粘性減衰を有する1質点系の履歴吸収エネルギーに関する考察

STUDY ON HYSTERITIC ENERGY ABSORPTION OF
VISCOUSLY DAMPED SINGLE-MASS SYSTEM

三宅辰哉*, 福知保長**

Tatsuya MIYAKE and Yasunaga FUKUCHI

The purpose of this paper is to predict hysteretic absorbed energy of viscously damped single-mass system subjected to earthquake. Bilinear and Slip hysteresis are dealt with. First, based on random vibration theory, a method to get an approximate value of hysteretic absorbed energy when input motions are stationary Gaussian white noise, is studied. By considering a probability distribution of damping dissipate energy per unit time, it is recognized that predicted values become more accurate for wide range of dumping factor and yield share force coefficient, than a result of a past study. Next, based on a past technique to make artificial seismic waves, a deterministic relation between Gaussian white noise and seismic waves, is supposed. And predicted values when input motions are seismic waves, are similarly gotten.

keywords : hysteretic absorbed energy, viscous damping, single-mass system, bilinear hysteresis, slip hysteresis, random response, seismic response

履歴吸収エネルギー, 粘性減衰, 1質点系, バイリニア履歴, スリップ履歴, ランダム応答, 地震応答

1. 序

低層鉄骨建築物では間仕切壁などの非構造部材の耐震効果によって、主体構造の水平力分担率は50%程度に低減され、層ごとの減衰定数は20%に達し得ることが実験的に確認されている¹⁾。また、地震動による入力エネルギー E_I の一部は主体構造の塑性化による履歴吸収エネルギー E_s となり、残りは減衰機構による減衰消費エネルギー E_D となる。 E_I に対する E_s の比率は主体構造の降伏強度および減衰性が高いほど小さくなり、上記のような耐震効果を有する建築物では $E_s < E_D$ となることも十分考えられる。したがって、特に低層鉄骨建築物では合理的な構造設計を行うために、 E_I に対する E_s の比率を支配するパラメータを明らかにし、その値をできるだけ正確に把握することが重要な課題である。

洪・田中²⁾はバイリニア型の復元力特性を有する粘性減衰1質点系について、入力が定常ホワイトノイズの場合の E_s に関して、減衰定数 h と降伏せん断力係数 α をバ

ラメータとして研究を行っている。しかし、これらの手法は入力がホワイトノイズであること、および後述のように h 、 α が大きくなると予測精度が低下する点に問題がある。

秋山・加藤³⁾は、 E_I に対する E_s の概括的な比率として次式を提案している。

$$\frac{E_s}{E_I} = \frac{1}{(1+3h+1.2/\sqrt{h})^2} \dots\dots\dots (1)$$

しかし、上式には復元力特性、 α 、および入力の強さなどによる影響が含まれておらず、本論の目的には不十分である。

本論ではまず、洪・田中らの手法を参考にしてランダム振動論に基づき、入力が定常ホワイトノイズの場合の E_s の予測手法について検討を行う。そのとき、エネルギー入力率の確率分布を考慮して予測精度の向上を図る。次に、地震動の確率モデルを得るために、定常ホワイトノイズと地震動の間に、エネルギー入力に関して確定的

* 名古屋工業大学工学部社会開発工学科
大学院生(日本システム設計)

** 名古屋工業大学工学部社会開発工学科
教授・工博

Graduate Student, Dept. of Architecture, Urban Eng. and Civil Eng.,
Faculty of Eng., Nagoya Institute of Technology
Prof., Dept. of Architecture, Urban Eng. and Civil Eng., Faculty of
Eng., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

な関係があるものとして、既往の人工地震波作成手法に基づき、実地震波データとの比較によりその関係を設定する。得られた確率モデルを用いて、入力地震波の場合の E_s の予測手法について検討を行う。予測手法の妥当性は数値解析によるシミュレーション値との比較により検証する。

2. 1 質点系振動モデル

本論で扱う 1 質点系振動モデルの変位 x は次の振動方程式に支配される。

$$(\text{線形系}) \quad x'' + 2h\omega_0 x' + \omega_0^2 x = -y'' \quad \dots\dots (2)$$

$$(\text{履歴系}) \quad x'' + 2h\omega_0 x' + F(x, x') = -y'' \quad \dots\dots (3)$$

ここで、' は時間に関する微分を表す。 ω_0 は弾性円振動数、 h は減衰定数、 y'' は入力加速度である。 $F(x, x')$ は履歴系の復元力関数を表し、図-1 のような完全弾塑性バイリニア型とスリップ型の 2 種類を対象とする。 α は降伏せん断力係数、 g は重力加速度、 δ_y は降伏変位である。

図-1 質点系の復元力特性

(2)式、(3)式の両辺に変位の増分 $x'dt$ を乗じて加振の継続時間 T_d にわたって積分すればエネルギーバランス式が得られ、その時間率であるパワーバランス式は次のようになる。

(線形系)

$$x''x' + 2h\omega_0 x'^2 + \omega_0^2 x x' = -y''x' \quad \dots\dots (4)$$

(履歴系)

$$x''x' + 2h\omega_0 x'^2 + F(x, x')x' = -y''x' \quad \dots\dots (5)$$

左辺は入力エネルギー E_I 、右辺第1項は運動エネルギー E_K 、第2項は減衰消費エネルギー E_D 、第3項は線形系では弾性ポテンシャルエネルギー E_P 、履歴系では履歴吸収エネルギー E_S と E_P の和の時間率を表す。

入力加速度 y'' として表-1に示す実地震波の他、次式で得られるパワースペクトル密度 S_0 、平均値0のガウス型ホワイトノイズ⁴⁾を用いる。

$$y''(t) = \sum_{k=1}^N (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad \dots\dots (6)$$

ここで、継続時間を T_d 、計算する時間の刻みを d_t として

$$N = T_d / d_t \quad \dots\dots (7)$$

$$\omega_k = \pi k / T_d \quad \dots\dots (8)$$

である。 a_k, b_k は平均値が0で次式による標準偏差 σ_y のガウス確率変数で、すべて互いに独立である。

$$\sigma_y = 2\pi S_0 / T_d \quad \dots\dots (9)$$

表-1 検討に用いた地震波

No	Name	Date	Peak Acc. (gal)	VEmax (cm/s)	Data length (s)
1	El Centro, NS	May 18, 1940	341.4	133.6	20
2	El Centro, EW		210.1	99.7	
3	Taft, NS	Jul 21, 1952	152.7	73.9	
4	Taft, EW		175.9	69.0	
5	Hachinohe, NS	May 16, 1968	225.0	94.6	
6	Hachinohe, EW		182.9	156.5	
7	TH030-1FL, NS	Jun 12, 1978	258.2	276.1	
8	TH030-1FL, EW		202.7	163.1	
9	Tokyo101, NS	Feb 14, 1956	74.0	24.7	10
10	Sandai501, NS	Apr 30, 1962	57.5	17.9	
11	Sandai501, EW		47.5	16.2	
12	Osaka205, EW	Mar 27, 1963	25.0	9.9	

3. ランダム振動論による履歴吸収エネルギー量の予測

3-1 減衰線形系のランダム応答⁵⁾

減衰線形 1 質点系にパワースペクトル密度 S_0 、平均値0のガウス型ホワイトノイズが $t=0$ で静止の状態から突然作用する場合の非定常応答において、応答変位 x の2乗平均 V_x は、

$$V_x = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0^3} \{1 - (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \omega' t) + \varepsilon \sin 2\omega' t \exp(-2h\omega_0 t)\} \quad \dots\dots (10)$$

ここで、 $\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - h^2}$

$$\varepsilon = h / \sqrt{1 - h^2}$$

$\sin \omega' t$ の変動項を無視すると近似的に、

$$V_x = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0^3} \{1 - \exp(-2h\omega_0 t)\} \quad \dots\dots (11)$$

応答速度 x' の2乗平均 $V_{x'}$ は、

$$V_{x'} = \omega_0^2 V_x = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} \{1 - \exp(-2h\omega_0 t)\} \quad \dots\dots (12)$$

定常応答状態では $t \rightarrow \infty$ として、

$$V_{x'} = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} \quad \dots\dots (13)$$

入力がガウス分布であれば線形系の応答 x はガウス分布の狭帯域過程となり、その包絡線の確率分布、すなわち x の振幅 B_x の確率分布 $p(B_x)$ は次式のレーリー分布になる。

$$p(B_x) = \frac{B_x}{V_x} \exp(-B_x^2 / 2V_x) \quad \dots\dots (14)$$

B_x の2乗平均 $E[B_x^2]$ は次のようになる。

$$E[B_x^2] = 2V_x \quad \dots\dots (15)$$

また、全入力エネルギーの期待値 $E[E_I]$ は、

$$E[E_I] = \pi S_0 t \quad \dots\dots (16)$$

である。応答速度振幅の2乗平均 $E[B_{x'}^2]$ は(15)式により $2V_{x'}$ であるので、振動エネルギーの期待値 $E[E_v]$ は、

$$E[E_V] = E[B_x^2] / 2 = V_x \quad (17)$$

減衰消費エネルギーの期待値 $E[E_D]$ は単位時間当たり $2h \cdot \omega \cdot V_x$ なので、

$$\begin{aligned} E[E_D] &= \pi S_0 \int_0^t \{1 - \exp(-2h\omega \cdot \tau)\} d\tau \\ &= \pi S_0 t - \frac{\pi S_0}{2h\omega} \{1 - \exp(-2h\omega \cdot t)\} \\ &= E[E_I] - E[E_V] \quad (18) \end{aligned}$$

となる。

3-2 塑性化に寄与するエネルギー

線形系における減衰によるエネルギー消費率 E_D' は次のようになる。

$$E_D' = 2h\omega \cdot x'^2 \quad (19)$$

ここで x_{ed} を次のように定義する。

$$x_{ed} = \sqrt{E_D'} = \sqrt{2h\omega} \cdot x' \quad (20)$$

x_{ed} の 2 乗平均 V_{ed} と、その振幅 B_{ed} の確率分布 $p(B_{ed})$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{ed} &= 2h\omega \cdot V_x \\ &= \pi S_0 \{1 - \exp(-2h\omega \cdot t)\} \quad (21) \end{aligned}$$

$$p(B_{ed}) = \frac{B_{ed}}{V_{ed}} \exp(-B_{ed}^2 / 2V_{ed}) \quad (22)$$

$E_D' = x_{ed}^2$ であるので、 V_{ed} は E_D' の期待値 $E[E_D']$ であり、 B_{ed} と B_{ed2} の確率分布は同一であるので、 $p(B_{ed})$ は E_D' の極大値の確率分布を示す。

この $p(B_{ed})$ を用いて履歴系の塑性化に寄与するエネルギー量を求める。このとき (21) 式の指数関数部が $E[E_V]$ の増加率を表すが、履歴系では一般に弾塑性応答により見かけの減衰定数が増大し、線形系に比べ振動エネルギー量が減少することを考慮して、安全側に $E[E_V] = 0$ とするために、(21) 式において $h\omega \rightarrow \infty$ とすれば、

$$V_{ed} = \pi S_0 \quad (23)$$

となる。すなわち、履歴系の弾塑性応答に対して等価な線形系が存在し、その振幅がレーリー分布に従い、入力エネルギーが即時に減衰消費されるものとすれば、 V_{ed} 、 $p(B_{ed})$ は塑性化の度合いに関わらず、入力波のパワースペクトル密度 S_0 のみによって定まる。なお、 $h\omega \rightarrow \infty$ とした場合、系に振動は生じないが、これは (21) 式において $E[E_V] = 0$ を考慮するためのみの処置である。

履歴系では応答変位 x の振幅 B_x が δ_r 以下であれば系に塑性化は生じない。 $B_x = \delta_r$ のときの応答速度振幅 B_Y およびエネルギー消費率 E_Y' は、

$$B_Y = \omega \cdot \delta_r = g\alpha / \omega \quad (24)$$

$$E_Y' = 2h\omega \cdot B_Y^2 \quad (25)$$

である。ここで、 e_r を次のように定義する。

$$e_r = \sqrt{E_Y'} = \sqrt{2h\omega} \cdot B_Y \quad (26)$$

(20) 式の x_{ed} の振幅 B_{ed} がこの e_r 以上のとき系に塑性化が生じる。時刻 t において、 $B_{ed} \geq e_r$ を満足する x_{ed} による単位時間当たりの減衰消費エネルギーの期待値 $E[e_o(t)]$

は、

$$E[e_o(t)] = \int_{e_r}^{\infty} (1/2) B^2 p(B) dB \quad (27)$$

その入力時間の期待値 $E[t_o(t)]$ は、

$$E[t_o(t)] = \int_{e_r}^{\infty} p(B) dB \quad (28)$$

$p(B)$ に (22) 式を用いれば (27) 式、(28) 式は、

$$E[e_o(t)] = (h\omega \cdot B_Y^2 + V_{ed}) \exp(-h\omega \cdot B_Y^2 / V_{ed}) \quad (29)$$

$$E[t_o(t)] = \exp(-h\omega \cdot B_Y^2 / V_{ed}) \quad (30)$$

上 2 式を加振の継続時間 T_d にわたって積分すれば、時刻 $0 \sim T_d$ 間の塑性化に寄与するエネルギー量 E_H とその入力時間 T_H の期待値が得られる。

$$E[E_H] = \int_0^{T_d} (h\omega \cdot B_Y^2 + V_{ed}) \exp(-h\omega \cdot B_Y^2 / V_{ed}) dt \quad (31)$$

$$E[T_H] = \int_0^{T_d} \exp(-h\omega \cdot B_Y^2 / V_{ed}) dt \quad (32)$$

V_{ed} に (23) 式を用いれば (31) 式、(32) 式は、

$$E[E_H] = T_d (h\omega \cdot B_Y^2 + \pi S_0) \exp(-h\omega \cdot B_Y^2 / \pi S_0) \quad (33)$$

$$E[T_H] = T_d \exp(-h\omega \cdot B_Y^2 / \pi S_0) \quad (34)$$

3-3 履歴吸収エネルギー

入力 y が正弦波であるときの共振状態を考え、図-2 のように共振応答変位を、

$$x = r \cos \omega_r t \quad (35)$$

とし、これを (4) 式のパワーバランス式に代入する。

$$\begin{aligned} &(-r\omega_r^2 \cos \omega_r t)(-r\omega_r \sin \omega_r t) \\ &+ 2h\omega \cdot (-r\omega_r \sin \omega_r t)^2 \\ &+ F(r \cos \omega_r t, t)(-r\omega_r \sin \omega_r t) \\ &= -f \sin \omega_r t (-r\omega_r \sin \omega_r t) \quad (36) \end{aligned}$$

図-2 共振状態における等価線形モデル

上式を時刻 0 から $2\pi/\omega_r$ まで積分し、 $2\pi/\omega_r$ で割る。

バイリニア型

$$h\omega \cdot \omega_r^2 r^2 + \frac{2\omega_r}{\pi} (r - \delta_r) g\alpha = \bar{E}_H \quad (37)$$

スリップ型

$$h\omega \cdot \omega_r^2 r^2 + \frac{\omega_r}{\pi} (r - \delta_r) g\alpha = \bar{E}_H \quad (38)$$

上式の右辺 $\bar{E}_H$ は平均エネルギー入力率であり、次式とす

る。

$$\bar{E}_H = E[E_H]/E[T_H] \quad \dots\dots\dots (39)$$

最小自乗法による等価線形化手法⁵⁾によれば、共振状態における応答変位振幅 r が与えられたとき、等価円振動数 ω_r と等価減衰定数 h_r は次のようになる。

$$\omega_r^2 = C\omega_o^2 \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$h_r = \frac{S}{2C} + \frac{h}{\sqrt{C}} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここで、 C, S は次式による。

バイリニア型

$$C = \frac{1}{\pi} (\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1) \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$S = \frac{1}{\pi} \sin^2 \theta_1 \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\text{ただし、} \theta_1 = \cos^{-1}(1 - 2 \frac{\delta_r}{r}) \quad , \quad r > \delta_r$$

スリップ型

$$C = \frac{1}{\pi} \{ \theta_1 - \theta_2 + \pi/2 - \frac{1}{2} (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) \} \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$S = \frac{1}{\pi} (\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 - 1) \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$\text{ただし、} \theta_1 = \cos^{-1}(1 - \frac{\delta_r}{r})$$

$$\theta_2 = \cos^{-1}(\frac{\delta_r}{r}) \quad , \quad r > \delta_r$$

(37)式あるいは(38)式と、(40)式を連立して解けば r 、 ω_r が求められ、履歴吸収エネルギーの期待値 $E[E_s]$ は次のようになる。

バイリニア型

$$E[E_s] = \frac{2\omega_r}{\pi} (r - \delta_r) g \alpha E[T_H] \quad \dots\dots\dots (46)$$

スリップ型

$$E[E_s] = \frac{\omega_r}{\pi} (r - \delta_r) g \alpha E[T_H] \quad \dots\dots\dots (47)$$

また、スリップ型については系の等価な弾性剛性が系の塑性化に伴い低下するので、次のように段階的に解析を行う。

第1ステップ

①演算を行い、 r_1 、 ω_{r1} を求める。

②(47)式により $E[E_s]$ を計算する。

③経過時間 $T_r = 2\pi/\omega_{r1}$ とする。

第2ステップ以降

④ $\omega_{oi} = \omega_o \sqrt{\delta_r/r_{i-1}}$ 、 $h_i = h \sqrt{r_{i-1}/\delta_r}$ 、 $\delta_{ri} = r_{i-1}$ として $\bar{E}_H$ を更新する。

⑤演算を行い、 r_i 、 ω_{ri} を求める。

⑥(47)式により履歴吸収エネルギーの増分を計算し、 $E[E_s]$ に加算する。

⑦経過時間 T_r に $T_r = 2\pi/\omega_{ri}$ を加算する。

以降、 T_r が $E[T_H]$ に達するまで④～⑦を繰り返す。ただ

し、最終ステップの履歴吸収エネルギーの増分は、(47)式で求められる値に $(T_r - E[T_H])/T_r$ を乗じる。

3-4 シミュレーションによる検討

以上のように求められる解析値の妥当性を検証するために、モンテカルロ・シミュレーションによる数値実験を行った。 $S_o = 300 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ 、 $T_d = 10 \text{ s}$ 、 $d_t = 0.01 \text{ s}$ として(6)式により作成した500個のガウス型ホワイトノイズサンプルを用いて応答計算を行い、結果を統計的に処理し、解析値と比較する。比較の対象は全入力エネルギーに対する履歴吸収エネルギーの比率 μ である。

$$\mu = E[E_s/E_o] \quad \dots\dots\dots (48)$$

図-3 ガウス型WNによる履歴吸収エネルギー

比較結果を図-3に示す。バイリニア型では α が小さい場合、解析値は若干過大評価となるが全体的には良く一致している。スリップ型では3-3項に示す段階的解析値と、 δ_{ri} 、 ω_{oi} を δ_r 、 ω_o に固定した疑似履歴モデルによる解析値を示したが、段階的解析はバイリニア型と同様にシミュレーション値と良く一致している。疑似履歴モデルによる解析値は α が小さい場合やや過大評価となる。

文献2)では(37)式、(38)式中の平均エネルギー入力率 $\bar{E}_H$ を定常ホワイトノイズの平均エネルギー入力率 πS_o とし、(46)式、(47)式中の入力時間の期待値 $E[T_H]$ を加振の全継続時間 T_d として、3-3項と同様の手法によってバイリニア型の履歴吸収エネルギーの期待値 $E[E_s]$ を求めている。その結果を図-3に併記したが、エネルギー入力波の振幅の確率分布が考慮されていないため、系の降伏エネルギー消費率 $E_{r'}$ が大きい($E_{r'} > 650 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ 程度)場合は予測精度が低下する。

4. 実地震波による履歴吸収エネルギー量の予測

4-1 地震動の確率モデル

地震動の確率モデルとして図-4のように、確定形状関数(包絡線関数) $a(t)$ によって非定常化されたガウス型ホワイトノイズ(擬定常ホワイトノイズ)を、地盤特性を表現する確定線形フィルタ $F(i\omega)$ に通したランダム過程を用いることが良く行われる。本論でもこの手法に従い、ガウス型ホワイトノイズと地震動は $a(t)$ 、 $F(i\omega)$ を介在させることで関係づけられるものとする。

ただし、 $\mathcal{F}$: フーリエ変換、 i : 虚数単位
 $\mathcal{F}^{-1}$: 逆フーリエ変換

図-4 地震動の確率モデル

4-2 地震動による入力エネルギーの期待値

地震入力エネルギーは周波数領域において次のように表現される⁶⁾。

$$E_I = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) |Y''(i\omega)|^2 d\omega \quad (49)$$

ここで、 $| \cdot |$: 複素数の絶対値

上式中の $W(\omega)$ は次式の粘性減衰弾性1質点系のエネルギーアドミッタンスであり、速度伝達関数の実数部に $1/2\pi$ を乗じたものである。

$$W(\omega) = \frac{h\omega_0\omega^2}{\pi\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h\omega_0^2\omega^2\}} \quad (50)$$

期待値は次のようになる。

$$E[E_I] = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) E[|Y''(i\omega)|^2] d\omega \quad (51)$$

ここで、

$$\begin{aligned} E[|Y''(i\omega)|^2] &= |F(i\omega)|^2 E[|N'(i\omega)|^2] \\ &= |F(i\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)a(t_2)\exp\{i\omega(t_1-t_2)\} \\ &\quad \cdot E[n(t_1)n(t_2)]dt_1dt_2 \quad (52) \end{aligned}$$

$n(\tau)$ はホワイトノイズであるから

$$E[n(\tau_1)n(\tau_2)] = 2\pi S_0 \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (53)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$: Diracのデルタ関数

(53)式を(52)式に代入して、

$$E[|Y''(i\omega)|^2] = 2\pi S_0 |F(i\omega)|^2 A \quad (54)$$

$$\text{ただし、} A = \int_0^t a(\tau)^2 d\tau$$

であるので、

$$E[E_I] = 2\pi S_0 A \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 W(\omega) d\omega \quad (55)$$

また、 $W(\omega)$ のバンド幅が狭く、 ω_0 近傍で $|F(i\omega)|^2$ がゆるやかに変化している場合には、次式のような狭帯域近似が可能である。

$$E[E_I] \approx \pi S_0 A |F(i\omega_0)|^2 \quad (56)$$

4-3 擬定常ホワイトノイズによる履歴吸収エネルギー

パワースペクトル密度 S_0 のガウス型ホワイトノイズに確定形状関数 $a(t)$ を乗じた擬定常ホワイトノイズによる入力エネルギー量 $E_w(t)$ の期待値は、(56)式において $|F(i\omega)|^2 = 1$ として、

$$E[E_w(t)] = \pi S_0 A \quad (57)$$

時刻 τ における微小時間 $d\tau$ 間の入力エネルギー量の期待値は、

$$E[e_w(\tau)] = \pi S_0 a(\tau)^2 d\tau \quad (58)$$

この入力によって生じる自由振動の時刻 t における2乗平均速度 $v_x(t)$ の期待値は、

$$\begin{aligned} E[v_x(t)] &= E[e_w(\tau)] \exp\{-2h\omega_0(t-\tau)\} \\ &= \pi S_0 a(\tau)^2 \exp\{-2h\omega_0(t-\tau)\} d\tau \quad (59) \end{aligned}$$

これを時刻0から t まで重ね合わせれば、擬定常ホワイトノイズによる2乗平均応答速度が得られる。

$$v_x = \pi S_0 \int_0^t a(\tau)^2 \exp\{-2h\omega_0(t-\tau)\} d\tau \quad (60)$$

図-5および次式に示す確定形状関数を用いれば、

$$a(t) = b \cdot t \cdot \exp(-c \cdot t) \quad (61)$$

v_x は次のようになる。

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\pi S_0 b^2}{H^3} \{ (H^2 t^2 - 2Ht + 2) \exp(-2c \cdot t) \\ &\quad - 2 \exp(-2h\omega_0 t) \} \quad (62) \end{aligned}$$

ただし、 $H = 2h\omega_0 - 2c$

図-5 確定形状関数

上式に $2h\omega_0$ を乗じ(21)式と同様に $h\omega_0 \rightarrow \infty$ とすれば、(23)式に相当する擬定常ホワイトノイズによる v_{ed} は次式となる。

$$V_{od} = \pi S_o a(t)^2 \dots\dots\dots (63)$$

上式を(31)式、(32)式に用いれば擬定常ホワイトノイズによる、塑性化に寄与するエネルギー量の期待値 $E[E_H]$ とその入力時間の期待値 $E[T_H]$ が得られる。ただし、この場合(31)式、(32)式の指数関数の指数部にさらに指数関数が含まれ、(33)式、(34)式のように展開することが困難なので(31)式、(32)式を用いて数値積分を行う。

このようにして得られる $E[E_H]$ 、 $E[T_H]$ および $E[E_H]$ の平均入力率 $\bar{E}_H = E[E_H]/E[T_H]$ を3-3項中の各式に用いれば擬定常ホワイトノイズによる履歴吸収エネルギーの期待値 $E[E_s]$ が求められる。

また、(57)式において $A = T_d$ となるように b, c を選べば、 $0 \sim T_d$ 間の擬定常ホワイトノイズによる入力エネルギー量の期待値は、ガウス型ホワイトノイズによるそれと等しくなる。このとき b, c は次のようになる。

$$c = \frac{m}{T_d} \dots\dots\dots (64)$$

として、

$$b = \frac{1}{T_d} \sqrt{\frac{4m^3}{1-2m^2(1-\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2})\exp(-2m)}} \dots\dots (65)$$

以上のように求められる解析値の妥当性を検証するために、3-4項と同様にモンテカルロ・シミュレーションによる数値実験を行った。 $S_o=300\text{cm}^2/\text{s}^3$ 、 $T_d=10\text{s}$ として(6)式により求めたガウス型ホワイトノイズに、(64)式および、(65)式において $m=4$ ($c=0.4$, $b=1.6068$) とした確定形状関数を乗じて作成した 160個の擬定常ホワイトノイズサンプルを用いて応答計算を行い、結果を統計的に処理し、解析値と比較する。比較の対象は(48)式による全入力エネルギーに対する履歴吸収エネルギーの比率 μ

図-6 擬定常WNによる履歴吸収エネルギー

である。

比較結果を図-6に示す。スリップ型の解析値は δ_{r1} 、 ω_{o1} を δ_r 、 ω_o に固定した疑似履歴モデルによるものである。図-3の定常ホワイトノイズの場合に比べ、予測精度は若干劣るが、総じて良く一致している。

4-4 確定形状関数の選定

表-1に示す No. 1~8の地震波を用いて減衰線形1質点系の応答解析を行い、(19)式による減衰消費エネルギー率 E_d' の時刻歴波形を求める。これを始点($t=0$)、終点($t=T_d$)および各極小点で分割し、分割された各区分についてその区分内の E_d' の最大値を ed_m 、その区分を時間について積分して得られるエネルギー量を ed_i 、その区分の経過時間を td_i とする。 ed_m が(25)式の降伏エネルギー消費率 E_r' を上回るときその区分の ed_i は塑性化に寄与するものとし、 $ed_m > E_r'$ となる区分の ed_i の合計を塑性化に寄与するエネルギー E_H 、 td_i の合計を E_H が入力される時間 T_H とする。これらを擬定常ホワイトノイズによる $E[E_H]$ 、 $E[T_H]$ と比較し、両者が等しくなるような確定形状関数 $a(t)$ を定める。

各地震波は系の固有周期 T_o に応じて、次式による入力エネルギー $E_I(T_o)$ の等価速度 $V_E(T_o)$ が、

$$V_E(T_o) = \sqrt{2E_I(T_o)} \dots\dots\dots (66)$$

200kineとなるように規準化し、地盤特性フィルターの影響を排除する。このとき、 $E[E_H]$ および $E[T_H]$ の算出に際して用いる(63)式中の πS_o は、 $V_E(T_o)^2/(2T_d) = 1000 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ となる。また、(19)式中の h は振動エネルギーをできるだけ小さくするために、十分大きな値として0.2とする。

図-7 エネルギー消費率分布の比較

比較結果を図-7に示した。 E_H 、 $E[E_H]$ は全入力エネルギー E_I (20000cm²/s²)に対する比率、 T_H 、 $E[T_H]$ は全継続時間 T_d (20s)に対する比率で表示してある。同図によれば、(64)式、(65)式で $m=4\sim 5$ とした擬定常ホワイトノイズによる $E[E_H]$ および $E[T_H]$ が8種類の地震波の E_H および T_H の平均値にほぼ一致し、 $m=6$ とすれば $E[E_H]$ が E_H の上限値にほぼ一致することがわかる。

4-5 地震波による入力エネルギーの変動係数

地震波が図-4のようにガウス型ホワイトノイズと関係づけられるとすれば、地震波のフーリエ2乗振幅スペクトルは(54)式の期待値を中心として分布しているとみなせるので、フーリエ2乗振幅スペクトルを平滑化したものが近似的にその期待値になると考えられる。したがって、(54)式に相当する地震波のフーリエ2乗振幅スペクトルの期待値 $E[|Y''(i\omega_o)|^2]$ を図-8に示すように、フーリエ2乗振幅スペクトルをバンド幅1HzのParzenウィンドウによって平滑化したものとする。これを(51)式に代入して数値積分を行えば、図-9のように地震波による入力エネルギーの期待値 $E[E_I(\omega_o)]$ が得られる。

図-8 地震波の $E[|Y''(i\omega_o)|^2]$

図-9 地震波による入力エネルギーの期待値

これを用いて、表-1に示す12種類の地震波を母集団としたときの、実地震波による入力エネルギーの変動係数 $CV[E_I(\omega_o)]$ を次のように求める。

$$CV[E_I(\omega_o)] = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\bar{E}I_j(\omega_o) - 1)^2} \dots\dots (67)$$

$$\text{ここで、} \bar{E}I_j(\omega_o) = \frac{E_{I,j}(\omega_o)}{E[E_I(\omega_o)]}, k=12$$

(61)式の確定形状関数による擬定常過程の入力エネルギーの変動係数の厳密解は次のようになる⁶⁾。

$$CV_I(\omega_o) = \sqrt{\frac{c}{8(1-h^2)} \left(\frac{C_A}{C_B} + \frac{C_C + C_D - C_E}{C_F} \right)} \dots\dots (68)$$

$$\text{ただし、} C_A = 8c^2 + 9c\omega_o h + 3\omega_o^2 h^2$$

$$C_B = (c + \omega_o h)^3$$

$$C_C = 7c^5(1-2h^2)$$

$$C_D = c^3\{c(1-2h^2) + \omega_o h\}(c + 2\omega_o h)$$

$$C_E = \omega_o h(3\omega_o^2 + 8c^2 + 6c\omega_o h)(2ch + \omega_o)^2$$

$$C_F = (c^2 + \omega_o^2 + 2c\omega_o h)^3$$

また、ガウス型ホワイトノイズによる定常応答状態における入力エネルギーの分散 $V[E_I]$ は、

$$V[E_I] = \frac{\pi^2 S_o^2 t}{h\omega_o} \dots\dots (69)$$

であるので²⁾、上式および(16)式により定常ホワイトノイズによる入力エネルギーの変動係数は、

$$CV_2(\omega_o) = \frac{\sqrt{V[E_I(\omega_o)]}}{E[E_I(\omega_o)]} = \frac{1}{\sqrt{\omega_o h T_d}} \dots\dots (70)$$

エネルギーを(66)式により、等価速度に換算した場合の $CV[E_I(\omega_o)]$ 、 $CV_I(\omega_o)$ および $CV_2(\omega_o)$ を図-10に示す。なお、(68)式中の係数 c の値は4-4項の検討結果から、(64)式において $m=4$ として $c=4/20=0.2$ とした。本図によれば、厳密解 $CV_I(\omega_o)$ と $CV[E_I(\omega_o)]$ は概ね一致している。また、 $CV_2(\omega_o)$ と厳密解 $CV_I(\omega_o)$ の差は小さく、 $CV_2(\omega_o)$ を実地震波による入力エネルギーの変動係数としても実用上の問題はないと言える。

図-10 地震波による入力エネルギーの変動係数

4-6 地盤特性フィルターの伝達関数の選定

地震動による単位質量当たりの全入力エネルギー量 E_I は系の固有周期 T_o のみに依存し、系の強度および復元力特性に影響されない安定した量である。 E_I を(66)式で定義される等価速度 V_E に換算した場合、 V_E と固有周期 T_o と

の関係、すなわちエネルギースペクトルは図-11に示すように長周期領域で一定値 V_{E0} となるバイリニア近似が可能であり、設計用エネルギースペクトルにおける V_{E0} は $h=10\%$ の減衰弾性 1 質点系の入力エネルギースペクトルを包含するように設定される⁷⁾。なお、 $T_c = T_m/1.2$ 、 T_m ：地震動の卓越周期である。

図-11 設計用エネルギースペクトル

上記の事実を前提として、 $h=10\%$ 、 $T_0 \geq T_c$ の減衰線形 1 質点系への任意の地震動による入力エネルギーの等価速度換算値が V_{E0} を上回る確率は極めて小さいと考えることができる。

定常ホワイトノイズによる入力エネルギーの確率分布はガンマ分布となるが、 $\omega_0 h T_d$ が大きくなると正規分布に近づく²⁾。これを参考にして地震動による入力エネルギーの確率分布を正規分布と仮定すれば、入力エネルギーが次式によるエネルギー量を上回る確率は 0.003 となる。

$$E_{ah=0.1} = E[E_I(\omega_0)] \cdot (1 + 3 \cdot CV[E_I(\omega_0)])_{h=0.1} \quad (71)$$

この $E_{ah=0.1}$ が設計用エネルギー $V_{E0}/2$ に等しいとすれば、入力エネルギーの期待値は、

$$E[E_I(\omega_0)] = \frac{V_{E0}^2/2}{1 + 3 \cdot CV[E_I(\omega_0)]_{h=0.1}} \quad (72)$$

変動係数として (70) 式を用いれば、

$$E[E_I(\omega_0)] = \frac{V_{E0}^2/2}{1 + 3/\sqrt{0.1 \omega_0 T_d}} \quad (73)$$

上式と (56) 式を等置し、 $\pi S_0 A = V_{E0}^2/2$ とすると次の地盤特性フィルターの伝達関数を得られる。

$$|F_V(\omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + 3/\sqrt{0.1 \omega_0 T_d}} \quad (74)$$

上式は図-11中の破線のように、エネルギースペクトルが短周期領域でも一定値 V_{E0} をとるとしたときの伝達関数とみなせる。

田治見の伝達関数は次式で表され⁸⁾、

$$|F_T(\omega_0)|^2 = \frac{\omega_g^4 + 4h_g^2 \omega_g^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4h_g^2 \omega_g^2 \omega_0^2} \quad (75)$$

$T_g = 2\pi/\omega_g = 0.4s$ 、 $h_g = 0.6$ とすれば Housner の平均速度応答スペクトル⁹⁾に合う。(74)式、(75)式の伝達関数を図-12に示した。 $T_0 (= 2\pi/\omega_0) > T_g$ の領域ではいずれの伝達関数も T_0 の増加に伴って減少し、 $|F_V(\omega_0)|$ に対する $|F_T(\omega_0)|$ の比はほぼ一定の値になる。これはエネルギースペクトルが $T_0 \geq T_c$ の領域では一定値をとるこ

と対応している。すなわち、地震動によるエネルギー入力を確率的にとらえた場合、系の固有周期 T_0 が地盤の卓越周期 T_g を上回る領域では入力エネルギーの期待値は地盤特性フィルターにより、 T_0 の増加に伴いゆるやかに減少し、入力エネルギーの変動係数は逆に増加する。その結果、 $h=10\%$ の系の入力エネルギーの最大値はほぼ一定の値を示すと考えられる。

図-12 地盤特性フィルターの伝達関数

4-7 地震動による履歴吸収エネルギー

以上の考察に基づき、 $T_d = 20s$ の地震動による履歴吸収エネルギー量の上限を、定常ホワイトノイズに (61) 式の確定形状関数を乗じた擬定常ホワイトノイズによる履歴吸収エネルギーの期待値 $E[E_s]$ として予測する。

(71) 式において $E_{ah=0.1} = V_{E0}^2/2$ であるとき、任意の h を有する系で同確率で期待できるエネルギー量は次のようになる。

$$E_{ah} = \frac{1 + 3 \cdot CV[E_I(\omega_0)]}{1 + 3 \cdot CV[E_I(\omega_0)]_{h=0.1}} \cdot \frac{V_{E0}^2}{2} \quad (76)$$

$CV[E_I(\omega_0)]$ として (70) 式を用いれば、

$$E_{ah} = \frac{1 + 3/\sqrt{h \omega_0 T_d}}{1 + 3/\sqrt{0.1 \omega_0 T_d}} \cdot \frac{V_{E0}^2}{2} \quad (77)$$

ガウス型ホワイトノイズのパワースペクトル密度 S_0 は、入力エネルギーの期待値 $\pi S_0 T_d$ が (77) 式の E_{ah} と等しくなるように次式により定める。

$$S_0 = \frac{1 + 3/\sqrt{h \omega_0 T_d}}{1 + 3/\sqrt{0.1 \omega_0 T_d}} \cdot \frac{V_{E0}^2}{2\pi T_d} \quad (78)$$

確定形状関数の係数 b, c は (64) 式、(65) 式において $m=6$ として、 $c=0.3, b=1.470$ とする。

このようにして設定される擬定常ホワイトノイズによる履歴吸収エネルギーの期待値 $E[E_s]$ を 4-3 項に示す手法により求めるが、このとき、(78) 式中に h_r, ω_r が含まれているため次のような繰り返し計算を行う。①初期値 $S_0 = V_{E0}^2/(2\pi T_d)$ として計算を行い、 h_r, ω_r を求める。②得られた h_r, ω_r を (78) 式に代入して S_0 を更新し、再度計算を行い新たな h_r, ω_r を求める。以降、 S_0 が一定の値に収束するまで②を繰り返す。実際に計算すると 3 回の繰り返しで S_0 は十分に収束する。

本方法による予測値 $E[E_s]$ を地震波によるシミュレーション結果と比較し、予測精度を検証する。用いた地震波は表-1に示す No. 1～8 の地震波と 5 種類の人工地

震波であり、これらの地震波は $h=10\%$ の線形系におけるエネルギースペクトルの最大値が、第Ⅲ種地盤における設計用入力エネルギー $V_{E0}=200\text{kine}^{10)}$ となるように規

図-13 地震波にる履歴吸収エネルギー、 $V_{E0}=200\text{kine}$ 、 $T_o=0.5\text{s}$

準化した。人工地震波は(74)式による伝達関数を用い、図-4に示す方法で20波作成し、その中から系の固有周期 T_o 近傍のエネルギースペクトルの大きなものを5波選

図-14 地震波にる履歴吸収エネルギー、 $V_{E0}=200\text{kine}$ 、 $T_o=0.5\sim 0.9\text{s}$

択した。なお、スリップ型では δ_{r1} 、 ω_{o1} を δ_r 、 ω_o に固定した疑似履歴モデルを用いた。

図-13には $T_o=0.5s$ の系における予測値 $E[E_s]$ とシミュレーション値 E_s を示した。横軸は全入力エネルギー $E_I = V_{Eo}^2/2$ に対する比率で表示してある。予測値はほぼシミュレーション値の上限をとらえているが、スリップ型 $h=0.02$ は他と異なり、数は少ないが予測値を大きく上回る場合がある。図-14には T_o が $0.4s$ から $0.9s$ の系について $0.1s$ 刻みで計算し、 $E[E_s]$ と E_s の差 $E_s - E[E_s]$ の E_I に対する比率を重ね書きした。本図においても予測値はほぼシミュレーション値の上限をとらえており、スリップ型、 $h=0.02$ を除いて、 E_s の $E[E_s]$ に対する超過量は E_I の1割以下である。また、(1)式による予測値を併記した。この予測値は概ねシミュレーション値の上限をとらえているが、 α 、 h が大きい場合は過大評価となる。

5. 結語

ランダム振動論および既往の人工地震波作成手法に基づき、バイリニア型およびスリップ型の復元力特性を有する減衰弾塑性1質点系を対象として、地震動による履歴吸収エネルギーに関する検討を行った。結果は次のように要約される。

1) 振動エネルギーが0で、入力エネルギーがすべて減衰消費され、応答の振幅がレーリー分布に従うと仮定すると、消費エネルギーの時間率の期待値とその確率分布は、履歴系の塑性化の度合いに無関係に定まる。また、履歴系の応答振幅が降伏値に達する降伏エネルギー入力率は、復元力特性から定められ、塑性化に寄与するエネルギーの期待値 $E[E_H]$ およびその入力時間の期待値 $E[T_H]$ を、降伏エネルギー入力率を上回るエネルギー入力率および入力時間の期待値の累積値として求めることができる。

2) 入力がホワイトノイズの場合の履歴吸収エネルギーの期待値を、上記の $E[E_H]$ および $E[T_H]$ を用いた最小自乗法に基づく等価線形化手法により求めたが、既往の研究結果²⁾に較べ、 α 、 h の広い範囲に渡りシミュレーション値に一致することが確認できた。

3) ガウス型ホワイトノイズに確定形状関数を乗じた擬定常ホワイトノイズによるエネルギー入力率の確率分布は、確定形状関数を適当に選べば実地震波のエネルギー入力率の分布とほぼ一致させることができる。また、実地震波のエネルギー入力率の変動係数はガウス型ホワイトノイズと同等とみなせる。

4) 任意の地震波による入力エネルギーの最大値が、長周期領域における設計用エネルギースペクトル V_{Eo} を上回る確率が微小であることを条件として設定される地盤特性フィルターの伝達関数と、一般の地震波の地盤特性を表す田治見の伝達関数³⁾の比は、長周期領域において

ほぼ一定となる。このことから、設計用エネルギースペクトルを長周期領域において一定とすることの妥当性が確率論的に確認できる。

5) 上記3)、4)により、地震動によるエネルギー入力の評価に関して、ガウス型ホワイトノイズに確定的な形状関数と地盤特性フィルターを用いて得られる非定常過程を地震動の確率モデルとすることができ、同モデルに基づく履歴吸収エネルギーの予測値は、地震動による履歴吸収エネルギー量の上限を概ねとらえることができる。

地震動による履歴吸収エネルギーの上限は(1)式によっても大略上限を予測することができ、簡便である点で優れているが、本結果にみるように h および α が大きい場合は過大評価となる。履歴吸収エネルギー量は、ほぼ h および α のみに依存し、 h が大きいほど α の影響が大きくなる。前述のように低層鉄骨建築物では非構造部材の耐震効果により建物全体の h および α が増大する。このような建築物の主体構造の地震時の損傷評価について本手法は有効であると考えられる。

参考文献

- 1) 三宅辰哉、福知保長：低層建築物における非構造部材の耐震効果に関する研究 その1 非構造部材による水平力分担と減衰性の向上，日本建築学会構造系論文報告集，第462号，pp.151～160，1994.8
- 2) 洪 起，田中 尚：ホワイトノイズを受ける1自由度系の履歴吸収エネルギー，日本建築学会論文報告集，第270号，pp.99～103，昭和53年8月
- 3) 加藤 勉，秋山 宏：強震による構造物へのエネルギー入力と構造物の損傷，日本建築学会論文報告集，第235号，pp.9～18，昭和50年9月
- 4) 星谷 勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，昭和49年
- 5) 柴田明德：最新 耐震構造解析，森北出版，1981
- 6) 大井謙一，田中 尚，高梨晃一：地震動による構造物へのエネルギー入力の統計予測に関する基礎的考察，日本建築学会構造系論文報告集，第347号，pp.47～55，昭和60年1月
- 7) 秋山 宏：建築物の耐震極限設計，東京大学出版会，1980.9
- 8) 田治見宏：建築振動学，コロナ社，昭和40年
- 9) G.W.Housner:behavior of Structures during Earthquake, Proceedings, ASCE, EM4, Oct.1959
- 10) 日本建築学会：免震構造設計指針，1989.9.20，丸善

(1994年10月7日原稿受理，1995年1月20日採用決定)