形態制御トラス構造のアクチュエータ配置理論

ACTUATOR ARRANGEMENT THEORY FOR SHAPE CONTROL OF TRUSS STRUCTURE

金井 頼利*, 半谷 裕彦**
Yoritoshi KANAI and Yasuhiko HANGAI

For static and dynamic systems, shape control structure can be defined as shape of structure is controlled by actuators, etc., in order to satisfy the prescribed shape condition. The paper presents an arrangement theory of actuator. In the first part of the paper, the load-displacement relation with the constraint condition of displacement is theoretically analyzed by using the Bott-Duffin inverse and the generalized inverse to derive the actuator forces. In the second part, necessary and sufficient condition for the existence of actuator arrangement is formulated. In the third part, the arrangement theory of actuator is formulated by the coefficient matrix of the reaction-axial relation. In the final part, a numerical example is shown in order to examine the validity of the present method.

Keywords : *Homology Design, Shape Control, Generalized Inverse, Bott-Duffin Inverse, Actuator Arrangement*
ホモロジー設計, 形態制御, 一般逆行列,
ボット・ダフィン逆行列, アクチュエータ配置

1. 研究目的

構造物や機器を設計する際における最適設計問題のひとつに形態設計があり、多くの研究がなされている^{1)~5)}。形態解析を行う場合には目標となる量、あるいは目標となる形態が必要である。既往の研究の多くは、最小重量や最大剛性、あるいは一様応力や一様ひずみエネルギー密度等を目標としている。例えば岩壺等⁶⁾は、柔軟構造物の断面積の変化率およびセンサーとアクチュエータの位置を設計変数として、構造・制御系の同時最適設計法を開発している。最近では、構造物の持つ機能を目標とする形態解析も試みられている⁷⁾。著者は文献⁸⁾において、変形モードを目標とする形態解析法を提案し、さらにその構造力学的な特徴を調査した⁹⁾。これらの論文で扱った変形モード指定の形態解析では「指定された荷重下において構造、あるいは構造の一部が変形前・後において指定した形状と同一となるように構造形態を決定すること」を目標としている。このような変形はホモログス変

形と呼ばれ、ホモログス変形を目標とする形態設計はホモロジー設計と名付けられている^{10,11)}。

本論文では、形態自身を環境条件に応じて制御する「形態制御構造」を扱う。特にここでは、アクチュエータを組み込んだ構造システムを形態制御構造として取り上げ、ホモログス変形を満足する形態制御法を述べる。形態制御をアクチュエータによりおこなう場合、指定した形状(ホモログス変形)を保持するためには適当なアクチュエータの配置が必要となる。本論文では、トラス構造に対して指定した形態制御を可能とするアクチュエータの配置を理論的に求める方法を提示する。

2. 形態制御構造の課題

簡単な例を用いながら、本研究で扱う形態制御構造の研究課題を整理しておく。形態制御をおこなうトラス構造を「基本トラス」と名付ける。この基本トラスに指定した荷重 f を作用させる(図1)。この基本トラスの満足

本論文の一部は、1994年度第18回構造工学における数値解析法シンポジウム¹²⁾で発表している。

* 職業能力開発大学校 講師・工修

** 東京大学生産技術研究所 教授・工博

Lecturer, Polytechnic University, M. Eng.

Prof., Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Dr. Eng.

図 1: 基本トラス

図 2: 節点力 r とホモガス変形

すべきホモガス変形を指定する。例えば、図 1 のトラス構造で、節点 1, 2, 3 の鉛直方向変位を同一とする条件を指定する。図 1 の点線で示すように、制御を行わない基本トラスではこの条件を満足しない。そこで、ホモガス変形を満足するように外部から節点力 r を作用する。この r を作用すると変位は図 2 となり、ホモガス変形を満足する。次に節点力 r を内部に組み込んだアクチュエータで生じさせることを考える。適当に配置したアクチュエータによる節点力を R とするとき、 $r = R$ となるアクチュエータの配置を決定する (図 3)。アクチュエータを配置した節点間のトラス部材を消去したトラス構造を「消去トラス」と名付ける (図 4)。消去トラスにアクチュエータを組み込んだトラス構造を「制御トラス」と名付ける (図 5)。

以上の内容を理論的に解析するためには次の研究課題を解決する必要がある。

課題 1: ホモガス変形を満足するための節点力 r の評価

課題 2: $r = R$ となるアクチュエータの配置。

図 3: アクチュエータ配置

図 4: 消去トラス

図 5: 制御トラス

課題 3: 制御トラスの変位 u とアクチュエータ力 R の評価

3. 基礎方程式

次式で与えられる変位に関する制約条件付きの荷重-変位関係式を考える。

$$Kd = f \quad (1)$$

$$Ad = g \quad (2)$$

ここに、 K : $(n \times n)$ 型対称剛性マトリックス、 d : n 次変位ベクトル、 f : n 次荷重ベクトル、 A : $(m \times n)$ 型制約条件マトリックス、 g : n 次制約ベクトル、 n : 自由度数、 m : 制約条件数 ($m < n$ とする) である。制約条件をすべて独立であるとすると

$$\text{rank}(A) = m \quad (3)$$

A の行数とランクが一致しているので、 A はフルランクであり、次式が成立する¹²⁾。

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} \quad (4)$$

$$AA^+ = I_m \quad (5)$$

ここに、 A^+ : A の Moore-Penrose 一般逆行列、 T : 転置記号、 I_m : m 次単位行列である。式 (5) は成立するが、一般には $A^+A = I_n$ は成立しない。

式 (1), (2) は次式で与えられる変位に関する制約条件付きのポテンシャル・エネルギー関数の最小化問題と等価である。

$$\Pi = \frac{1}{2}d^TKd - f^Td \quad (6)$$

$$Ad = g \quad (7)$$

そこで、上式を Lagrange 乗数ベクトル λ を導入し、 d と λ の $(n+m)$ 個を未知量とする制約条件無しの最小化問題に変換する。その場合のポテンシャル・エネルギー関数は次式となる。

$$\Pi_k = \frac{1}{2}d^TKd - f^Td + \lambda^T(Ad - g) \quad (8)$$

d と λ の各成分で偏微分し、零とおくことにより、 d と λ を未知量とする $(n+m)$ 個の連立方程式が得られる。つまり、

$$Kd - f + A^T\lambda = 0 \quad (9)$$

$$Ad - g = 0 \quad (10)$$

上式の誘導において $K^T = K$ を利用している。ここで

$$r = A^T\lambda \quad (11)$$

と置くと、式 (9) は次式となる。

$$Kd + r = f \quad (12)$$

以上によって、式 (1), (2) で与えられる制約条件付きの問題は、式 (12), (10) で与えられる d と λ を未知量とする連立方程式の解析に帰着された。式 (5) より $AA^+ = I_m$ が成立しているから、 $(A^+)^TA^T = I_m$ となり、この式を用いる事により式 (11) は次式となる。

$$\lambda = (A^+)^Tr \quad (13)$$

上式は r が得られれば λ も計算できることを示している。ここで、 n 次ベクトル u を導入し、 d を次式で u に変換する。

$$u = d - A^+g \quad (14)$$

あるいは、

$$d = u + A^+g \quad (15)$$

上式を式 (12), (10) に代入すると

$$Ku + r = f - KA^+g \quad (16)$$

$$Au = 0 \quad (17)$$

ここで

$$h = f - KA^+g \quad (18)$$

と置くと基礎方程式は次式となる。

$$Ku + r = h \quad (19)$$

$$Au = 0 \quad (20)$$

式 (19) において r は荷重の単位を持ち、反力を意味している¹²⁾。

4. Bott・Duffin 逆行列による解析 (課題 1)

最初に u と r の直交性を示す。式 (11), (17) を用いると

$$u^Tr = u^TA^T\lambda = (Au)^T\lambda = 0 \quad (21)$$

L を n 次元空間内の部分空間とし、 $L^\perp$ を n 次元空間内の L に対する直交補空間とする。式 (21) より u と r は直交しているから

$$u \in L, \quad r \in L^\perp \quad (22)$$

となる。そこで、 P_L : L 上への正射影マトリックス、 $P_{L^\perp}$: $L^\perp$ 上への正射影マトリックス、 a : n 次元空間内のベクトルとすると次式が成立している。

$$u = P_L a, \quad r = P_{L^\perp} a \quad (23)$$

$$P_L + P_{L^\perp} = I_n \quad (24)$$

式 (23) を式 (19) に代入すると

$$[KP_L + P_{L^\perp}]a = h \quad (25)$$

上式の係数マトリックスは n 次正方マトリックスであり、非特異の場合 (安定構造の場合には成立する)、

$$a = [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1}h \quad (26)$$

上式を式 (23) に代入すると

$$u = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1}h \quad (27)$$

$$r = P_{L^\perp} [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1}h \quad (28)$$

式 (27) で

$$K_{(L)}^{(-1)} = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} \quad (29)$$

と置くと、 $K_{(L)}^{(-1)}$ は K の Bott・Duffin 逆行列と呼ばれている。 u を式 (15) に代入することにより、変位制約を持つ構造物の変位は、

$$d = K_{(L)}^{(-1)}h + A^+g \quad (30)$$

となる。

以上より、式 (1), (2) で与えられる問題の解析は P_L と $P_{L^\perp}$ の作成問題に帰着された。 P_L 及び $P_{L^\perp}$ の自動化作成法については、文献 [12] を参照して戴きたい。式 (28) が課題 1 に対する答となる。

5. 制御力 R

図 6 に示すように、デカルト座標 ($0-xyz$) を座標系として採用し、節点 i と節点 j を結ぶ直線のトラス部材を a ($a = 1 \sim e, e$: 部材数) とする。節点座標値ベクトルと方向余弦ベクトルを次式とする。

$$x_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad x_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}, \quad \lambda_a = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}_a \quad (31)$$

図 6: 節点座標

図 7: アクチュエータ力
と節点力

部材長を l_a とすれば

$$l_a = [(x_j - x_i)^T (x_j - x_i)]^{1/2} \quad (32)$$

上式を用いると方向余弦ベクトルは次式となる。

$$\lambda_a = \frac{1}{l_a} (x_j - x_i) \quad (33)$$

次に、アクチュエータを考える。図 7 に示すように節点 i 、 j を結ぶアクチュエータを b ($b = 1 \sim k$; k : アクチュエータ数) とする。アクチュエータ b に作用している軸力を n_b とし、 n_b に釣り合っている節点力を節点 i 、 j において次式とする。

$$R_{ib} = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{iz} \end{bmatrix}_b, \quad R_{jb} = \begin{bmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{jz} \end{bmatrix}_b \quad (34)$$

このとき、アクチュエータ b の釣合式は、

$$\begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} n_b = \begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix}_b \quad (35)$$

上式を全アクチュエータについてまとめると

$$Bn = R \quad (36)$$

6. アクチュエータ配置 (課題 2)

式 (2) の制約条件は全て独立とする。つまり、

$$\text{rank}(A) = m \quad (37)$$

上式より式 (2) の独立な列ベクトルは m 個である。 k 個のアクチュエータを式 (36) の係数マトリックスのランクが k となるように配置する。つまり

$$\text{rank}(B) = k \quad (38)$$

k 個のアクチュエータが指定した形状を保つに必要な節点力を確保するには $R = r$ が成立すればよい。つまり

$$Bn = r \quad (39)$$

上式を n を未知量とする連立方程式と考え、解を持つ条件式を作ると¹²⁾

$$[I - BB^+]r = 0 \quad (40)$$

ここで上式を満足するアクチュエータの個数と配置を求

めれば課題 1 は解決されることになる。

式 (39) の直接的解法として、本論文では節点力 r を基本トラスに作用し、軸力の生じた部材をアクチュエータとする方法を採用する。図 3 は r を作用したとき、軸力が零でない部材を、図 4 は軸力が零となっている部材に対応している。

7. 制御トラスの解析 (課題 3)

消去トラスの剛性マトリックスを K_d とし、アクチュエータによる制御力を R とする。このとき、次の釣合方程式と制約条件式を得る。

$$K_d d + R = f \quad (41)$$

$$Ad = g \quad (42)$$

3 章でおこなったと同様の方法によって、式 (42) の制御ベクトル g の消去手続きを行う。

$$u = d - A^+g \quad \text{又は} \quad d = u + A^+g \quad (43)$$

と置くと

$$K_d u + r = h \quad (44)$$

$$Au = 0 \quad (45)$$

ただし、 $h = f - K_d A^+g$ である。ここで R と u の直交性を示す。

$$R^T u = r^T u = (A^T \lambda)^T u = \lambda^T Au = 0 \quad (46)$$

$$= (Bn)^T u = n^T B^T u = 0 \quad (47)$$

即ち、 R と u は直交していて、かつ制約条件 $Au = 0$ と $B^T u = 0$ は等価である。従って次の基礎方程式を得る。

$$K_d u + R = h \quad (48)$$

$$B^T u = 0 \quad (49)$$

R と u は、3 章と同様の方法により下式を得る。

$$R = P_{L^\perp} [K_d P_L + P_{L^\perp}]^{-1} h \quad (50)$$

$$u = P_L [K_d P_L + P_{L^\perp}]^{-1} h \quad (51)$$

従って d , n は次式となる。

$$d = P_L [K_d P_L + P_{L^\perp}]^{-1} h + A^+g \quad (52)$$

$$n = B^+ R \quad (53)$$

$$= B^+ P_{L^\perp} [K_d P_L + P_{L^\perp}]^{-1} h \quad (54)$$

8. アクチュエータ配置の具体例

図 8 に示す 2 個のトラスを用いてアクチュエータ配置の具体例を述べる。図 8 に示すトラスにおいて、ヤング率: $2.1 \times 10^8 \text{ kPa}$, 断面積: 10 cm^2 とする。また制約条件として、上部節点の鉛直方向変位を同一とする (節点 1, 2, 3 は常に同一直線上にある)。このとき、 $dy_1 = dy_2 = dy_3$ であるから、式 (2) の係数マトリックス A 及び制約ベクトル g は次式となる。

(a) Type-1

(b) Type-2

図 8: 基本トラス

(a) Type-1

(b) Type-2

図 9: 変形図 (非制御)

(a) Type-1

(b) Type-2

図 10: 制御力 r による変形、応力図

(a) Type-1

(b) Type-2

図 11: アクチュエータ配置図

(a) Type-1

(b) Type-2

図 12: 制御トラスの変形図

(a) Type-1

(b) Type-2

図 13: 消去トラスの部材応力図

(a) Type-1

(b) Type-2

図 14: アクチュエータ力

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

荷重として、図 8 に示す荷重を作用する。図 9 に制御しない場合の変位モードを示す。この場合には節点 1, 2, 3 は制約条件を満足していないことがわかる。式 (28) を用いて r を求めると(単位: kN)、

Type-1

$$r = \begin{bmatrix} 0 & 4.78 & 0 & -9.55 & 0 & 4.78 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (56)$$

Type-2

$$r = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & -20 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (57)$$

次に r を基本トラスに作用させて、部材力を求める (図 10)。

Type-1

$$n = \begin{bmatrix} n1 & n2 & n3 & n4 & n5 & n6 & n7 & n8 & n9 \\ 0 & 0 & 4.78 & -6.75 & 0 & -6.75 & 4.78 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (58)$$

Type-2

$$n = \begin{bmatrix} n1 & n2 & n3 & n4 & n5 & n6 & n7 & n8 & n9 \\ -10 & -10 & 0 & 10\sqrt{2} & -20 & 10\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (59)$$

上式で零でない部材をアクチュエータで置き換えればよいことになるから、図 11 のアクチュエータ配置が得られる。Type-1 のアクチュエータは、全て支持節点に結合されている (外部制御)。一方 Type-2 では、アクチュエータは全て自由節点間に配置されている (内部制御)。このときの変位とアクチュエータ力を図 12 に示す。節点 1,2,3 は、同一の鉛直変位となっていることがわかる。また図 13,14 には部材応力、アクチュエータ力を示す。

9. 制御方法

アクチュエータの伸び剛性をトラス部材の伸び剛性よりも大きいものとする。式 (52) から得られた変位を用いて、アクチュエータの制御長さを求める。アクチュエータを変位制御し、この制御長さを保持することにより形態制御が可能となる。

10. 結論

本論文はアクチュエータを構造に組み込むことによって構造の形状を制御する形態制御構造を扱っている。形態制御構造では、指定した形状を保持するためのアクチュエータ配置が設計時の課題となる。本論文では、トラス構造を採用し、アクチュエータの配置を理論的に求める方法を提案した。次いで、アクチュエータ力およびアクチュ

エータの制御長さを求める理論解析法を定式化し、その結果を利用する制御方法を提示した。

参考文献

- 1) 尾田：機械構造設計の最適化手法とその応用、機械の研究、第 40 巻 6 号、1988
- 2) 梅谷：骨の形態と生長変形法、日本機械学会誌、第 79 巻 693 号、pp.749-754、1976
- 3) 中桐、野口、谷：応力に基づく構造形状の有限要素法シミュレーション、構造工学における数値解析シンポジウム、第 12 巻、pp.97-102、1988
- 4) 瀬口、多田：逆変分原理による構造物の形状決定問題、日本機械学会論文集、第 44 巻 381 号、pp.1469-1477、1978
- 5) 中村、大崎：極率半径をサブパラメータとした振動数領域に対する最適円筒状立体トラス生成法、構造工学論文集、35B、103-110、1989
- 6) 岩壺他、柔軟構造物の構造と制御系の同時最適設計法の開発、日本機械学会論文集 (C 編)、57 巻、534 号、pp.407-412、1991
- 7) 日本機械学会編：構造・材料の最適設計、技報堂出版、1989。
- 8) 半谷、関：ホモロガス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析、日本建築学会構造系論文報告集、第 405 号、pp.97-102、第 405 号、pp.97-102、1989
- 9) 半谷、原田：変位モード指定の構造形態解析法、日本建築学会構造系論文報告集、第 453 号、pp.95-100、1993
- 10) Hoerner, S. : Homologous Deformations of Tilttable Telescopes, Journal of the Structural Division, ASCE, No. ST5, 1967, pp.461-485.
- 11) 丹羽、吉川、中桐：二次曲線保持のホモロジー設計、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第 17 巻、pp.507-512、1993
- 12) 半谷、川口：形態解析、培風館、1991
- 13) 金井、半谷：変位制約を持つ構造物の動的制御、第 18 回構造工学における数値解析法シンポジウム、pp.383-388、1994

(1994年10月7日原稿受理、1995年5月24日採用決定)