波と流れの複合作用を受ける回転形浮体に働く流体力

WAVE AND CURRENT INDUCED FORCES ON VERTICAL
AXISYMMETRIC FLOATING BODIES

松井 徹哉*, 李 相曄**

Tetsuya MATSUI and Sang Yeob LEE

A boundary integral equation method is developed for computing wave forces on large-volume axisymmetric floating bodies in weak current. The method is based on applying Green's theorem and expanding the velocity potential in a perturbation series of current speed. Retaining the leading-order terms in the current speed, the potential is obtained as the solutions of two sets of integral equations which only contain the Green's function at zero current speed. The solutions can be obtained efficiently by extending the standard boundary integral programs without current. Numerical results are presented for a number of body geometries. It is found that the wave exciting forces and the mean drift forces are most influenced by a small current speed.

Keywords: wave, current, floating body, forward speed, hydrodynamic force, wave drift force, wave drift damping, boundary integral equation method

波, 流れ, 浮体, 前進速度, 流体力, 波漂流力, 波漂流減衰, 境界積分方程式法

1. 序

海洋構造物が波と潮流の作用を同時に受ける場合や波浪中を曳航される場合に作用する流体力を予測するには, 波と流れの共存場における流体力についての知識が不可欠である。波と流れが共存する場合, 波による流体力は流れの存在によって著しい影響を受ける。この影響は波漂流力に対して特に顕著であり, 大型浮体の場合, $1\text{--}2\text{ms}^{-1}$ の流速が加わることによって, 波漂流力は流れが不在の場合の150-200%に増加することもありうる。波漂流力がわずかな流れによって著しく増加する事実は, 波浪中で長周期運動を行う係留浮体の重要な減衰機構の存在を意味する。この減衰力増加は波漂流減衰 (wave drift damping) として知られ, 長周期運動を近似的に準定常運動と見なすことによって, 一樣流れと波の共存場における波漂流力の流速に関する微係数として評価される^{1), 2)}。

波と流れの共存場における流体力の問題は, 波浪中で一定速度で前進する船体の抵抗増加の予測と関連して,

船舶工学の分野では古くから研究の対象とされ, かなりの成果の蓄積がある。しかし, その多くは2次元的な細長体理論^{3), 4)}に基づくものであり, 海洋構造物のように肥大な物体に対してはその成果を適用することはできない。他方, 任意形状物体にも適用できる3次元特異点分布法⁵⁾は, グリーン関数の計算に特別の技巧と多大の労力を必要とし, 実用解法とはなり難い。特に, 水面を貫通する肥大物体で, 物体の存在による流れの乱れ (定常攪乱ポテンシャル) の影響が無視できないような場合には, 既存の一樣流れ場におけるグリーン関数⁶⁾を用いることができないので, 問題は一層複雑になる。このような困難を回避する方法として, Zhao et al.⁷⁾は流体領域を流れの乱れが著しい物体近傍領域とそうでない遠方領域に分割し, 前者にはランキンソース (基本解) を, 後者には一樣流れ場のグリーン関数を分布させ, 2つの領域の境界面で両者の解を接続させるハイブリッド型の解法を提案している。

ところで, 実際の海域における流れの速度や海洋構造

* 名古屋大学工学部建築学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Eng., Nagoya Univ., Dr. Eng.

** 韓国安東工業専門大学建築設備科 講師・博士 (工学)

Lecturer, Dept. of Architectural Equipment, Andong Technical Junior College, Korea, Dr. Eng.

物が曳航される速度、あるいは係留浮体の長周期運動の速度などは水粒子速度に比べて十分小さいと仮定できる場合が多い。このような場合には、低流速の仮定を導入することによって、より効率的な計算手続きの定式化が可能である。たとえば、Huijsmans and Hermans⁸⁾はソース分布とグリーン関数を流速に比例する摂動パラメータのべき級数に展開し、流速の2乗項を省略することによって、流れが遅い場合に有効な摂動論の近似解法を提案している。ただし、一様流れ場のグリーン関数を用いているので、定常攪乱ポテンシャルの寄与は考慮されていない。

著者らは前稿^{9),10)}において、速度ポテンシャルに同様の摂動展開を施すことによって、流れが不在の場合のグリーン関数を用いて、波と流れが共存する場合の流体力を、定常攪乱ポテンシャルの寄与をも含めて効率的に計算する方法を提案した。類似の解法が最近 Nossen *et al.*¹¹⁾および Grue and Biberg¹²⁾によって報告されている。かれらは、Huijsmans and Hermans⁸⁾と同様、一様流れ場のグリーン関数を用いているが、このグリーン関数の流速依存項は積分路上に2位の極をもつため、その評価にはかなりの数値的困難が伴う。Huisman and Hermans⁸⁾はこの項が流れがない場合のグリーン関数の微分によって表示できることを示しているが、その評価には特別のアルゴリズムが必要であり、物体表面上での特異積分の処理などの問題も新たに生ずる。著者らの方法によれば、流れが不在の場合のグリーン関数を用いるので、一様流れ場のグリーン関数に基づく既往の解法に比べて、グリーン関数の計算に要する労力が少なく済み、既存の回折プログラムを拡張するだけで、容易に流れの影響を考慮することができる。

前稿^{9),10)}では、この解法を一様鉛直円柱および半球形浮体に適用し、波による流体力が流れの存在、特に物体の存在による流れの乱れによって著しい影響を受けることを明らかにした。本稿では、これを任意の子午線形状を有する回転形浮体に適用できるように拡張する。前稿¹⁰⁾と異なるところは、定常攪乱ポテンシャルが関係する部分のみであるから、その取扱いについてはやや詳しく議論するが、それ以外の定式化については必要最小限の記述にとどめる。応用例として、鉛直円柱、円筒形浮体およびフラスコ形浮体の計算結果を示し、流体力や浮体の運動応答に及ぼす流れの影響について考察する。

2. 境界値問題

一様な流れと規則波の複合作用を受ける回転形浮体を考える。浮体は漂流移動が拘束されている以外は自由な運動が許容されているものとする。空間固定座標系 $oxyz$ を、 $z=0$ が静水面に、 x 軸が流れの方向に、 z 軸が浮体の回転軸に一致するように設定する (Fig. 1)。

Fig. 1 Sketch of floating body in current and waves.

浮体の運動および入射波の振幅は微小で、線形重ね合わせが成り立つものと仮定する。浮体の運動は6自由度の剛体モード（サージ Ξ_1 、スウェイ Ξ_2 、ヒープ Ξ_3 、ロール Ξ_4 、ピッチ Ξ_5 、ヨー Ξ_6 ）の重ね合わせによって表現される。

流速を U 、入射波の振幅を ζ_0 、周波数を ω_0 、波数を k 、入射波の伝播方向が x 軸となす角度を β とする。波数 k と周波数 ω_0 は次の分散方程式によって関係づけられる。

$$k \tanh kh = \frac{\omega_0^2}{g} \equiv \nu_0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 g は重力加速度を、 h は水深を示す。

浮体の運動振幅は、時間 t において、次式のように記述される。

$$\Xi_j = \text{Re}[\xi_j e^{-i\omega t}], \quad j = 1, \dots, 6 \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 ω は出会い周波数を示し、次式によって定義される。

$$\omega = \omega_0 + kU \cos \beta \dots \dots \dots (3)$$

流体は非粘性、非圧縮性の理想流体で、その運動は非回転性であると仮定する。流体の運動を記述する速度ポテンシャルは次式のように表される⁴⁾。

$$\Phi_T(t) = U\phi_s + \Phi(t) \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 ϕ_s は単位流速当たりの定常ポテンシャルを、 Φ は非定常ポテンシャルを示す。 ϕ_s はさらに一様流れ x と物体の存在による定常攪乱ポテンシャル $\bar{\phi}$ に分解される。

$$\phi_s = x + \bar{\phi} \dots \dots \dots (5)$$

流速 U は小さく、 $O(U^2)$ の項は無視できるものと仮定すると、定常攪乱ポテンシャル $\bar{\phi}$ の境界値問題は次式のように表される⁴⁾。

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 0 \quad \text{流体領域 } V \text{ 内で} \dots \dots \dots (6a)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{自由表面 } z = 0 \text{ 上で} \dots \dots \dots (6b)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{底面 } z = -h \text{ 上で} \dots \dots \dots (6c)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = -n_1 \quad \text{物体表面 } S \text{ 上で} \dots \dots \dots (6d)$$

$$\bar{\phi} \rightarrow 0 \quad \text{無限遠方 } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \text{ で} \dots \dots \dots (6e)$$

ここに、 $\partial/\partial n$ は S 上に立てた外向き（流体領域から見て）法線ベクトル $\mathbf{n}$ の方向の微分を、 n_1 は $\mathbf{n}$ の x 方向余弦を示す。

非定常ポテンシャル Φ は時間 t の関数であり、次式のように記述される。

$$\Phi(t) = \text{Re}[\phi e^{-i\omega t}] \dots \dots \dots (7)$$

複素ポテンシャル ϕ は入射波ポテンシャル ϕ_I 、散乱波ポテンシャル ϕ_τ および各モードの運動により生ずる発散波ポテンシャル $\phi_j (j = 1, \dots, 6)$ の和として次のように表現される。

$$\phi = \phi_I + \phi_\tau - i\omega \sum_{j=1}^6 \xi_j \phi_j = \Phi_\tau - i\omega \sum_{j=1}^6 \xi_j \Phi_j \dots \dots \dots (8)$$

ここに、

$$\Phi_j = \begin{cases} \phi_j, & j = 1, \dots, 6 \\ \phi_I + \phi_\tau, & j = 7 \end{cases} \dots \dots \dots (9)$$

入射波ポテンシャルは既知であり、次式によって与えられる。

$$\phi_I = -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \dots \dots \dots (10)$$

散乱波ポテンシャルおよび発散波ポテンシャルは次の境界値問題の解として得られる⁴⁾。

$$\nabla^2 \Phi_j = 0 \quad V \text{ 内で} \dots \dots \dots (11a)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \nu \Phi_j - 2i\tau \nabla \phi_s \cdot \nabla \Phi_j + i\tau \Phi_j \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} = O(\tau^2) \quad z = 0 \text{ で} \dots \dots \dots (11b)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0 \quad z = -h \text{ で} \dots \dots \dots (11c)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial n} = \begin{cases} n_j + \frac{i\tau}{\nu} m_j, & j = 1, \dots, 6 \\ 0, & j = 7 \end{cases} \quad S \text{ 上で} \dots \dots \dots (11d)$$

$$\sqrt{r} \left\{ \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} - i \left[k + 2\tau \gamma_0 (\cos \beta - \cos \theta) + O(\tau^2) \right] \Phi_j \right\} \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty \text{ で} \dots \dots \dots (11e)$$

ここに、

$$\nu = \frac{\omega^2}{g}, \quad \tau = \frac{\omega U}{g} \dots \dots \dots (12)$$

$$(n_1, n_2, n_3) = \mathbf{n} \dots \dots \dots (13a)$$

$$(n_4, n_5, n_6) = \mathbf{x} \times \mathbf{n} \dots \dots \dots (13b)$$

$$(m_1, m_2, m_3) = -(\mathbf{n} \cdot \nabla) \nabla \phi_s \dots \dots \dots (13c)$$

$$(m_4, m_5, m_6) = -(\mathbf{n} \cdot \nabla) (\mathbf{x} \times \nabla \phi_s) \dots \dots \dots (13d)$$

$$\gamma_0 = \frac{k^2}{(k^2 - \nu_0^2)h + \nu_0} \dots \dots \dots (14)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \dots \dots \dots (15)$$

$\mathbf{x}$ は S 上の1点の浮体重心に対する相対位置ベクトルを示す。

3. 積分方程式

3.1 定常問題

定常攪乱ポテンシャル $\bar{\phi}$ の境界値問題(6)は、グリーン関数の公式を利用することによって、次の積分方程式の解に帰着される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi}{\alpha} \right) \bar{\phi}(P) + \iint_S \bar{\phi}(Q) \frac{\partial \bar{G}(P, Q)}{\partial n} dS \\ = \iint_S \bar{G}(P, Q) n_1(Q) dS \quad \begin{pmatrix} P \in V \\ P \in S \end{pmatrix} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

ここに、 $P(x, y, z)$ は参照点を、 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ は積分点を、 $\bar{G}(P, Q)$ は自由表面上で剛壁条件 $\partial \bar{G}/\partial \zeta = 0$ を満たすグリーン関数を、 α は点 P において流体領域 V のなす立体内角を示す。

3.2 非定常問題

非定常ポテンシャル $\phi_j (j = 1, \dots, 7)$ を流速に比例する摂動パラメーター τ のべき級数に展開して、次式のように表示する。

$$\phi_j = \phi_{j0} + \tau \phi_{j1} + O(\tau^2) \dots \dots \dots (17)$$

ここに、(17)の第1項は流れがない場合の波ポテンシャルを、第2項は流れの影響項を示す。

ϕ_j の境界値問題(11)は、グリーン関数の公式と(17)を適用することによって、次の2つの積分方程式の解に帰着される¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4\pi}{\alpha} \right) \phi_{j0}(P) + \iint_S \phi_{j0}(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS \\ &= \begin{cases} \iint_S G(P, Q) n_j(Q) dS, & j = 1, \dots, 6 \\ - \iint_S G(P, Q) \frac{\partial \phi_I(Q)}{\partial n} dS, & j = 7 \end{cases} \\ & \quad \left(\begin{matrix} P \in V \\ P \in S \end{matrix} \right) \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4\pi}{\alpha} \right) \phi_{j1}(P) + \iint_S \phi_{j1}(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS \\ &= \iint_{S_F} G(P, Q) f(Q) dS \\ &+ 2i\gamma_0 \iint_{S_\infty} G(P, Q) \phi_{j0}(Q) (\cos \beta - \cos \psi) dS \\ &+ \begin{cases} \frac{i}{\nu_0} \iint_S G(P, Q) m_j(Q) dS, & j = 1, \dots, 6 \\ 0, & j = 7 \end{cases} \\ & \quad \left(\begin{matrix} P \in V \\ P \in S \end{matrix} \right) \dots (19) \end{aligned}$$

ここに、 $G(P, Q)$ は流れが不在の場合のグリーン関数を、 S_F は仮想遠方円筒境界面 S_∞ によって囲まれた自由表面の部分を示し、

$$f(Q) = 2k \cos \beta \Phi_{j0}(Q) + 2i \nabla \phi_s(Q) \cdot \nabla \Phi_{j0}(Q) - i \Phi_{j0}(Q) \frac{\partial^2 \phi_s(Q)}{\partial \zeta^2} \dots (20)$$

$$\Phi_{j0} = \begin{cases} \phi_{j0}, & j = 1, \dots, 6 \\ \phi_I + \phi_{70}, & j = 7 \end{cases} \dots (21)$$

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \psi = \tan^{-1} \frac{\eta}{\xi} \dots (22)$$

である。(5), (10), (21) を考慮すれば、 f は一様流れによる項と定常攪乱ポテンシャルによる項とに分解されて、次式のように表される。

$$f(Q) = f_U(Q) + f_S(Q) \dots (23)$$

ここに、

$$f_U(Q) = 2k \cos \beta \phi_{j0}(Q) + 2i \frac{\partial \phi_{j0}(Q)}{\partial \xi} \dots (24a)$$

$$f_S(Q) = 2i \nabla \bar{\phi}(Q) \cdot \nabla \Phi_{j0}(Q) - i \Phi_{j0}(Q) \frac{\partial^2 \bar{\phi}(Q)}{\partial \zeta^2} \dots (24b)$$

4. 1 次非定常ポテンシャルの解

積分方程式 (16), (18) を解いて、定常攪乱ポテンシャル $\bar{\phi}$ および 0 次非定常ポテンシャル ϕ_{j0} の解を得ることは、既存の回折プログラムを用いれば容易である。ここでは、積分方程式 (19) を解いて 1 次非定常ポテンシャル ϕ_{j1} の解を得る方法について議論する。積分方程式 (19) が (18)

と異なるところは、右辺の物体表面積分、自由表面積分および遠方境界積分であるから、これらの積分が評価できれば、既存の回折プログラムを用いて ϕ_{j1} の解を得ることができる。

4. 1 物体表面積分の評価

物体表面積分に含まれる m_j 項は定常ポテンシャル ϕ_s の 2 階微分を含んでいるから、これらを数値的に精度良く評価することは一般に困難である。この困難を避けるには、Ogilvie and Tuck³⁾ により導かれた関係式

$$\iint_S G m_j dS = - \iint_S \nabla G \cdot \nabla \phi_s n_j dS \dots (25)$$

を用いると良い[†]。(25) に含まれる ϕ_s の微分はすべて 1 階微分であるから、これらを数値微分により評価するのに特に困難はない。

4. 2 自由表面積分および遠方境界積分の評価

自由表面 S_F 上の積分を評価するには、 S_F を仮想円形境界 C_b によって内部領域 S_{Fin} と外部無限領域 S_{Fout} に分割すると都合が良い (Fig. 1)[‡]。このとき、積分方程式 (19) は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4\pi}{\alpha} \right) \phi_{j1}(P) + \iint_S \phi_{j1}(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS \\ &= F_I(P) + F_U(P) + F_S(P) \\ &+ \begin{cases} - \frac{i}{\nu_0} \iint_S \nabla G(P, Q) \cdot \nabla \phi_s(Q) n_j(Q) dS, \\ 0, & j = 7 \end{cases} \\ & \quad \left(\begin{matrix} P \in V \\ P \in S \end{matrix} \right) \dots (26) \end{aligned}$$

ここに、

$$F_I(P) = \iint_{S_{Fin}} G(P, Q) f(Q) dS \dots (27a)$$

$$\begin{aligned} F_U(P) &= \iint_{S_{Fout}} G(P, Q) f_U(Q) dS \\ &+ 2i\gamma_0 \iint_{S_\infty} G(P, Q) \phi_{j0}(Q) (\cos \beta \\ &- \cos \psi) dS \dots (27b) \end{aligned}$$

$$F_S(Q) = \iint_{S_{Fout}} G(P, Q) f_S(Q) dS \dots (27c)$$

S_{Fin} 上の積分 F_I は数値積分により評価できる。ただし、被積分関数の $f(Q)$ は ϕ_s の ζ に関する 2 階微分を含んでいるから、これを数値的に精度良く評価することは一般に困難である。この困難を避けるには、2 次元グリーンの定理から導かれる次の関係式を用いると良い[†]。

$$\iint_{S_{Fin}} G \Phi_{j0} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \zeta^2} dS$$

[†] この式が使えるのは物体表面 S が滑らかで、かつ自由表面と直交する場合に限られる。

[‡] このような分割は、喫水線の半径が浮体の最大半径に一致する場合には不要である。この場合には、 C_b を喫水線に一致させ、 S_F の全領域を S_{Fout} として取り扱えば良い。

$$= \iint_{S_{Fin}} (G \nabla \Phi_{j0} + \Phi_{j0} \nabla G) \cdot \nabla \phi_s dS \\ - \int_{C_W + C_b} \frac{\partial \phi_s}{\partial n} dC \dots \dots \dots (28)$$

(28) と喫水線 C_W 上での境界条件 $\partial \phi_s / \partial n = 0$ を用いれば, F_I は次のようにポテンシャルの 1 階微分のみを含む形に書きかえられる。

$$F_I(P) = \iint_{S_{Fin}} [2k \cos \beta \Phi_{j0} + i (G \nabla \Phi_{j0} \\ - \Phi_{j0} \nabla G) \cdot \nabla \phi_s] dS + i \int_{C_b} \frac{\partial \phi_s}{\partial \rho} dC \dots \dots (29)$$

S_{Fout} 上の積分 F_U および F_S は, ポテンシャルの遠方表示を利用することによって, 以下のように半解析的に評価できる。

物体から十分離れた点では, 0 次非定常ポテンシャル ϕ_{j0} は次式のように挙動する。

$$\phi_{j0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{A_{0,n}}{B_{0,n}} \right) H_n^{(1)}(kr) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} \right) K_n(k_m r) \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \right] \\ \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \dots \dots \dots (30)$$

ここに,

$$A_{0,n} = (-1)^n A_{0,-n}, \quad B_{0,n} = -(-1)^n B_{0,-n} \\ A_{m,n} = A_{-m,n}, \quad B_{m,n} = -B_{m,-n} \quad (m \geq 1)$$

で, $H_n^{(1)}$ は第 1 種ハンケル関数を, K_n は第 2 種変形ベッセル関数を示し, k_m は次の固有方程式の正実根である。

$$k_m \tan k_m h + \nu_0 = 0 \dots \dots \dots (31)$$

係数 $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ ($m \geq 0$) は, 積分方程式 (18) を解いて物体表面上のポテンシャル ϕ_{j0} が得られれば決定できる¹⁰⁾。

定常攪乱ポテンシャル $\bar{\phi}$ は, 回転形浮体に対して, 次式のように表される。

$$\bar{\phi} = \left[\frac{\bar{A}_0}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m K_1 \left(\frac{m\pi r}{h} \right) \frac{\cos \frac{m\pi}{h}(z+h)}{\cos m\pi} \right] \\ \cdot \cos \theta \dots \dots \dots (32)$$

係数 $\bar{A}_m$ ($m \geq 0$) は, 積分方程式 (16) を解いて物体表面上のポテンシャル $\bar{\phi}$ が得られれば決定できる。

ここでの目的のためには, グリーン関数 $G(P, Q)$ を次のようにフーリエ級数に展開して表すと都合が良い。

$$G(P, Q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^n(r, z; \rho, \zeta) \cos n(\theta - \psi) \dots \dots (33)$$

g^n は John¹³⁾ による G の表示式をフーリエ展開して, 次式のように表される¹⁴⁾。

$$g^n(r, z; \rho, \zeta) = 2\pi i \gamma_0 \left(\frac{H_n^{(1)}(kr) J_n(k\rho)}{J_n(kr) H_n^{(1)}(k\rho)} \right) \\ \cdot \frac{\cosh k(z+h) \cosh k(\zeta+h)}{\cosh^2 kh} \\ + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{K_n(k_m r) I_n(k_m \rho)}{I_n(k_m r) K_n(k_m \rho)} \right) \\ \cdot \frac{\cos k_m(z+h) \cos k_m(\zeta+h)}{\cos^2 k_m h} \quad \begin{pmatrix} r > \rho \\ r < \rho \end{pmatrix} \\ \dots \dots \dots (34)$$

ここに,

$$\gamma_m = \frac{k_m^2}{(k_m^2 + \nu_0^2)h - \nu_0} \dots \dots \dots (35)$$

で, J_n は第 1 種ベッセル関数を, I_n は第 1 種変形ベッセル関数を示す。

(30) を (24a) に代入し, ベッセル関数の漸化式¹⁵⁾ を用いれば, f_U は次式のように表される。

$$f_U = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{C_{0,n}}{D_{0,n}} \right) H_n^{(1)}(kr) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{C_{m,n}}{D_{m,n}} \right) K_n(k_m r) \right] \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \dots \dots \dots (36)$$

ここに,

$$\begin{pmatrix} C_{0,n} \\ D_{0,n} \end{pmatrix} = 2k \cos \beta \begin{pmatrix} A_{0,n} \\ B_{0,n} \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} A_{0,n+1} - A_{0,n-1} \\ B_{0,n+1} - B_{0,n-1} \end{pmatrix} \\ \dots \dots \dots (37a)$$

$$\begin{pmatrix} C_{m,n} \\ D_{m,n} \end{pmatrix} = 2k \cos \beta \begin{pmatrix} A_{m,n} \\ B_{m,n} \end{pmatrix} \\ - ik_m \begin{pmatrix} A_{m,n+1} + A_{m,n-1} \\ B_{m,n+1} + B_{m,n-1} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (37b)$$

(30), (33), (34), (36) を (27b) に代入し, 付録に示す積分公式 (A1)-(A4) と $r \rightarrow \infty$ におけるハンケル関数の漸近展開表示¹⁵⁾ を用いれば, S_∞ 上の積分は消去されて, F_U は結局次式のように表される。

$$F_U(P) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[2\pi i \gamma_0 \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{0,n} \\ \mathcal{J}_{0,n} \end{pmatrix} J_n(kr) \right. \\ \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{m,n} \\ \mathcal{J}_{m,n} \end{pmatrix} I_n(k_m r) \\ \left. \cdot \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \right] \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \dots \dots \dots (38)$$

ここに,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{0,n} \\ \mathcal{J}_{0,n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_{0,n} \\ D_{0,n} \end{pmatrix} \frac{b^2}{2} \left[H_n^{(1)'}(kb)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{k^2 b^2} \right) \right. \\ \cdot H_n^{(1)}(kb)^2 \left. \right] + \sum_{l=1}^{\infty} \begin{pmatrix} C_{l,n} \\ D_{l,n} \end{pmatrix} \frac{b}{k^2 + k_l^2} \\ \cdot [k H_n^{(1)'}(kb) K_n(k_l b) - k_l H_n^{(1)}(kb) K_n'(k_l b)] \\ \dots \dots \dots (39a)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathcal{I}_{m,n}}{\mathcal{J}_{m,n}}\right) &= \left(\frac{C_{0,n}}{D_{0,n}}\right) \frac{b}{k^2 + k_m^2} \left[k H_n^{(1)'}(kb) K_n(k_m b) \right. \\
&\quad \left. - k_m H_n^{(1)}(kb) K_n'(k_m b) \right] + \left(\frac{C_{m,n}}{D_{m,n}}\right) \frac{b^2}{2} \\
&\quad \cdot \left[K_n'(k_m b)^2 - \left(1 + \frac{n^2}{k_m^2 b^2}\right) K_n(k_m b)^2 \right] \\
&\quad + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{\infty} \left(\frac{C_{l,n}}{D_{l,n}}\right) \frac{b}{k_m^2 - k_l^2} \left[k_l K_n'(k_l b) K_n(k_m b) \right. \\
&\quad \left. - k_m K_n(k_l b) K_n'(k_m b) \right] \dots\dots\dots (39b)
\end{aligned}$$

b は仮想境界円 C_b の半径を示す。

同様に, (10), (30), (32) を (24b) に代入し, ベッセル関数の漸化式を用いれば, f_S は次式のように表される。

$$f_S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_H^n(r) + f_K^n(r)] \left(\frac{\cos}{\sin}\right) n\theta \dots\dots\dots (40)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
f_H^n(r) &= \frac{i\bar{A}_0 k}{r^2} \left[\left(\frac{A_{I,n+1}}{B_{I,n+1}}\right) J_{n+2}(kr) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{A_{I,n-1}}{B_{I,n-1}}\right) J_{n-2}(kr) + \left(\frac{A_{0,n+1}}{B_{0,n+1}}\right) H_{n+2}^{(1)}(kr) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{A_{0,n-1}}{B_{0,n-1}}\right) H_{n-2}^{(1)}(kr) \right] \dots\dots\dots (41a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_K^n(r) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{i\bar{A}_0 k_m}{r^2} \left[\left(\frac{A_{m,n+1}}{B_{m,n+1}}\right) K_{n+2}(k_m r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{A_{m,n-1}}{B_{m,n-1}}\right) K_{n-2}(k_m r) \right] + i\bar{A}_m \left[\frac{m\pi}{h} \right. \right. \\
&\quad \cdot K_1' \left(\frac{m\pi r}{h} \right) \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\Phi}_j^{n+1}(r) + \tilde{\Phi}_j^{n-1}(r)) \\
&\quad \left. + \left(\frac{m^2 \pi^2}{2h^2} + \frac{n+1}{r^2} \right) K_1 \left(\frac{m\pi r}{h} \right) \tilde{\Phi}_j^{n+1}(r) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{m^2 \pi^2}{2h^2} - \frac{n-1}{r^2} \right) K_1 \left(\frac{m\pi r}{h} \right) \tilde{\Phi}_j^{n-1}(r) \right] \right\} \\
&\quad \dots\dots\dots (41b)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{A_{I,n}}{B_{I,n}}\right) = \begin{cases} 0, & j = 1, \dots, 6 \\ -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} i^n \left(\frac{\cos}{\sin}\right) n\beta, & j = 7 \end{cases} \dots\dots (42)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_j^n(r) &= \left(\frac{A_{I,n}}{B_{I,n}}\right) J_n(kr) + \left(\frac{A_{0,n}}{B_{0,n}}\right) H_n^{(1)}(kr) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{A_{l,n}}{B_{l,n}}\right) K_n(k_l r) \dots\dots\dots (43)
\end{aligned}$$

(33), (34), (40) を (27c) に代入し, ψ に関する積分を実行すれば, F_S は次の形に表される。

$$\begin{aligned}
F_S(P) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[2\pi i \gamma_0 \left(\frac{\mathcal{K}_{0,n}}{\mathcal{L}_{0,n}}\right) J_n(kr) \right. \\
&\quad \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{\mathcal{K}_{m,n}}{\mathcal{L}_{m,n}}\right) I_n(k_m r) \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \right] \left(\frac{\cos}{\sin}\right) n\theta \dots\dots\dots (44)$$

ここに,

$$\left(\frac{\mathcal{K}_{0,n}}{\mathcal{L}_{0,n}}\right) = \int_b^{\infty} [f_H^n(\rho) + f_K^n(\rho)] H_n^{(1)}(k\rho) \rho d\rho \dots (45a)$$

$$\left(\frac{\mathcal{K}_{m,n}}{\mathcal{L}_{m,n}}\right) = \int_b^{\infty} [f_H^n(\rho) + f_K^n(\rho)] K_n(k_m \rho) \rho d\rho \dots (45b)$$

さらに, 付録に示す積分公式 (A5), (A6) を用いれば, (45a) は次式のように書きかえられる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathcal{K}_{0,n}}{\mathcal{L}_{0,n}}\right) &= \frac{i\bar{A}_0 k}{2} \left\{ \left(\frac{A_{0,n+1}}{B_{0,n+1}}\right) \left[H_n^{(1)}(kb) H_{n+2}^{(1)}(kb) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - H_{n+1}^{(1)}(kb)^2 \right] - \left(\frac{A_{0,n-1}}{B_{0,n-1}}\right) \left[H_n^{(1)}(kb) H_{n-2}^{(1)}(kb) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - H_{n-1}^{(1)}(kb)^2 \right] + \left(\frac{A_{I,n+1}}{B_{I,n+1}}\right) \left[H_n^{(1)}(kb) J_{n+2}(kb) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - H_{n+1}^{(1)}(kb) J_{n+1}(kb) \right] - \left(\frac{A_{I,n-1}}{B_{I,n-1}}\right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[H_n^{(1)}(kb) J_{n-2}(kb) - H_{n-1}^{(1)}(kb) J_{n-1}(kb) \right] \right\} \\
&\quad + \int_b^{\infty} f_K^n(\rho) H_n^{(1)}(k\rho) \rho d\rho \dots\dots\dots (46)
\end{aligned}$$

(45b) および (46) に含まれる積分の被積分関数は ρ の増加とともに指数関数的に減少して行くので, これらの積分を数値積分により評価するのに特に困難はない。

積分方程式 (26) を物体表面上で満足させて解けば, 1 次非定常ポテンシャルの解が得られる。この積分方程式の核関数は流れが不在の場合のグリーン関数であるから, 既存の回折プログラムを拡張することによって, 容易にその解を得ることができる。特に, 浮体形状が回転対称性を有する場合には, ポテンシャルを円周方向にフーリエ展開することによって, 面積分方程式を一連の線積分方程式に変換することができ, 元の積分方程式を直接解く場合に比べて, 計算効率が大幅に改善される¹⁰⁾。

速度ポテンシャルが得られれば, ベルヌーイの定理を用いて流体圧が, さらに物体表面に働く流体圧を積分することによって, 付加質量・減衰係数, 1 次波強制力および定常波漂流力が算定できる¹⁰⁾。

5. 回転形浮体への適用

前節までの理論を応用して, 任意の子午線形状を有する回転形浮体に働く流体力およびその応答を予測する計算機プログラムを作成した。積分方程式を離散化して解くために, Fig. 2 に示すように, 物体表面の子午線を 3 節点 2 次アイソパラメトリック要素に分割し, 各要素内のポテンシャル分布を 2 次曲線で近似した[†]。仮想円形境界内部の自由表面積分の評価には, 自由表面の子午線

[†] 波の回折・発散問題における 2 次要素の優位性については多くの文献, たとえば文献 16)~18) に指摘されている。

Fig. 2 Geometries and element idealisations for (a) uniform vertical cylinder, (b) truncated vertical cylinder, (c) floating dock of flask type.

を物体表面と同様の2次アイソパラメトリック要素に分割し、各要素ごとにガウスの4点公式を適用した。また外部無限領域の積分(45b), (46)の評価にはニュートン・コーツ9点則を用い、相対誤差 10^{-5} の精度で収束解が得られるまで積分区間を逐次拡張する方法を採用した。ポテンシャルのフーリエ級数展開の採用次数は $n=0$ から定常波漂流力の解が収束する $n=7$ までとした。また固有関数展開項については上限を $m=30$ までとし、各項ごとに収束判定を行い相対誤差が 10^{-5} 以下になった時点で総和計算を終了させた。

5.1 一様鉛直円柱

最初に、本解析法の妥当性を検証するために、半径 a 、水深 $h=10a$ の一様鉛直円柱について、いくつかの予備的な計算を行い、解析解⁹⁾と比較した。積分方程式の離散化に用いた要素分割を Fig. 2(a) に示す。

Fig. 3 Comparison between analytical and numerical results for mean drift force on uniform vertical cylinder (radius= a , water depth= $10a$). $Fn=0$.

Fig. 3 および Fig. 4 はそれぞれ定常波漂流力および波漂流減衰係数の数値解と解析解の比較を示す。図中、縦軸の ρ は流体密度を表す。なお、数値解における波漂流減衰係数は $U=0$ の近傍における定常波漂流力の U に関する微係数を数値微分によって計算した結果である。理論解と数値解は非常に良く一致しており、本解析法の妥当性が確認できる。

5.2 円筒形浮体

次に、任意回転形浮体への適用例として、半径 a 、喫水深 $3a$ 、水深 $h=10a$ の円筒形浮体が規則波とその伝播方向に平行な流れを受ける場合 ($\beta=0$) について計算を行った。積分方程式の離散化に用いた要素分割を Fig. 2(b) に示す。なお、隅角部の丸みは物体表面の不連続性による処理の煩雑さを避けるために人為的に付加したものである。

Fig. 4 Comparison between analytical and numerical results for wave drift damping coefficient for uniform vertical cylinder (radius= a , water depth= $10a$). $\beta=0$.

Fig. 5 Added mass coefficient in surge for truncated vertical cylinder (radius= a , draught= $3a$, water depth= $10a$).

Fig. 8 Surge response of floating truncated vertical cylinder (radius= a , draught= $3a$, water depth= $10a$). Heave and pitch motions are restraint.

Fig. 6 Added damping coefficient in surge for truncated vertical cylinder (radius= a , draught= $3a$, water depth= $10a$).

Fig. 9 Mean surge drift force on fixed truncated vertical cylinder (radius= a , draught= $3a$, water depth= $10a$).

Fig. 7 Surge wave exciting force on truncated vertical cylinder (radius= a , draught= $3a$, water depth= $10a$).

Fig. 10 Mean surge drift force on floating truncated vertical cylinder (radius= a , draught= $3a$, water depth= $10a$). Heave and pitch motions are restraint.

Fig. 11 Heave wave exciting force on floating dock of flask type (pontoon radius= a , column radius= $0.5a$, draught= $3a$, water depth= $10a$).

計算結果を Figs. 5–10 に掲げる[†]。図中の横軸は無次元化出会い波数 $\nu a = \omega^2 a/g$ を、また F_n はフルード数を表し、 $F_n = U/\sqrt{2ga}$ で定義される。たとえば、 $a = 12.5\text{m}$ とすれば、 $U = 0.5\text{ms}^{-1}$ のとき $F_n = 0.032$ の値を得る。

Fig. 5 および Fig. 6 はそれぞれサージ付加質量係数およびサージ付加減衰係数の計算結果を示す。流れによって出会い周波数が変化する影響を除けば、付加質量・減衰係数に及ぼす流れの影響は極めて小さいことがわかる。

Fig. 7 はサージ 1 次波強制力の計算結果を示す。サージ波強制力は、波と流れの方向が一致する、いわゆる向かい波状態 ($F_n > 0$) では、流れのない場合に比べて増加し、波と流れの方向が逆転する、いわゆる追い波状態 ($F_n < 0$) では減少する。この傾向は出会い周波数が高くなるほど顕著になる。

Fig. 8 はサージ運動応答の計算結果を示す。ただし、浮体のヒープ運動およびピッチ運動は拘束され、サージ運動のみが許容されていると仮定している。1 次波強制力の結果に対応して、高周波数域ではサージ応答が流れによって僅かであるが影響を受けているのが観察できる。

Fig. 9 および Fig. 10 はそれぞれ浮体運動を拘束した場合およびサージ運動が許容された場合のサージ定常波漂流力の計算結果を示す。向かい波状態 ($F_n > 0$) では、定常波漂流力は流れの存在によって増加し、追い波状態 ($F_n < 0$) では減少する傾向を呈する。Figs. 7, 8 と比較して、定常波漂流力の方が 1 次波強制力や運動応答よりも流れの存在によってより顕著な影響を受けることが理解される。

5.3 フラスコ形浮体

より複雑な形状に対する本手法の有効性を示す例とし

[†]より詳細な結果は文献 19) に掲載されている。

Fig. 12 Mean heave drift force on floating dock of flask type (pontoon radius= a , column radius= $0.5a$, draught= $3a$, water depth= $10a$). Heave and pitch motions are restraint.

て、Fig. 2(c) に示すような形状のフラスコ形浮体が規則波とその伝播方向に平行な流れを受ける場合について計算を行った。浮体はヒープ運動およびピッチ運動が拘束され、サージ運動のみが許容されていると仮定した。積分方程式の離散化および自由表面積分の評価に用いた要素分割を Fig. 2(c) に示す。ただし、仮想円形境界の半径は $b = a$ (a : ポンツーン部の半径) に設定されている。ヒープ 1 次波強制力およびヒープ定常波漂流力の計算結果を Fig. 11 および Fig. 12 に掲げる。流れの存在によって波強制力や波漂流力が著しい影響を受けているのが観察できる。

6. 結語

一様な流れと規則波の複合作用を受ける回転形浮体に働く流体力およびその運動応答を、ポテンシャル流れと低流速の仮定に基づき予測する新しい数値解析手法を提案し、いくつかの典型的な浮体に適用して、流体力や浮体の応答に及ぼす流れの影響について考察した。

本研究の結果得られた知見は以下のように要約される。

- 1) 波と流れの共存場では、波による流体力および浮体の応答は流れの存在によって著しい影響を受ける。
- 2) 付加質量係数および付加減衰係数は、流れによって出会い周波数が変化する影響を除けば、流れの存在によってほとんど影響を受けない。
- 3) サージ 1 次波強制力やサージ定常波漂流力は、向かい波状態では流れのない場合よりも増加し、追い波状態では減少する。この傾向は出会い周波数が高くなるほど顕著になる。
- 4) 1 次波強制力や運動応答よりも定常波漂流力の方が流れの存在によってより大きな影響を受ける。

本稿で提案した境界積分方程式による解法は、流れが不在の場合のグリーン関数を用いるので、一様流れ場のグリーン関数に基づく既往の解法に比べて、グリーン関数の計算に要する労力が少なく済み、既存の回折プログラムを拡張するだけで容易に流れの影響を考慮することができる。本解析法を3次元任意形状浮体にも適用できるように拡張することは容易であり、この拡張については稿を改めて報告する予定である。

参考文献

- 1) Wichers, J.E.W., and van Sluijs, M.F.: The Influence of Waves on the Low-Frequency Hydrodynamic Coefficients of Moored Vessels, Proc. Offsh. Tech. Conf., Houston, OTC 3625, pp. 2313-2324, 1979.
- 2) Wichers, J.E.W., and Huijsmans, R.H.M.: On the Low Frequency Hydrodynamic Damping Forces Acting on Offshore Moored Vessels, Proc. Offsh. Tech. Conf., Houston, OTC 4831, pp. 315-321, 1984.
- 3) Ogilvie, T.F., and Tuck, E.O.: A Rational Strip Theory for Ship Motions: Part 1, Dept. Nav. Arch. Mar. Eng. Rept., No. 013, Univ. of Michigan, 1969.
- 4) Newman, J.N.: The Theory of Ship Motions, Advance in Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 221-283, 1978.
- 5) たとえば, Chang, M.S.: Computation of Three-Dimensional Ship Motions with Forward Speed, Proc. 2nd Int. Conf. on Numer. Ship Hydrodyn., Berkeley, pp. 124-135, 1977.
- 6) Wehausen, J.V., and Laitone, E.V.: Surface Wave, Handbuch der Physik, Vol. 9, pp. 446-778, 1960.
- 7) Zhao, R., Faltinsen, O.M., Krokstad, J.R., and Aanesland, V.: Wave-Current Interaction Effects on Large-Volume Structures, Proc. 5th Int. Conf. on Behav. Offsh. Struct., Trondheim, 1988.
- 8) Huijsmans, R.H.M., and Hermans, A.J.: A Fast Algorithm for Computation of 3-D Ship Motions at Moderate Forward Speed, Proc. 4th Int. Conf. on Numer. Ship Hydrodyn., Washington D.C., 1985.
- 9) 松井徹哉, 李 相曄, 佐野公俊: 波と流れの共存場に置かれた鉛直円柱に加わる流体力, 日本造船学会論文集, 第170号, pp. 277-287, 1991.
- 10) 松井徹哉, 李 相曄: 波と流れの複合作用を受ける半球形浮体に働く流体力およびその応答, 日本建築学会構造系論文報告集, 第443号, pp. 277-287, 1993.
- 11) Nossen, J., Grue, J., and Palm, E.: Wave Forces on Three-Dimensional Floating Bodies with Small Forward Speed, J. Fluid Mech., Vol. 227, pp. 135-160, 1991.
- 12) Grue, J., and Biberg, D.: Wave Forces on Marine Structures with Small Speed in Water of Restricted Depth, Appl. Ocean Res., Vol. 15, pp. 121-135, 1993.
- 13) John, F.: On the Motion of Floating Bodies II, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 3, pp. 45-101, 1950.
- 14) Fenton, J.D.: Wave Forces on Vertical Bodies of Revolution, J. Fluid Mech., Vol. 85, Part 2, pp. 241-255, 1978.
- 15) Abramowitz, M., and Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions, 9th ed., Dover, New York, 1972.
- 16) 松井徹哉, 加藤賢治: ハイブリッド型積分方程式法による浮体の定常動揺問題の数値解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第393号, pp. 165-176, 1988.
- 17) Liu, Y.H., Kim, C.H., and Lu, X.S.: Comparison of Higher-Order Boundary Element and Constant Panel Method for Hydrodynamic Loadings, Int. J. Offshore and Polar Eng., Vol. 1, No. 1, pp. 8-17, 1991.
- 18) Matsui, T., and Kato, K.: The Analysis of Wave-Induced Dynamics of Ocean Platforms by Hybrid Integral-Equation Method, Int. J. Offshore and Polar Eng., Vol. 1, No. 2, pp. 146-153, 1991.
- 19) 李 相曄: 海洋構造物の挙動に及ぼす波-流れ相互干渉効果に関する解析的研究, 名古屋大学博士学位請求論文, 1993.

付録. 積分公式

(39) および (46) を導くに際して利用した積分公式を以下に掲げておく¹⁵⁾。

$$\int H_n^{(1)}(k\rho)^2 \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \left[H_n^{(1)'}(k\rho)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{k^2 \rho^2}\right) H_n^{(1)}(k\rho)^2 \right] \dots (A1)$$

$$\int H_n^{(1)}(k\rho) K_n(k_m \rho) \rho d\rho = \frac{\rho}{k^2 - k_m^2} \cdot \left[k_m H_n^{(1)}(k\rho) K_n'(k_m \rho) - k H_n^{(1)'}(k\rho) K_n(k_m \rho) \right] \dots (A2)$$

$$\int K_n(k_l \rho)^2 \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \left[-K_n'(k_l \rho)^2 + \left(1 + \frac{n^2}{k_l^2 \rho^2}\right) K_n(k_l \rho)^2 \right] \dots (A3)$$

$$\int K_n(k_l \rho) K_n(k_m \rho) \rho d\rho = \frac{\rho}{k_m^2 - k_l^2} \cdot \left[k_m K_n(k_l \rho) K_n'(k_m \rho) - k_l K_n'(k_l \rho) K_n(k_m \rho) \right] (l \neq m) \dots (A4)$$

$$\int H_n^{(1)}(k\rho) H_{n\pm 2}^{(1)}(k\rho) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \left[H_{n\pm 1}^{(1)}(k\rho)^2 - H_n^{(1)}(k\rho) H_{n\pm 2}^{(1)}(k\rho) \right] \dots (A5)$$

$$\int H_n^{(1)}(k\rho) J_{n\pm 2}(k\rho) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \left[H_{n\pm 1}^{(1)}(k\rho) J_{n\pm 1}(k\rho) - H_n^{(1)}(k\rho) J_{n\pm 2}(k\rho) \right] \dots (A6)$$

(1994年4月4日原稿受理, 1994年10月14日採用決定)