テンション構造の最小変位形態

MINIMUM-DEFORMATION-SHAPE OF TENSION STRUCTURES

陳 沛山*, 川口 衛**

Pei Shan CHEN and Mamoru KAWAGUCHI***

A tension structure is usually very deformable, especially when it is subject to asymmetrical loadings. For a tenseion structure with a certain configuration and subjected to a certain loading system, the amounts of the nodal displacements and consequently its rigidity as a whole are very sensitive to its original shape and the state of prestressing. So the issue of finding the optimum shape and the state of prestressing for a maximum rigidity is of particular interest.

With a purpose of minimizing the nodal displacement-vector, a nonlinear programming method, gradient projection method, is adopted in the present paper to find the optimum nodal coordinates, member section areas and the distribution of prestresses. A simple tensegrity frame is taken as a numerical example, the result of which shows that the nodal displacements can be reduced to so far as 30% or 50% of the initial values.

1. はじめに

ケーブル構造や tensegrity 構造などは幾何学的不安定構造が少なくない。従って、この種の構造では、全体剛性が低く、非対称荷重に対して変位が大きいことが問題点になる場合がある。剛性を高めるためには、高いプレストレスを導入することが必要であるが、これは一般的に不経済であり、また工事上の困難を伴う場合もある。一方、テンション構造の挙動は構造形態とプレストレスの分布に敏感であることが知られている。形態を選択することにより構造の全体剛性を高めることができれば、設計上、大変重要な意味を持つことになる。

本論文では、非線形構造解析と非線形計画法を組み合わせ、テンション構造の最小変位形態理論を提案し、これにより構造の全体剛性を高めることを試みる。

第2節では、必要な概念について説明し、基本解析は

第3節で行う。さらに、第5節では簡単な tensegrity 構造を例題として数値解析を行って、数値的な例示を行う。

本論文で用いる最適手法は勾配射影法^{1,2)}(gradient projection method)である。この方法は1960年頃にRosen²⁾らにより開発されて以来、非線形制約条件付最適化解析の一つの有力な数学的手法として経済学や工学など広い分野において使われている。

第3.2節までの解析で求めた目的関数の降下ベクトルを用いて他の最適手法を使ってもよいが、Newton-Raphson法や一般逆マトリックスを計算するサブルーチンがある場合、勾配射影法を用いて数値解析プログラムを作るのは便利である。本研究においては他の最適手法の使用も可能であるが、それについて本論文は触れていない。

* 法政大学大学院工学研究科 大学院生・工修
** 法政大学工学部建築学科 教授・工博

Graduate Student, Graduate school of Eng., Hosei University, M. Eng.
Prof., Dept. of Architecture, Hosei University, Dr. Eng.

2. 最小変位形態

2.1 数学モデル

テンション構造は一般にプレストレスの導入が必要であり、この場合の解析も三段階に分られる。これは、プレストレス導入前の形態解析、プレストレス導入にともなう変形解析、そしてプレストレスを導入した後の付加荷重に対する変形解析である。

本論文では、プレストレスを導入した後の荷重による変位を最小とすることを目的として、部材断面積、節点座標とプレストレスの分布を求める解析を行う。

変位は常にベクトルとされているが、本解析では変位ベクトルの大きさ(1)を目的関数とする³⁾。その数学モデルは次のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimize} \quad F = \sum_{i=1}^n D_i^2 \\ \text{subject to:} \\ \quad \phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}) = 0; \quad (j=1, \dots, s) \\ \quad \varphi_k(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}) \leq 0, \quad (k=1, \dots, t) \end{array} \right. \quad (1)$$

(1)

(2)

(3)

ここに $\mathbf{D} = \{D_i\}$ は節点変位ベクトル； $\mathbf{X} = \{x_i\}$ は節点座標ベクトル、 $\mathbf{A} = \{A_k\}$ は部材の断面積ベクトル； $\mathbf{P} = \{P_k\}$ は部材のプレストレス軸力ベクトルである。式(2)と式(3)はそれぞれ与えられる等式拘束条件(equality constraints)と不等式拘束条件(inequality constraints)である。

問題は、拘束条件(2)と(3)を満足しながら未定変数 $(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P})$ (以下形態変数と呼ぶ)を選択することにより目的関数 F を最小にすることである。ここに、目的関数 F と $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ との間の関数関係を支配方程式と呼ぶ。この支配方程式はテンション構造の幾何学非線形解析の基本式の何れでもよいが、本論文では、混合法⁴⁾の基本式(5a,b)を用いて解析を展開する。

まず、部材力 N_k は

$$N_k = \frac{E_k A_k}{L_k} \delta_k + P_k, \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (4)$$

と表される。ここに、 L_k と δ_k はそれぞれ部材 k の長さとその変化で、 $\mathbf{E} = \{E_k\}$ は部材のヤング係数ベクトル； m は部材数である。式(4)を文献4)の式(1-11)に代入すると次式が簡単に得られる。

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} N_k - Q_i = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5a)$$

あるいは

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \left(\frac{E_k A_k}{L_k} \delta_k + P_k \right) - Q_i = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5b)$$

ここで、 n は自由度数、 $\{Q_i\}$ が節点荷重ベクトルを示している。

また $\delta_k = \sqrt{\sum_{\ell=1}^3 \bar{x}_{\ell}^2} - L_k$; $\bar{x}_{\ell} = (x_J - x_I)_{\ell} + (u_J - u_I)_{\ell}$ 。ここに x_I, x_J は部材 k の両端点 I, J の座標で、 u_I, u_J はその両端点の変位 ($\mathbf{D}$ の成分) であり、 $\ell=1, 2, 3$ はそれぞれ X, Y, Z 方向の値を示す。よって、 $\left\{ \frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \right\}$ は荷重をかけた後(変位後)の部材と X, Y, Z 軸の余弦関係を表している^{4) 7)}。

式(5a)あるいは(5b)を支配方程式とすると、数値微分積分などの繰り返し計算が少なく、誘導するだけで微分が直接求められ、計算時間を短縮することができる。

2.2 拘束条件について

拘束条件には、常に等式条件と不等式条件、さらに幾何学的拘束条件と力学的拘束条件が含まれている。

力学的条件は構造の特徴に合わせて力学原理により与えられる。例えば、プレストレスが導入されると、最適化過程にはプレストレスにより内力の釣合条件が必要である。この場合、形態変数の変化に従って内力状態も更新されている。

幾何学的拘束条件は建築計画や構造計画の要求や建物の目的などにより与えられる。例えば、対称条件や、ライズの制限なども幾何学的拘束条件として取り入れられる。

建築計画の要求や構造的な条件などの存在は当然のことであり、未定形態変数に拘束条件が付くことも必要である。最適化計算中(iteration of the optimization)には形態変数の値はステップ毎に変わって、構造形態も従って変化する。形態はどう変化しても形態変数はこれらの拘束条件を満足しなければならない。いいかえれば、これらの拘束条件を満足しながら、形態変数が目的関数の減少する方向に沿って変化していく。

3. 基本理論

3.1 目的関数微分

目的関数の降下方向は目的関数の未定変数による微分のベクトルである。目的関数 F と $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ との間の関数関係は陰関数であるため、降下方向を計算する前に支配方程式の微分を先に計算したほうが便利である。本解析で、未定形態変数は節点座標 $\mathbf{X} = \{x_j\}$ 、部材の断面積 $\mathbf{A} = \{A_t\}$ とプレストレス $\mathbf{P} = \{P_r\}$ の三つのベクトルであり、目的関数の微分も以上の三つの変数に対応して分けて行う。

2.1節でプレストレス構造の解析は常に三段階に分けて行うと述べたが、プレストレスの導入と各変数の関係をもう一度強調する。まず、 $\mathbf{X}$ はプレストレス $\mathbf{P}$ を導入した後の構造形態の節点座標であり、変位 $\mathbf{D}$ はプレストレス $\mathbf{P}$ を導入した後の荷重 $\{Q_i\}$ により生じるものである。従って、プレストレス導入前の段階の構造形態（節点座標）は本解析の最終結果 $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ を用いて逆計算により求められる。

(1) 節点座標で微分：

$\delta_k = \delta_k(x_j, D_i)$ を注意しながら、部材力と部材長さの微分は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \delta_k = \frac{\partial \delta_k}{\partial x_j} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial \delta_k}{\partial D_q} \frac{\partial D_q}{\partial x_j} \quad (j=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,m) \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \right) = \frac{\partial^2 \delta_k}{\partial D_i \partial x_j} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \delta_k}{\partial D_i \partial D_q} \frac{\partial D_q}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,m) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{E_k A_k}{L_k} \delta_k + P_k \right) \\ &= \frac{E_k A_k}{L_k} \left(\frac{\partial \delta_k}{\partial x_j} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial \delta_k}{\partial D_q} \frac{\partial D_q}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - \frac{E_k A_k}{L_k^2} \frac{\partial L_k}{\partial x_j} \delta_k, \end{aligned} \quad (j=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,m) \quad (8)$$

支配方程式(5a)の節点座標 x_j による微分は、

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} N_k - Q_i \right) = 0 \quad (i,j=1,2,\dots,n) \quad (9)$$

上式を展開し、式(7)と式(8)を代入して整理すると式(10)が得られる。

$$\sum_{q=1}^n T_q^i \left(\frac{\partial D_q}{\partial x_j} \right) + C^{ij} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (10)$$

ここに

$$T_q^i = \sum_{k=1}^m \left(\frac{E_k A_k}{L_k} \frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \frac{\partial \delta_k}{\partial D_q} + N_k \frac{\partial^2 \delta}{\partial D_i \partial D_q} \right), \quad (11)$$

$$C^{ij} = \sum_{k=1}^m \left[\frac{E_k A_k}{L_k} \frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \left(\frac{\partial \delta_k}{\partial x_j} - \frac{\delta_k}{L_k} \frac{\partial L_k}{\partial x_j} \right) + N_k \frac{\partial^2 \delta}{\partial D_i \partial x_j} \right] - \frac{\partial Q_i}{\partial x_j} \quad (12)$$

式(10)は $\left\{ \frac{\partial D_q}{\partial x_j} \right\}; (q=1,2,\dots,n)$ を未知数とする連立一次方程式であり、この式を解くと変位の節点座標による微分 $\left\{ \frac{\partial D_q}{\partial x_j} \right\}; (q,j=1,2,\dots,n)$ が得られる。

(2) 断面積で微分する：

まず、 δ_k と $\left(\frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \right)$ の微分は、

$$\frac{\partial}{\partial A_t} \delta_k = \sum_{q=1}^n \frac{\partial \delta_k}{\partial D_q} \frac{\partial D_q}{\partial A_t} \quad (t=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,m) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_t} \left(\frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \right) = \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \delta_k}{\partial D_i \partial D_q} \frac{\partial D_q}{\partial A_t} \quad (i=1,2,\dots,n; t,k=1,2,\dots,m) \quad (14)$$

となる。上式を用いて、支配方程式(5b)を断面積 A_t で微分すると、次式が得られる。

$$\sum_{q=1}^n T_q^i \left(\frac{\partial D_q}{\partial A_t} \right) + H^{it} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (15)$$

ここに

$$H^{it} = \frac{\partial \delta_t}{\partial D_i} \frac{E_t}{L_t} \delta_t \quad (16)$$

式(15)を解くと $\left\{ \frac{\partial D_q}{\partial A_t} \right\}; (q=1,2,\dots,n; t=1,2,\dots,m)$ が得られる。

(3) プレストレスで微分する:

前述と同じように、まず δ_k と $\left(\frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \right)$ をプレストレス成分 P_r で微分する。

$$\frac{\partial}{\partial P_r} \delta_k = \sum_{q=1}^n \frac{\partial \delta_k}{\partial D_q} \frac{\partial D_q}{\partial P_r} \quad (k, r = 1, 2, \dots, m) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_r} \left(\frac{\partial \delta_k}{\partial D_i} \right) = \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \delta_k}{\partial D_i \partial D_q} \frac{\partial D_q}{\partial P_r} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k, r = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

上式を用いて、支配方程式(5b)をプレストレス部材力で微分すると

$$\sum_{q=1}^n T_q^i \left(\frac{\partial D_q}{\partial P_r} \right) + R^{ir} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

を得ることができる。ここに

$$R^{ir} = \frac{\partial \delta_r}{\partial D_i} \quad (20)$$

式(19)を解くと変位のプレストレスによる微分 $\left\{ \frac{\partial D_q}{\partial P_r} \right\}; (q=1,2,\dots,n; r=1,2,\dots,m)$ を計算できる。

3.2 最急降下ベクトル:

微分オペレータを:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_m}, \frac{\partial}{\partial P_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial P_m} \right) \text{ とすると、}$$

目的関数 F の最急降下ベクトルは次のように表される。

$$\mathbf{d} = -\nabla^T F$$

$$= -2 \begin{bmatrix} \partial D_1 / \partial x_1 & \dots & \partial D_n / \partial x_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial D_1 / \partial x_n & \dots & \partial D_n / \partial x_n \\ \partial D_1 / \partial A_1 & \dots & \partial D_n / \partial A_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial D_1 / \partial A_m & \dots & \partial D_n / \partial A_m \\ \partial D_1 / \partial P_1 & \dots & \partial D_n / \partial P_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial D_1 / \partial P_m & \dots & \partial D_n / \partial P_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

上式のマトリックスの各要素は式(10)、(15)と式(19)を解くことにより得られる。これらの要素は変位 $\mathbf{D}$ の $(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P})$ に対する感度を表すものともいえる。

3.3 拘束条件の線形化

最適計算の第 k ステップで、有効制約式(2)を点 $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k$

の近傍でテーラー展開をすると、線形化される制約式が得られる。

$$\mathbf{B} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k \right\} = 0 \quad (22)$$

ここに

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \nabla \phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \phi_s \end{pmatrix} \quad (23)$$

マトリックス $\mathbf{B}$ は点 $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k$ における制約空間の接空間

$$\Omega = \{ \mathbf{y} \mid \mathbf{B}\mathbf{y} = 0 \} \quad (24)$$

を作り出す。

3.4 降下方向の射影

式(24)により作り出した接空間が一枚の超平面と想像され、任意のベクトルをこの超平面 Ω へ射影するオペレータ⁵⁾は

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (25)$$

となる。ここに $\mathbf{B}^T$ は $\mathbf{B}$ の一般逆マトリックス (general inverse)^{5,6)} である。式(21)で定めた目的関数の最急降下ベクトル $\mathbf{d}$ が接空間に射影してできた像は

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}} &= \mathbf{P}\mathbf{d} \\ \tilde{\mathbf{d}} &\in \Omega \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

と表される。

3.5 形態変数の修正

$\tilde{\mathbf{d}} \in \Omega$ は接空間 Ω における目的関数の降下方向である。

この降下方向に沿って点 $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k$ から直線前進する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k + \alpha \tilde{\mathbf{d}} \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{pmatrix}^{k+1} \in \Omega \quad (28)$$

ここに、 α はステップ長である（詳しくは3.7節で説明する）。

3.6 拘束空間への回復

式(28)に示しているように式(27)で求めた形態変数ベクトルは真の制約空間にあるものではない。このベクトルを制約空間に移さなければ形態変数が真の等式拘束条件を満足しない。真の制約空間に戻る方法がいろいろあり、ニュートンの方法が大変便利である。点

$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{pmatrix}^{k+1}$ を真の値の近傍点として、ニュートンの方法で

式(2)を満足するまで計算すると、真の制約空間にある

点 $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^{k+1}$ が求められる。この点において、目的関数

F の値は小さくなる。

$$F^{k+1} < F^k \quad (29)$$

最適条件を満足するまで計算すると最適解が得られ、つまり、最小変位形態を得ることになる。ここで用いている最適条件は原則的に Kuhn and Tucker の条件¹⁾である。

3.7 ステップ長さ α について

式(27)で形態変数を修正すると、点 $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k$ の近傍点(28)

を得ることができる。点 $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k$ において、式(3)の左辺を

テーラー展開すると、不等式制約条件が近似的に次式

のようになる。

$$\varphi_i^k + \nabla \varphi_i \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{pmatrix}^{k+1} - \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^k \right\} \leq 0 \quad (30)$$

$(i = 1, 2, \dots, t)$

式(27)により上式は次式になる。

$$\varphi_i^k + \alpha \nabla \varphi_i \tilde{\mathbf{d}} \leq 0 ; (i = 1, 2, \dots, t) \quad (31)$$

また、 $\alpha \geq 0$ が必要であり、 $\varphi_i^k < 0$ が成り立っているから、式(31)は次式と等価している。

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ -\frac{\varphi_i}{\nabla \varphi_i \tilde{\mathbf{d}}} \mid \nabla \varphi_i \tilde{\mathbf{d}} > 0 ; \forall i \right\} \quad (32)$$

また、 α は大きすぎると式(29)の結果を得られなくなる可能性がある。そして、 α の決め方にはプログラムのテクニックも重要となる。

4. 最小変位解析のアルゴリズム

step 0 : 制約条件を満足している初期形態

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^0 \text{を決める。}$$

step 1 : 式(5b)を解いて、変位ベクトル $\mathbf{D}$ を求める。

step 2 : 式(10)、(15)、(19)により支配方程式の微分を計算し、式(21)により目的関数の最急降下方向 $\mathbf{d}$ を計算する。

step 3 : 式(23)により $\mathbf{B}$ 、一般逆マトリックス $\mathbf{B}^*$ 、(25)により射影オペレーター $\mathbf{P}$ を計算する。

step 4 : 式(26)により接空間 Ω への射影を求める。
もし $\tilde{\mathbf{d}} = 0$ 、計算をストップする。

step 5 : 式(27)により直線前進し、ニュートンの方法で次の点 $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}^{k+1}$ を得る。

もし $\alpha = 0$ 、計算をストップする。

step 6 : $F^{k+1} < F^k$ を確認した上に、
 $k = k + 1$ 、step 1 に行く。

5. 数値解析例題

5.1 例題の概説

図1に示す簡単な tensegrity frame を例題として数値解析を行った。簡略化のために部材の断面積を定数とし、最適化する未定形態変数は、節点座標と部材のプレストレス軸力である。ケーブルとポストのヤング係数はそれぞれ1600kN/cm²と20000kN/cm²、ケーブルの断面積は8.0cm²、そしてポストの断面積は20.0cm²である。荷重は鉛直等分布荷重であるが、各節点に作用している荷重は節点座標の関数となっている。また、全域載荷 (Full-loading case)、半域載荷 (Half-loading case)、1/4域載荷 (Quarter-loading case) の三種類の荷重ケースで数値解析を行った。

(a)

(b)

図1 Tensegrity 構造の例題

5.2 拘束条件

幾何学的拘束条件は対称条件であり、構造体のプランを四角形として拘束している。

力学的拘束条件は、プレストレス軸力が荷重のない状態で釣合っていることである。不等式制約は、荷重あるいはプレストレスによるケーブルの軸力が正 (テンション) であることである。

(a) FULL-LOADING CASE

(b) QUARTER-LOADING CASE

(c) HALF-LOADING CASE

----- 初期形態 ; ————— 最適形態

図2 構造断面

表1 形態寸法 : (cm)

	initail	full-loading	half-loading	quarter-loading
a	560.00	506.62	511.80	483.86
b	1000.00	993.53	962.14	951.74
c	560.00	613.67	500.52	481.04
d	1000.00	1005.66	954.01	949.27
h ₁	350.00	348.19	331.01	324.44
h ₂	120.00	110.99	231.41	221.01
h ₃	300.00	282.60	305.36	284.19
h ₄	100.00	102.56	113.71	81.03
h ₅	200.00	217.89	195.45	212.80
h ₆	300.00	300.85	182.52	197.77

5.3 解析結果

初期形態と最適形態の各寸法は表1に、部材のプレストレス軸力は表2に示す。

図3は上層節点の鉛直変位を表す。本論文で紹介した方法により、例題の最適形態の節点変位は初期形態の節点変位に対して30%から50%に減ることが示されている。図4は目的関数の降下様子を示している。

表2. プレストレス軸力 (kN):

	initail	full-loading	half-loading	quarter-loading
①	18.422	26.806	3.123	34.749
②	33.167	21.194	22.166	9.292
③	7.333	6.049	27.703	19.758
④	41.667	41.426	75.468	70.499
⑤	3.968	3.233	18.367	1.488
⑥	31.512	40.782	29.991	51.984
⑦	91.856	83.866	103.605	96.278
⑧	1.128	1.256	6.401	0.951
⑨	11.513	11.436	39.087	28.386
⑩	64.010	64.439	108.962	102.671
⑪	-1.000	-0.975	-2.660	-0.352
⑫	-5.000	-5.080	-5.083	-5.573
⑬	-25.000	-24.968	-25.435	-25.376

図3 節点の鉛直変位

図4 目的関数の降下

6. 結論

本論文で紹介した方法により、tensegrity 構造の最小変位形態を求めることを試みた。数値解析の結果、初期形態に対して、Half-loading Case と Quarter-loading Case の最小変位形態の節点変位に 30～50%の減少が見られた。

本例題では、Full-loading Case、Half-loading Case と Quarter-loading Case の三種類の荷重ケースについて解析を行ったが、実際の設計では、最も影響の大きな荷重ケースに対して最小変位形態を求めることになる。そして、具体的な設計要件を勘案して、各荷重ケースの最小変位形態を評価した上で最もふさわしい形態を選択するべきである。

また、部材の断面積は部材の占める体積（以下ボリュームと呼ぶ）あるいは自重やコストと関係がある。通常の構造物の場合、形態最適化はボリュームを最小化にすることが主流になっている。よって、ボリュームを定数とする最小変位形態解析、あるいは変位とボリュームを目的関数として扱う多目的最適化解析についての研究が今後の課題の一つである。

参考文献

- 1) M. Minoux : Mathematical Programming (Theory and Algorithms), John Wiley and Sons, 1983.
- 2) Rosen, J.B. : The Gradient Projection Method For Nonlinear Programming, Part 2 , Nonlinear Constraints , Journal S.J.A.M. , 9, 1961.
- 3) Wolfram Stadler: Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences, Plenum Press, 1988.
- 4) 真柄 栄毅、国田 二郎、川股 重也：混合法によるケーブルネットの解析（その2）、日本建築学会論文報告集、第220号、昭和49年6月。pp.35～45.
- 5) 半谷 裕彦、川口 健一：形態解析、計算力学とCAEシリーズ 5、培風館、1991。
- 6) Penrose, R.: A Generalized Inverse for Matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), pp.406～416 .
- 7) 真柄 栄毅、国田 二郎、川股 重也：混合法によるケーブルネットの解析（その1）、日本建築学会論文報告集、第218号、昭和49年4月。pp.37～48.

(1994年7月10日原稿受理, 1994年11月14日採用決定)