \varepsilon_i^{(r)} \right) \quad (16)$$

のようになる。ここで、 $()^{(r)}$ は第 r 繰り返しステップでの値、 ${}^t ()$ は時刻 t での値、 D_i は応力 - ひずみ関係の接線係数であり、 $()^T$ はベクトルの転置を表わす。これらの式を用いて修正ニュートン法に基づく繰り返し計算により時刻 $t + \Delta t$ における応答量を求めることができる。ここで、応答量が十分収束した段階で、 ${}^{t+\Delta t} u = u^{(r)}$ 、 ${}^{t+\Delta t} \sigma = \sigma^{(r)}$ 、 ${}^{t+\Delta t} \varepsilon = \varepsilon^{(r)}$ である。

(13)-(16) を A で微分することにより、設計感度係数の増分関係式が得られる。例えば、(14) より

$$\left\{ \frac{\partial {}^t K}{\partial A_i} + \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial {}^t K}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial A_i} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial {}^t K}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial A_i} \right) \right\} \\ \times \left(u^{(r+1)} - u^{(r)} \right) + {}^t K \left(\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial A_i} - \frac{\partial u^{(r)}}{\partial A_i} \right) \\ = \frac{\partial \alpha}{\partial t} P^0 \frac{\partial {}^{t+\Delta t} t}{\partial A_i} - \frac{\partial F^{(r)}}{\partial A_i} \quad (17)$$

を得る。ここで、 m は要素数であり、 $()$ は A に関する偏微分の過程において u を一定とすることを意味する。

1つの増分内での繰り返し計算の各ステップで、 $u^{(r)}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial A_i}$ 、 $\frac{\partial \sigma}{\partial A_i}$ 及び $\frac{\partial u^{(r)}}{\partial A_i}$ が得られているものとする。次のステップで (14) を用いて $u^{(r+1)}$ が得られたとき、(17) を用いて $\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial A_i}$ と $\frac{\partial {}^{t+\Delta t} t}{\partial A_i}$ の間の次のような関係式を得る。

$$\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial A_i} = b_1^{(r+1)} \frac{\partial {}^{t+\Delta t} t}{\partial A_i} + b_2^{(r+1)} \quad (18)$$

ここで、 $b_1^{(r+1)}$ 及び $b_2^{(r+1)}$ は既知のベクトルである。繰り返し計算が収束したとき、 $u^{(r+1)} = {}^{t+\Delta t} u$ となり、次の関係式を得る。

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t} u}{\partial A_i} = b_1 \frac{\partial {}^{t+\Delta t} t}{\partial A_i} + b_2 \quad (19)$$

ここで、 b_1 及び b_2 は既知のベクトルであり、(15) と (16) を A_i で微分した式及び (18) を用いて、 ${}^{t+\Delta t} \sigma$ 、 ${}^{t+\Delta t} \varepsilon$ に関しても同様の関係式が得られる。

時刻 $t + \Delta t$ でシステムの特性能量が不連続に変化しないときには、

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t} t}{\partial A_i} = 0 \quad (20)$$

であり、(19) 等を用いて ${}^{t+\Delta t} u$ 、 ${}^{t+\Delta t} \sigma$ 及び ${}^{t+\Delta t} \varepsilon$ の A_i に関する感度係数を求めることができる。一方、 $t + \Delta t$ でシステムの特性能量が不連続に変化する場合に、(5a) を A_i で微分して $t = t + \Delta t$ で評価した式

$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial G_j}{\partial u_k} \frac{\partial {}^{t+\Delta t} u_k}{\partial A_i} = 0 \quad (21)$$

に (19) を代入することにより、 $\frac{\partial {}^{t+\Delta t} t}{\partial A_i}$ が得られ、その値を (19) 及び $\sigma^{(r)}$ 、 $\varepsilon^{(r)}$ に関する同様の式に代入することにより、応答量の設計感度係数が得られる。以上より、繰り返し計算に基づき、応答解析及び設計感度解析を並行して実行することができる。

5. 例題

本論で提示した手法の有効性を明らかにするため、変位拘束を有する弾性トラス、弾塑性せん断型構造物及び弾塑性平面トラスに対して設計感度解析を行ない、IDESIGN²⁰ を用いて最適設計解を求めた。

変位拘束を有する弾性トラス

接触問題の簡単な例として、図 3 のような変位拘束を受けるトラスに対して設計感度解析を行なった。ここで、載荷条件は $P = {}^t P^0$ ($P^0 = 9.8 \text{ N}$) の単調載荷であり、 $W = 2 \text{ m}$ 、 $H = 2 \text{ m}$ 、 $D = 1 \text{ cm}$ である。また、弾性係数 E は 205.8 GPa であり、簡単なモデルによる手法の説明のため、幾何学的非線形性及び部材の降伏は考えないものとする。

$t = 0$ の初期状態では図 3 のトラスは支点 a でピン支持、支点 b でローラー支持されており、部材断

図-3 変位拘束を有する 41 部材平面トラス

図-4 41 部材平面トラスの t と変位の関係

図-5 41 部材平面トラスの最適設計解

面積を $A_i \equiv 10.0 \text{ cm}^2$ としたとき、 t を増加させると $t = t^{(1)} = 2516.5$ で支点 b の水平方向変位 u_b が上限値 $\bar{u}_b = 1.0 \text{ cm}$ に達し、以後支点 b での支持条件はピン支持となる。この場合、明らかに剛性行列は $t = t^{(1)}$ でそのサイズが変化する。 t を 5000.0 まで増加させたときの u_b 及び節点 c の荷重方向変位 u_c の変化をそれぞれ図 4 の実線及び点線で示す。 $t = 5000.0$ において $u_c = 4.4606 \text{ cm}$ であり、本論で提示した感度解析法を用いて得られた第 1 部材の断面積に関する設計感度係数 $\partial u_c / \partial A_1$ の値は -0.12320 cm^{-1} である。この値は $\Delta A_1 = 0.001 \text{ cm}^2$ とした中央差分法で得られた設計感度係数と 5 桁の精度で一致している。

$A_1 > 10.0 \text{ cm}^2$ のトラスでは $t = t^{(1)}$ で u_b は $\bar{u}_b$ に達しておらず、 $A_1 < 10.0 \text{ cm}^2$ では t が $t^{(1)}$ に達するまでに $u_b = \bar{u}_b$ となる。したがって、 $t = t^{(1)}$ での u_b の感度係数は A の不連続な関数であり、 $t = 5000.0$ での応答量の設計感度係数を精度良く求めるためには、 $u_b = \bar{u}_b$ となる時刻が A の関数であることを厳密に考慮する必要がある。

このトラスに対して IDESIGN を用いて最適設計解を求めた。ここで、コスト関数は全部材体積であり、変

図-6 5 層せん断型構造物

位の絶対値の上限値を 5.0 cm とする。また、全部材に対して最小断面積制限値 3.0 cm^2 を与える。最適設計解を図 5 に示す。この図より、中央付近の上弦材の断面積を大きくすることが有効であることがわかる。最適設計解におけるコスト関数値は $2.3129 \times 10^4 \text{ cm}^3$ であり、全部材を一定値として最大変位が指定上限値に一致する設計解での値の 27.217% となっている。

繰り返し荷重を受ける弾塑性せん断型構造物

図 6 のような 5 層せん断型構造物に対して設計感度解析及び最適設計を行なった。ここで、 $H = 4 \text{ m}$ である。荷重条件は図 7 のような繰り返し荷重とする。ここで、 $t = 1, 3, 5, 7$ における荷重係数 $\alpha(t)$ の値はそれぞれ 5000.0, -5200.0, 5200.0, -5400.0 である。また、基準荷重 P_i^0 は耐震設計において通常用いられる比率の分布とし、ここでは、1 層から 5 層に対してそれぞれ 0.49115, 0.67966, 0.88428, 1.1305, 1.8144 kN とする。層間変位と層せん断力の関係はバイリニアとし、既存の構造物のデータから判断して、層間変形角 0.007 で第 1 分枝から第 2 分枝へ移行するものとする。さらに、第 2 勾配の第 1 勾配に対する比は 0.7 とする。

コスト関数は、層剛性の和とし、層間変形角の絶対値の上限値を 0.01 (Case 2-1) 及び 0.015 (Case 2-2) の場合について最適設計解を求めた。2 つの最適設計解の全ての層において、層間変形角の制約条件は等号で満たされており、2 ~ 5 層の剛性の第 1 層剛性に対する比は Case 2-1, Case 2-2 ともに同一であり、それぞれ 0.90177, 0.76584, 0.58898, 0.36288 である。Case 2-1 での第 1 層の層間剛性は 741.751 kN/m である。Case 2-2 における最適コスト関数値の Case 2-1 での値に対する比は 0.7222 であり、層間変位の上限値を 50% 増加させることにより、コスト関数値は 27.78% 減少している。

繰り返し荷重を受ける弾塑性トラス

図 8 のような平面トラスに対し、繰り返し荷重を作用させて、最適設計を行なった。ここで、図 7 のよう

図-7 荷重係数と t の関係

図-8 29 部材平面トラス

な荷重係数を与え、 $t = 1, 3, 5, 7$ における $\alpha(t)$ の値はそれぞれ 12000.0, -14000.0, 14000.0, -16000.0 である。図 8 において $W = 2.0$ m であり、部材の応力-ひずみ関係はバイリニアとし、その接線係数は降伏前は 205.8 GPa, 降伏後は 20.58 GPa である。また、降伏応力は 2352.0 MPa とし、簡単のため部材の座屈は考えない。さらに、全部材に対して最小断面積制限値 4.0 cm^2 を与える。

$P_1^0 = P_2^0 = 9.8 \text{ kN}$, ひずみの絶対値の上限値を 1.4×10^{-3} とした Case 3-1 について設計感度解析及び最適設計を行なった。幾何学的非線形性を考慮した場合の最適設計解を図 9 に示す。ここで、全部材体積は 3218.2 cm^3 であり、幾何学的非線形性を考慮しない場合には 3216.4 cm^3 である。したがって、この例では幾何学的非線形性の影響はほとんどみられない。ひずみの絶対値の上限値を 3.0×10^{-3} としたときの最適設計解における断面積分布は図 9 とほぼ同様である。幾何学的非線形性を考慮した場合の全部材体積は 3077.5 cm^3 であり、ひずみの許容値が 2.1429 倍となったのにもかかわらず、全部材体積はほとんど変化していない。このことは、ひずみの許容値の変化に比較して、応力の許容値

図-9 29 部材平面トラスの最適設計解 (Case 3-1)

図-10 29 部材平面トラスの最適設計解 (Case 3-2)

の変化は微小であることが原因であるものと考えられる。

次に、 $P_1^0 = 9.8 \text{ kN}$, $P_2^0 = 49.0 \text{ kN}$ とし、ひずみの絶対値の上限値を 1.4×10^{-3} としたとき (Case 3-2) の幾何学的非線形性を考慮した場合の最適設計解を図 10 に示す。ここで、全部材体積は 7899.7 cm^3 であり、幾何学的非線形性を考慮しない場合には 7833.5 cm^3 である。また、ひずみの絶対値は全ての部材において $t = 7$ で最大となっている。この例では、大きい断面積値をとる部材におけるひずみの最大値が負であることから、幾何学的非線形性は剛性を低下させる方向へ影響しているものと考えられる。

6. 結論

本論で得られた成果は以下のとおりである。

- (1) 力学的特性が不連続に変化する構造システムに対して、変位等の応答量の、設計変数に関する感度係数を求めるための一般的手法を提示した。本手法では、特性

が不連続に変化するパラメータ値(境界時間)が設計変数に依存することを厳密に考慮するため、精度の良い設計感度係数を求めることができる。

(2) (1)の手法を変位拘束を有する弾性トラス、弾塑性せん断型構造物及び繰り返し载荷を受ける弾塑性トラスに対して適用し、その有効性を明らかにした。さらに、汎用最適化プログラムを用いて最適設計解を求め、その特性を明らかにした。本手法をより一般的な接触問題及び片側応力問題に適用するためには、文献4と同様の手法を用いて幾何学的非線形性を導入することが必要である。

(3) 繰り返し载荷を受ける弾塑性トラスに対して幾何学的非線形性を考慮して最適設計解を求めた。その結果、幾何学的非線形性の最適設計解への影響は荷重条件に依存すること及び、ひずみの上限値の変化は、最適設計解に対してほとんど影響を及ぼさないことを示した。

参考文献

- 1) J.S. Arora: Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, New York, 1989.
- 2) E.J. Haug, K.K. Choi and V. Komkov: Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, New York, 1986.
- 3) 山川 宏: 最適化デザイン, 倍風館, 1993.
- 4) 鈴木敏郎, 小河利行, 末岡利之, 小笠原朋隆: ペナルティ法による薄肉弾性体の接触問題の有限要素解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No.423, pp89-96, 1991.
- 5) 半谷裕彦: 片側応力問題の変分不等式とポテンシャル関数, 生産研究, Vol.38, pp62-65, 1986.
- 6) C.Y. Sheu and W. Prager: Optimal plastic design of circular and annular sandwich plates with piecewise constant cross-section, J. Mech. Phys. Solids, Vol.17, pp11-16, 1969.
- 7) I. Kaneko and G. Maier: Optimal design of plastic structures under displacement constraints, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.27, pp369-391, 1981.
- 8) M.P. Bendsøe and J. Sokolowski: Sensitivity analysis and optimization of elastic-plastic structures, Engineering Optimization, Vol.11, pp31-38, 1987.
- 9) M.P. Bendsøe and J. Sokolowski: Design sensitivity analysis of elastic-plastic analysis problem, Mech. Struct. Mach., Vol.16, pp81-102, 1988.
- 10) J.J. Tsay and J.S. Arora: Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems, Part 1: General theory, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.81, pp183-228, 1990.
- 11) J.J. Tsay, J.E.B. Cardoso and J.S. Arora: Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems, Part 2: Analytical examples, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.81, pp183-228, 1990.
- 12) J.J. Tsay and J.S. Arora: Optimum design of nonlinear structures with path dependent response, Structural Optimization, Vol.1, pp203-213, 1989.
- 13) C.A. Vidal, H.-S. Lee and R.B. Haber: The consistent tangent operator for design sensitivity analysis of history-dependent response, Comp. Systems in Engng., Vol.2, pp509-523, 1991.
- 14) M.P. Bendsøe, N. Olhoff and J. Sokolowski: Sensitivity analysis of problems of elasticity with unilateral constraints, Mech. Struct. Mach. Vol.13, pp201-222, 1985.
- 15) M.P. Bendsøe and J. Sokolowski: Sensitivity analysis and optimal design of elastic plates with unilateral point support, Mech. Struct. Mach. Vol.15, pp383-393, 1987.
- 16) M. Ohsaki and J.S. Arora: Design sensitivity analysis of elastoplastic structures, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.37, pp737-762, 1994.
- 17) 矢川 元基, ニューラルネットワーク, 倍風館, 1992.
- 18) C.C. Wu and J.S. Arora: Design sensitivity analysis and optimization of nonlinear structural response using incremental procedure, AIAA J., Vol.25, pp1118-1125, 1987.
- 19) K.J. Bathe, E. Ramm and E.J. Wilson: Finite element formulations for large deformation dynamic analysis, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.9, pp353-386, 1974.
- 20) J.S. Arora and C.H. Tseng: IDESIGN User's Manual Ver. 3.5, Optimal Design Laboratory, The University of Iowa, 1987.

(1994年6月7日原稿受理, 1994年10月3日採用決定)