ウェーブレット変換の微分方程式への適用性の研究

STUDY FOR APPLICABILITY TO DIFFERENTIAL EQUATION USING THE WAVELET TRANSFORM

佐々木 文夫*, 前田 達哉**
Fumio SASAKI and Tatsuya MAEDA

The formulation for solution of equation of motion is shown using the wavelet transform, assuming periodicity of equation system. Then, the results of the derivative of I. Daubechies and Y. Meyer's scaling functions and the connection coefficients which are necessary for solving of equation are shown, and the characteristics of these functions are discussed. Moreover, examples of the numerical calculation concerning with the initial value and boundary value problems are shown and compared with existing method, and it is clear that wavelet based method shows high accuracy.

Keywords : wavelet, differential equation, orthonormal, initial value problem, boundary value problem

ウェーブレット、微分方程式、完全正規直交性、初期値問題、境界値問題

1. はじめに

ウェーブレット変換は石油深査の一手法として、10年程前に仏の技術者J. Morletらによって考案された方法であり¹⁾、後に主として応用数学者らによってその理論が展開された^{2)~4)}。この変換は時系列データの時間領域から時間-振動数領域への写像となっており^{5), 6)}、時間と振動数の情報を不確定性関係からの制限内で求める事ができる。現在、その応用研究が画像処理^{7)~10)}、音響等^{11)~15)}様々な分野で、主としてデータ解析を中心に行われている。筆者らは3年程前から直交ウェーブレット変換を地震記録等の時系列データへ適用することを目的に、変換の基本的検討を行い、建築工学にも十分役立つ理論であることを示してきた^{6), 16), 17)}。

ところでウェーブレット変換を利用し(偏)微分方程式を数値的に解法することが可能であり、その研究も数年前から徐々に行われてきている。Basdevantらが開発した手法は、ウェーブレット粒子法(wavelet particle

method又はtravelling wavelet method)¹⁸⁾と呼ばれており、時間と空間の両方向にウェーブレット粒子をその方程式系に合わせてちりばめることによって近似解を得ようというものであり、連続ウェーブレット変換を用いている。この手法は方程式系によっては、用いるウェーブレットをある程度合わせることができること、また解が急激に変化すると予想される位置に多数のウェーブレット粒子を配置することができるなどの特徴を有しているものの、粒子が近づきすぎると得られる行列が特異になるなど、具体的にどのように操作するかに問題が残る。

一方、直交ウェーブレット変換における基底関数系の直交性を利用した数値解法も行われている。これらの手法の大部分はウェーブレットガレルキン法と呼ばれるガレルキン法に基づいた手法であり、先駆的なものとしては、Glowinskiらによる一次元線型楕円型方程式等、様々な方程式に対して数値解析を行った研究がある¹⁹⁾。彼らは与えられた方程式を変分問題に変換し、それに対して

* 鹿島情報システム部 副主査・修士(理学)
** 鹿島情報システム部 副主査・修士(工学)

Information Processing Center Kajima Corporation, Sc. M.
Information Processing Center Kajima Corporation, M. Eng.

スケール関数を用いて展開を行い、解を求めることを提案している。彼らの手法については、吉川²⁰⁾、守本²¹⁾らの解説がある。またWeissは、2次元乱流問題に対して直交ウェーブレット変換を用いて解析を行い、この手法が、他の手法に比較して安定性が良いことを指摘している²²⁾。一般にこれらの手法を直接用いると、逆行列を計算する必要性が生ずる。特に方程式系の解が低次から高次振動数まで含む場合は、大規模な行列演算が必要なため、計算時間が多くかかりこれらの手法はあまり実用的な手法とはいえない。そのため、近年いろいろな提案がなされはじめている。Dahlkeらは、方程式に対してその剛性行列が、ブロック対角となるようにウェーブレット基底を構成した²³⁾。一般にブロック対角となるためには、基底関数系の完全正規直交条件をはずす必要があるが、彼らは完全正規直交条件を少しゆるめた双直交ウェーブレット²⁴⁾によって与えられた方程式系に適した基底関数系を構成した。しかし、現在のところ単純な形の常微分方程式でのみしか構成が可能でない。ところでQianらは方程式系に周期性を仮定することによって行列計算をベクトル演算に置き換え、フーリエ変換を用いることにより実用的な計算時間で解が得られることを示した^{25), 26)}。

本報では彼らの手法に従い、一自由度系の運動方程式を例題としてウェーブレット変換を利用した微分方程式の解法を示す。また解法を行う際必要となる、スケール関数の導関数および連結係数の計算法を、DaubechiesおよびMeyerのスケール関数を用いた場合について示し、それぞれの特性を比較しこの手法を用いた際の基本的性状を明らかにする。次に初期値問題と境界値問題に関し、工学の分野でよく使われている基本的な微分方程式を例題として取り上げ、その数値計算例を示し本手法に関する精度の検討結果を示す。

2. 一自由度系の運動方程式の解法

2.1 スケール関数を用いた関数展開

ウェーブレットを $\phi(t)$ 、スケール関数を $\phi(t)$ とする。このとき、ウェーブレットおよびスケール関数によるスケール m での関数 $x(t)$ の展開は、それぞれ次のように現れる。

$$x(t) = \sum_k \tilde{a}_k 2^{m/2} \phi(2^m t - k) \quad (1)$$

$$x(t) = \sum_k \tilde{C}_k 2^{m/2} \phi(2^m t - k) \quad (2)$$

但し、 $\tilde{a}_k, \tilde{C}_k$ はスケール m でのウェーブレット ϕ 、

およびスケール関数 ϕ による展開係数
直交ウェーブレット変換の場合、ウェーブレット $\phi(t)$ およびスケール関数 $\phi(t)$ は多重解像度解析によって構成されるが、その構成法の過程で次のようなことが言える

7), 24)。

$$V_m = \bigoplus_{j \leq m-1} W_j \quad (\oplus \text{は直和})$$

$$\text{但し } V_m : \left\{ 2^{m/2} \phi(2^m t - k) : k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ で構成される} \\ L^2(\mathbb{R}) \text{ 内の関数空間}$$

$$W_j : \left\{ 2^{j/2} \phi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ で構成される} \\ L^2(\mathbb{R}) \text{ 内の関数空間}$$

これよりスケール関数 $\phi(t)$ を用いて空間 V_m で関数 $x(t)$ を近似することは、ウェーブレット $\phi(t)$ を用いて $\bigoplus_{j \leq m-1} W_j$ で近似することと同じになる。従ってあるスケールの関数の性状を検討するときにはウェーブレット $\phi(t)$ による展開が適しており、逆に一定のスケールまでの関数の性状を検討するときには、スケールを一つ一つ気にする必要のないスケール関数 $\phi(t)$ での展開が適している。本報では方程式の解を全振動数帯に渡って求める事を目的とするため、スケール関数 $\phi(t)$ を用いた関数展開による定式化を行うが、ウェーブレット $\phi(t)$ を用いた場合も全く同様に定式化が可能である。

2.2 周期性のある関数のスケール関数による展開²⁶⁾

関数 $x(t)$ を周期1秒の周期関数とし、 $[0, 1)$ 区間において等間隔に離散データが $n=2^m$ 個($\Delta t=1/2^m$)与えられているものと仮定しても一般性は失われない。ところで、

$$s = 2^m t, \quad C_k = \tilde{C}_k \cdot 2^{m/2} \quad (3)$$

とおき、式(2)を書き換えると

$$x(t) = X(s) = \sum_k C_k \phi(s - k) \quad (4)$$

となり、 $X(s)$ は周期 $T=2^m$ 秒の関数となる。また離散データが 2^m 個故、 s は離散データ上、整数値を取る。

次に $X(s)$ の周期性より展開係数 C_k は

$$C_k = C_{k \pm l n} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

となっており、(4)式は次のように書くことができる。

$$X_i = \sum_k C_k \phi(i - k) \\ = C_0 \sum_l \phi(i + l n) + C_1 \sum_l \phi(i - 1 + l n) \\ + \dots + C_{n-1} \sum_l \phi(i - (n-1) + l n) \quad (6)$$

ここで

$$X_i = X(i \cdot \Delta s) \quad (7)$$

とした。

上記関係を行列表示すると次のように表せる。

$$X = A C \quad (8)$$

$$\text{但し } X = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}^T \quad (9)$$

$$C = \{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\}^T \quad (10)$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum \phi(l_n) & \sum \phi(-1+l_n) & \sum \phi(-2+l_n) & \cdots & \sum \phi(-(n-1)+l_n) \\ \sum \phi(-(n-1)+l_n) & \sum \phi(l_n) & \sum \phi(-1+l_n) & \cdots & \sum \phi(-(n-2)+l_n) \\ \sum \phi(-(n-2)+l_n) & \sum \phi(-(n-1)+l_n) & \sum \phi(l_n) & \cdots & \sum \phi(-(n-3)+l_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \phi(-1+l_n) & \sum \phi(-2+l_n) & \sum \phi(-3+l_n) & \cdots & \sum \phi(l_n) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\Sigma = \sum_{l=-\infty}^{\infty}$$

行列Aは巡回行列となっており、ベクトルXとCの関係は合成積の性質を用いることにより、次のように表せる。

$$X = A_\phi * C \quad (12)$$

但しA_φは行列Aの第1列であり、*は離散化した合成積を表すものとする。

2.3 自由度系の運動方程式の解法

一自由度系の運動方程式の解法を示す。

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (13)$$

ここでx(t), f(t)は前章の結果をふまえて、周期1秒の周期関数とし、外力f(t)はn個の離散データで与えられているものとする。

外力項に対してもスケール関数で展開し前章と同じ操作を行う。

$$f(t) = \sum_k \tilde{g}_k 2^{m/2} \phi(2^m t - k) \quad (14)$$

$$F(s) = f(t) = \sum_k g_k \phi(s - k), g_k = \tilde{g}_k 2^{m/2} \quad (15)$$

離散化によりXと同様Fは次のように表せる。

$$F = A_\phi * G \quad (16)$$

$$F = \{F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\}^T, F_i = F(i) \quad (17)$$

$$G = \{g_0, g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}^T \quad (18)$$

次に(13)式に(4)式と(15)式を代入する。

$$2^{2m} \sum_k C_k \phi''(s - k) + 2^m C \sum_k C_k \phi'(s - k) + K \sum_k C_k \phi(s - k) = \sum_k g_k \phi(s - k) \quad (19)$$

(19)式の両辺にφ(s-j)を掛けて内積をとる。

$$\begin{aligned} & 2^{2m} \sum_k C_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi''(s - k) \phi(s - j) ds \\ & + 2^m C \sum_k C_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(s - k) \phi(s - j) ds \\ & + K \sum_k C_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s - k) \phi(s - j) ds \\ & = \sum_k g_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s - k) \phi(s - j) ds \end{aligned} \quad (20)$$

スケール関数φはV₀内で{φ(s-k); k ∈ Z}が完全正規直交基底となることより(20)式は連結係数Ω_j, Γ_jを用いて次のように書ける。

$$2^{2m} \sum_k C_k \Omega_{j-k} + 2^m C \sum_k C_k \Gamma_{j-k} + K C_j = g_j \quad (21)$$

$$\text{但し } \Omega_{j-k} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi''(s - k) \phi(s - j) ds \quad (22)$$

$$\Gamma_{j-k} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(s - k) \phi(s - j) ds, j, k \in Z \quad (23)$$

(6)式を参考にして(21)式を変形し行列表示する。

$$G = KC$$

$$\text{但し } K = \begin{bmatrix} \Theta_0 + K & \Theta_{-1} & \Theta_{-2} & \cdots & \Theta_{-(n-1)} \\ \Theta_{-(n-1)} & \Theta_0 + K & \Theta_{-1} & \cdots & \Theta_{-(n-2)} \\ \Theta_{-(n-2)} & \Theta_{-(n-1)} & \Theta_0 + K & \cdots & \Theta_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{-1} & \Theta_{-2} & \Theta_{-3} & \cdots & \Theta_0 + K \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\Theta_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (2^{2m} M \Omega_{j+l_n} + 2^m C \Gamma_{j+l_n}) \quad (25)$$

行列Kは巡回行列となっており、

$$G = K \Theta * C \quad (26)$$

$$\text{但し } K_\Theta = \{\Theta_0 + K, \Theta_{-(n-1)}, \Theta_{-(n-2)}, \dots, \Theta_{-2}, \Theta_{-1}\}^T$$

$$\text{又は } = \{\Theta_0 + K, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\frac{n}{2}}, \Theta_{\frac{n}{2}}, \dots, \Theta_{-2}, \Theta_{-1}\}^T \quad (27)$$

(12), (16), (26)式に対してフーリエ変換を行う。

$$\hat{X} = \hat{A}_\phi \cdot \hat{C}, \hat{F} = \hat{A}_\phi \cdot \hat{G}, \hat{G} = \hat{K}_\Theta \cdot \hat{C} \quad (28)$$

但し・はフーリエ変換を、・はベクトルの要素同志の掛け算を意味するものとする。

これより

$$\hat{X} = \hat{F} // \hat{K}_\Theta \quad (29)$$

但し//はベクトルの要素同志の割り算を意味するものとする。

故に運動方程式の解x(t)は(29)式により求まるX̂をフーリエ逆変換することで求まる。

解法の過程より明らかなように、他の方程式系への定式化も同様の手順で行うことができる。

2.4 境界条件を考慮した方程式の解法

境界条件はcapacitance matrix method²⁷⁾によって合わせる。(13)式の方程式が区間[a, b] (a>0)において次の境界条件を満足するものとする。

$$x(a) = \alpha, x(b) = \beta \quad (30)$$

この方程式に対しx(t)とf(t)を区間[a, b]を含む区間[0, d]に拡張しさらに、周期d秒の周期関数と仮定する。次の方程式の解w(t)を求めることを考える。

$$M\dot{w}(t) + C\dot{w}(t) + Kw(t) = D(t) \quad [0, d] \quad (31)$$

$$\text{但し } D(t) = D_a \delta(t - a) + D_b \delta(t - b) \quad (32)$$

D_a, D_bは定数でありδはデルタ関数

この解は(31)式に関するグリーン関数G(t)を用いて

$$w(t) = G(t) * D(t) = D_a G(t - a) + D_b G(t - b) \quad (33)$$

で与えられる。一般解x(t)は、特解をv(t)とすると

$$x(t)=v(t)+w(t) \quad (34)$$

と表される。(30), (33), (34)式より

$$\begin{bmatrix} G(0) & G(a-b) \\ G(b-a) & G(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - v(a) \\ \beta - v(b) \end{bmatrix} \quad (35)$$

が得る。 $G(t), v(t)$ は前章の手法により求めることができるため、 D_a, D_b は(35)式によって決定され、(33)式より $w(t)$ が求まる。さらに(34)式より一般解が計算できる。

2.5 境界ソースの変更

上述の境界条件の導入では、グリーン関数を求める際、パルスを境界上で与えることになり、境界付近での誤差が大きくなることがQianらによって指摘されている²⁵⁾。そこで、境界ソースの変更を行う。

境界ソースの変更(オフセット数) S は

$$a_1=a-S, \quad b_1=b+S \quad \text{但し } 0 < a_1 < a, \quad b < b_1 < d \quad (36)$$

のようにする。すると $D(t)$ は

$$D(t)=D_a \delta(t-a_1)+D_b \delta(t-b_1) \quad (37)$$

となり(35)式は次のように変更される。

$$\begin{bmatrix} G(a-a_1) & G(a-b_1) \\ G(b-a_1) & G(b-b_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - v(a) \\ \beta - v(b) \end{bmatrix} \quad (38)$$

2.6 初期条件を考慮した方程式の解法

2.4節の仮定の下に、次の初期条件を考える。

$$x(a) = \alpha, \quad \dot{x}(a) = \beta \quad (39)$$

この場合(36)式のようにオフセットを行うと一般に $b_1=a+S$ となるが、 b_1 は求めたい方程式の区間 $[a, b]$ の中に入ってしまうため b_1 付近での誤差がやはり大きくなることが予想される。そこでオフセット数を2つもうけ S_1, S_2 とし

$$a_1=a-S_1, \quad b_1=a-S_2 \quad (40)$$

但し $0 < S_1, S_2 < a, S_1 \neq S_2$ とする。

次に(33)式を t に関して微分することにより

$$\dot{w}(t) = D_a \dot{G}(t-a_1) + D_b \dot{G}(t-b_1) \quad (41)$$

が得られ(35)式に対応する次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} G(a-a_1) & G(a-b_1) \\ \dot{G}(a-a_1) & \dot{G}(a-b_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - v(a) \\ \beta - \dot{v}(a) \end{bmatrix} \quad (42)$$

尚 $\dot{G}(t), \dot{v}(t)$ はフーリエ領域において次式で求めると便利である。

$$\dot{G}(t)=\mathcal{F}^{-1} \left[i\omega \hat{G}(\omega) \right] \quad (43)$$

$$\dot{v}(t)=\mathcal{F}^{-1} \left[i\omega \hat{v}(\omega) \right] \quad (44)$$

但し $\mathcal{F}^{-1}$:フーリエ逆変換であり $\hat{G}(\omega), \hat{v}(\omega)$ は G, v に関する(29)式の関係より直接求める事ができる。

以上の手順より明らかなように、初めに連結係数を求めて、ファイルに保存しておけば、あとの計算はフーリエ変換と、単純な加減乗除であり、演算回数はフーリエ変換の計算手続きのオーダーとなり、高速で解を得られる

ことがわかる。

3. 連結係数の数値計算

方程式の解法から分かるように、その方程式系の階数に応じた連結係数の計算が必要となる。現在までに、完全正規直交基底となるウェーブレットはいくつか報告されているが、本論ではその性質が大きく異なりかつ広く利用されていると思われるDaubechiesとMeyerのスケール関数について、それらを用いた場合の連結係数に関する検討を行う。

3.1 Daubechiesのスケール関数による連結係数の計算

Daubechiesのスケール関数は指数 $\lambda(N)$ のHölder 連続であるため^{4), 24)}、たとえば一階の微分方程式に対しては $N \geq 3$ の、二階以上に対しては指数 $\lambda(N)$ に応じたスケール関数を用いなければならない。但し定式化の過程で弱形式に直すことによって階数を形式的に下げることがも行われている。

ところでDaubechiesのスケール関数を再分割法^{17), 21)}で求めた場合、その導関数を数値計算で求めると計算きざみにより、大きくその性状が異なる²⁸⁾。そこで本報ではスケール関数を次のようにして振動数領域で求め、連結係数の計算を行う。

$\phi(x)$ をスケール関数とすると、集合 $\{\sqrt{2}\phi(2x-k): k \in \mathbb{Z}\}$ は V_1 の完全正規直交基底となっており、従って $\phi(x)$ を V_1 で展開すると、

$$\phi(x)=\sum_k \alpha_k \sqrt{2}\phi(2x-k) \quad (45)$$

となる。Daubechiesは展開係数 α_k を陽な形で求め $N=2$ から10までを表で示している⁴⁾。ところで数列 $\{\alpha_k/\sqrt{2}\}$ のZ変換をとり単位円周上 $Z=e^{-i\omega}$ に制限した関数を $m_0(\omega)$ とする。すなわち、

$$m_0(\omega)=\sum_k \left(\alpha_k/\sqrt{2} \right) Z^k \quad (46)$$

とすると、(45)式は

$$\Phi(2\omega)=m_0(\omega)\Phi(\omega) \quad (47)$$

となる。但し Φ は ϕ のフーリエ変換である。 $\Phi(0)=1$ を考慮に入れると⁴⁾、(47)式より

$$\Phi(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\omega/2^j) \quad (48)$$

と表せる。連結係数 $\Gamma_{j-k}, \Omega_{j-k}$ の計算は、 $\Phi(\omega)$ を用いて以下のように行う。

$$\begin{aligned} \Gamma_{j-k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(s-k) \phi(s-j) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} i\omega \Phi(\omega) e^{i\omega j} \Phi^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\Phi(\omega)|^2 e^{-i\omega(k-j)} d\omega \end{aligned} \quad (49)$$

$$\Omega_{j-k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\Phi(\omega)|^2 e^{-i\omega(k-j)} d\omega \quad (50)$$

但し*：複素共役

図-1にN=7のスケール関数 $\Phi(\omega)$ と $\omega\Phi(\omega)$ 、 $\omega^2\Phi(\omega)$ の絶対値を示す。図-2には、フーリエ逆変換によって求めたスケール関数 $\phi(t)$ とその一次導関数、二次導関数を示す。尚、数値計算にあたって(48)式で $\Delta\omega \equiv 0.02$ とし、 j は $m_0(\omega/2^j)$ の値が1に十分近くなるまで求めた。N=7は2回微分がようやく可能な関数であり、そのため2回微分($\phi''(t)$)の性状はあまりよくない。図-3,4はN=11の場合のスケール関数とそのスペクトルである。N=11になると3回微分は十分可能となるため、2回微分($\phi''(t)$)の性状はN=7の場合に比較して良くなっていることが分かる。

図-5に縦軸を振動数領域でのスケール関数 $\Phi(\omega)$ の絶対値、横軸に振動数を、振動数きざみ $\Delta\omega=0.5$ で $\omega=0.5$ から1000まで計算した値を両対数軸にして示す。上からN=3,7,11のスケール関数である。図からNが大きくなるにつれて、値が早く減少していくことが判る。図中上の値をむすんでみると(図中の実線)、ほぼ直線となっている。N=3では、その直線の傾きは-1.0から-2.0の間にある。N=3はHölder 指数 $\lambda(3) \equiv 1.0878$ と、1回微分がようやく可能な関数であり、図からもほぼそのことが読み取れる。

ところでDaubechiesのスケール関数およびその導関数は時間領域でコンパクトサポートを持ち^{4), 17)}、サポート区間は $[0, 2N-1]$ である。そのため、連結係数が0でないの

表-1 連結係数 N=7(Daubechies)

k-j	Γ	Ω	k-j	Γ	Ω
-12	-5.5006E-14	-2.2183E-13	1	-8.6874E-01	2.2550E+00
-11	1.1917E-11	-1.6354E-10	2	2.8297E-01	-6.2150E-01
-10	-4.1821E-10	2.0846E-09	3	-9.0189E-02	2.2336E-01
-9	2.1871E-07	-1.4861E-06	4	2.2687E-02	-6.7052E-02
-8	1.6502E-06	1.4000E-06	5	-3.8815E-03	1.3964E-02
-7	-4.2364E-06	4.1582E-05	6	3.3734E-04	-1.6053E-03
-6	-3.3734E-04	-1.6053E-03	7	4.2364E-06	4.1582E-05
-5	3.8815E-03	1.3964E-02	8	-1.6502E-06	1.4000E-06
-4	-2.2687E-02	-6.7052E-02	9	2.1871E-07	-1.4861E-06
-3	9.0189E-02	2.2336E-01	10	4.1821E-10	2.0846E-09
-2	-2.8297E-01	-6.2150E-01	11	-1.1917E-11	1.6354E-10
-1	8.6874E-01	2.2550E+00	12	5.5006E-14	-2.2183E-13
0	0.0000E+00	-3.6045E+00			

表-2 連結係数 N=11(Daubechies)

k-j	Γ	Ω	k-j	Γ	Ω
-20	6.2598E-15	8.5869E-17	1	-9.1321E-01	2.1603E+00
-19	-8.4728E-16	-2.9034E-16	2	3.4718E-01	-6.0265E-01
-18	3.2507E-15	-6.1583E-15	3	-1.4581E-01	2.5998E-01
-17	-1.0946E-14	-5.8094E-15	4	5.6573E-02	-1.1399E-01
-16	1.8401E-14	2.4366E-13	5	-1.8962E-02	4.4443E-02
-15	3.2538E-12	3.1651E-11	6	5.2515E-03	-1.4481E-02
-14	1.1341E-10	4.7373E-10	7	-1.1503E-03	3.7747E-03
-13	-3.9152E-10	-5.4098E-09	8	1.8864E-04	-7.5295E-04
-12	-5.8896E-09	3.7270E-09	9	-2.1471E-05	1.0856E-04
-11	8.5743E-08	5.5579E-07	10	1.5617E-06	-1.0399E-05
-10	-1.5617E-06	-1.0399E-05	11	-8.5743E-08	5.5579E-07
-9	2.1471E-05	1.0856E-04	12	5.8896E-09	3.7270E-09
-8	-1.8864E-04	-7.5295E-04	13	3.9152E-10	-5.4098E-09
-7	1.1503E-03	3.7747E-03	14	-1.1341E-10	4.7373E-10
-6	-5.2515E-03	-1.4481E-02	15	3.2538E-12	3.1651E-11
-5	1.8962E-02	4.4443E-02	16	-1.8401E-14	2.4366E-13
-4	-5.6573E-02	-1.1399E-01	17	1.0946E-14	-5.8094E-15
-3	1.4581E-01	2.5998E-01	18	-3.2507E-15	-6.1583E-15
-2	-3.4718E-01	-6.0265E-01	19	8.4728E-16	-2.9034E-16
-1	9.1321E-01	2.1603E+00	20	-6.2598E-15	8.5869E-17
0	0.0000E+00	-3.4734E+00			

表-3 連結係数 (Meyer)

K-j	Γ	Ω	K-j	Γ	Ω
-20	7.7137E-04	3.2556E-04	1	-9.4885E-01	2.0989E+00
-19	-7.7153E-04	3.8671E-04	2	4.0266E-01	-5.8444E-01
-18	3.3743E-04	-1.3753E-03	3	-1.9892E-01	2.8519E-01
-17	5.9745E-04	2.3199E-03	4	9.0302E-02	-1.6285E-01
-16	-1.8934E-03	-2.7278E-03	5	-2.7722E-02	9.2773E-02
-15	3.1440E-03	2.0525E-03	6	-6.3655E-03	-4.6587E-02
-14	-3.6957E-03	1.1142E-04	7	2.1404E-02	1.5774E-02
-13	2.7762E-03	-3.7936E-03	8	-2.4117E-02	3.1495E-03
-12	2.6266E-04	8.4401E-03	9	1.9835E-02	-1.2593E-02
-11	-5.6201E-03	-1.2801E-02	10	-1.2702E-02	1.4973E-02
-10	1.2702E-02	1.4973E-02	11	5.6201E-03	-1.2801E-02
-9	-1.9835E-02	-1.2593E-02	12	-2.6266E-04	8.4401E-03
-8	2.4117E-02	3.1495E-03	13	-2.7762E-03	-3.7936E-03
-7	-2.1404E-02	1.5774E-02	14	3.6957E-03	1.1142E-04
-6	6.3655E-03	-4.6587E-02	15	-3.1440E-03	2.0525E-03
-5	2.7722E-02	9.2773E-02	16	1.8934E-03	-2.7278E-03
-4	-9.0302E-02	-1.6285E-01	17	-5.9745E-04	2.3199E-03
-3	1.9892E-01	2.8519E-01	18	3.3743E-04	-1.3753E-03
-2	-4.0266E-01	-5.8444E-01	19	7.7153E-04	3.8671E-04
-1	9.4885E-01	2.0989E+00	20	-7.7137E-04	3.2556E-04
0	0.0000E+00	-3.3939E+00			

は

$$-(2N-2) \leq j-k \leq 2N-2 \quad (51)$$

の区間のみであり、N=7の場合で25個、N=11で41個の連結係数の計算ですむことになる。すなわち、式(25)、(27)は

$$\Theta_j = 2^m M \Omega_j + 2^m C \Gamma_j \quad (52)$$

$$K_\Theta = \left\{ \Theta_0 + K, \Theta_1, \dots, \Theta_{2N-2}, 0, \dots, 0, \Theta_{-(2N-2)}, \dots, \Theta_{-1} \right\} \quad (53)$$

但し $n \geq 4N-3$ とする。

となり、大幅な計算回数の縮小となる。また先に述べたように、連結係数はその解法の過程からわかるように方程式系が決定すれば、定数(M, C, K)および外力に依存せず、求め直す必要がない。表-1, 2は連結係数を数値積分によって求めた結果である。 $\Delta\omega = \pi/12$ 、積分区間は $[-100, 100]$ で打ち切った。再分割法で求めたスケール関数を用いて連結係数を計算すると、本来 $j-k=0$ で逆対称、対称となるべき連結係数 Γ_{j-k} , Ω_{j-k} が数%の誤差で対称とならないが²⁸⁾、本法では完全に対称となることがわかる。

3.2 Meyerのスケール関数による連結係数の計算

Meyerのスケール関数とその導関数は振動数領域でコンパクトサポートを持つが^{6), 24)}、時間領域では不確定性関係よりサポート領域は $(-\infty, \infty)$ となる。そこで本報では以下の式で連結係数の計算を行った。

$$\Gamma_{j-k} = \frac{j}{2\pi} \int_{-4\pi/3}^{4\pi/3} \omega |\Phi(\omega)|^2 e^{-i\omega(k-j)} d\omega \quad (54)$$

$$\Omega_{j-k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-4\pi/3}^{4\pi/3} \omega^2 |\Phi(\omega)|^2 e^{-i\omega(k-j)} d\omega \quad (55)$$

但し $\Phi = \Phi^*$, $\text{supp } \Phi = [-4\pi/3, 4\pi/3]$ を用いた。

図-6 Meyerの連結係数 Γ の収束性 図-7 Meyerの連結係数 Ω の収束性

Meyerのスケール関数は C^∞ 級の関数であり、そのフーリエ変換 $\Phi(\omega)$ は穏やかな関数である⁶⁾。そのため式(54), (55)の数値積分に際してはその刻みを、 $\cos \omega(k-j)$ が(又は $\sin$)十分近似できる程度にして計算を行った。表-3に Γ_{j-k} , Ω_{j-k} を0から20まで示した。尚、Daubechies同様、Meyerの場合も Γ_{j-k} , Ω_{j-k} は、 $j-k=0$ を中心にそれぞれ逆対称、正対称になる。ところで、Meyerのスケール関数を用いると連結係数は理論上 $-\infty \leq j-k \leq \infty$ まで存在する。図-6, 7は連結係数の収束性について調べたものである。 Γ 、 Ω とも $j-k=20$ で約 10^{-3} 、 $j-k=100$ で 10^{-9} 程度の値となっておりほぼ同様に収束していくことがわかる。

4. 一自由度系の応答計算

4.1 自由振動応答による精度の検討

数値解法を用いる場合、その精度を検討し把握しておくことは重要なことである。一般的に数値積分法の誤差は、作用素マトリックスのスペクトル半径を用いその固有周期と時間刻みの関係から周期の伸長とみかけの減衰によって論じられる^{29), 30)}。また、数値実験を用いる場合は、初期変位または初期速度を与えたときの自由振動解で検討されることが多い^{31), 32)}。ここでは時間刻みと減衰をパラメータとして数値実験によりウェーブレット変換を用いた数値解法の特長について検討する。

解析は、一自由度系の固有周期を $T_0=0.5$ 秒($\omega=12.57$ rad/sec)に固定し、初期変位2.0を与えたときの自由振動解について、時間刻み Δt と減衰定数 h をパラメータに表-4に示すケースについて検討する。

図-8 自由振動変位時刻歴

表-4 自由振動解検討ケース

ケース名	Δt	h	$\omega \Delta t$
T02H0	0.02	0.0	0.251
T04H0	0.04	0.0	0.503
T10H0	0.10	0.0	1.257
T20H0	0.20	0.0	2.513
T02H2	0.02	0.02	0.251
T04H2	0.04	0.02	0.503
T10H2	0.10	0.02	1.257
T20H2	0.20	0.02	2.513

尚、(31)式における d は解析対象区間の2倍にとり、オフセットは変位で $S_1=7a/8$ 、速度で $S_2=3a/4$ とした。

解析に用いるスケール関数は、Daubechiesの $N=7$, $N=11$ とMeyerのものを、Meyerによる連結係数については $|j-k| \leq 100$ を用いる。

図-8は各ケースでの応答変位の時刻歴波形を(56)式の理論解とともに重ねて示したもので、図-9は計算結果の理論解に対する誤差を基準化し、縦軸を対数表示で示したものである。

$$X(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1-h^2}} e^{-h\omega t} \cos(\sqrt{1-h^2} \omega_0 t - \epsilon) \quad (56)$$

$$\epsilon = \tan^{-1} \left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \right)$$

波形から判断すると、T20H0のケースでは周期成分の伸長がみられ、そのずれは、Daubechiesのスケール関数を用いたほうが顕著である。またT20H2のケースでは振幅も大きく異なり、 $\omega \Delta t=2.513$ のケースでは解けているとは

図-9 理論解に対する基準化した誤差

いい難い。しかし、 $\omega \Delta t = 1.257$ のケースまではどのスケール関数を用いた場合にも良い結果を示しており、波形を見る限り周期の伸長、みかけの減衰はないといえる。よく使われるNewmarkの β 法($\beta = 1/4$)では $\omega \Delta t = 1.257$ で12%程度の周期誤差が見込まれることから^{29), 30)}、本法での精度の高さがいえる。一方誤差を見ると 10^{-2} のオーダーであることから各ステップで1%程度であり、問題はないといえる。また僅かではあるが減衰付きの方が精度が下がっている。 $\omega \Delta t = 0.503$ までは、どのスケール関数を用いた結果も差がないが、 $\omega \Delta t = 1.257$ である図-9(c), (g)を見ると、Daubechiesの $N=7$ の結果は時間とともに精度が悪くなっているが、 $N=11$ およびMeyerの結果は安定しているのが分かる。

4.2 他の積分法との比較

(57)式に示すような正弦波を与えたときの性状について検討する。

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } M &= 1.0 \quad C = 2h\omega M \quad K = \omega^2 M \\ h &= 0.02 \quad \omega = 12.57 \text{ rad/sec (2Hz)} \\ \Omega &= 6.283 \text{ rad/sec (1Hz)} \\ x_0 &= 0 \quad \dot{x}_0 = 0 \end{aligned}$$

$$f(t) = \begin{cases} a \sin \Omega t & t \geq 0 \quad a = 2 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

解析は、Daubechiesの $N=7, 11$ およびMeyerのケースに加え、よく用いられるDuhamel積分とNewmarkの β 法($\beta = 1/4$)について比較する。なお時間刻み Δt は0.02秒とし、継続時間は20.48秒とする。Duhamel積分は、与えられる外力の区間を線形と仮定した数値積分法を用いる。

図-10は、各積分法での応答変位波形を示したものである。図中のすべての応答値は重なっておりウェーブレットを用いた解法が強制振動に対しても、他の積分法に対して遜色ない結果を得られるものであることが分かる。また、DaubechiesとMeyerのウェーブレットの解にも差は見られない。

一般の高次の方程式の計算には、Daubechiesのスケール関数を用いるとHölder 指数の高い、すなわち N の大きなものが必要になり、サポート区間が広がるため連結係数が0でない項が増える。これらのことを考慮すると、

図-10 各積分法での変位応答変位波形

Meyerのスケール関数(ウェーブレット)を用いて計算するほうが有効と思われる。そこで、今後の解析にはMeyerのウェーブレットを用いるものとする。

4.3 Meyerのスケール関数の打ち切り誤差

Meyerのスケール関数を用いると連結係数を理論上、無限に計算する必要が生ずる。ここでは連結係数の打ち切りが解の誤差に与える影響を調べる。図-11は(58)式に示した方程式について、 $k-j$ を-100から100まで、および-20から20まで計算したときの理論解との誤差である。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } M &= 1.0 \quad C = 2h\omega \quad K = \omega^2 M \\ h &= 0.05 \quad \omega = 628.32 \text{ rad/sec (100Hz)} \\ \Omega &= 804.25 \text{ rad/sec (128Hz)} \\ x_0 &= 0.0 \quad \dot{x}_0 = 0.001 \\ f(t) &= a \sin \Omega t \\ a &= 2.0 \quad \Delta t = 2048 \text{ Hz} \end{aligned}$$

理論解の最大振幅は 10^{-5} のオーダーであり²⁸⁾、誤差は100まで計算したとき 10^{-8} で0.1%以下、20まででも 10^{-7} で1%程度の精度になっている。

4.4 ランダムな外力による応答比較

ランダム外力に対する応答は、El Centro NS成分(1940.05.18 Imperial Valley 最大値:314.14Gal)の加速度記録に対して絶対加速度応答を求め、Duhamel積分、Newmarkの β 法($\beta = 1/4$)とともに加速度応答スペクトル(応答最大加速度)により検討する。

Meyerのウェーブレットは、連結係数を-100から100まであらかじめ求めておき、それ以外は0とする。Duhamel積分は、区間を線形と仮定した台形型の数値積分を用いる。図-12は、加速度記録のきざみを原波のままの0.02として計算したものであり、図-13に加速度記録を2分割、4分割に線形補間したものを示す。本法は、Duhamel積分の結果に比べ3Hzより高い振動数で大きめの値をとることがわかるがNewmarkの β 法のように周期の伸長は見られない。また4分割に補間すると、Duhamel積分の結果とはほぼ一致することがわかる。図-14は加速度記録の補間を振動数領域で行った場合について2分割、4分割とした結果を示している。振動数領域で補間を行うと全体として結果が大きくなる傾向にあり、Duhamel積分、Newmarkの β 法とも本法の結果に近づいている傾向がある。

図-11 Meyerのスケール関数の打ち切り誤差の絶対量

図-12 加速度応答スペクトル

図-13 加速度応答スペクトル(線形補間)

図-14 加速度応答スペクトル(振動数補間)

図-16 荷重ケース(ii)の誤差

図-17 台形型の荷重

図-15 荷重ケース(i)の誤差

図-18 台形型荷重の変位分布

5. 両端固定梁の解析

種々の荷重条件下での梁や板のたわみ、反力等を求める事は重要な問題である。ここでは例として、両端固定梁の問題について示す。

この場合の方程式は次のように表せる。

$$EI d^4 u(x)/dx^4 = f(x), x \in [0, L] \quad (59)$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

$$du/dx|_{x=0} = du/dx|_{x=L} = 0 \quad (60)$$

$f(x)$: 荷重

この方程式のスケール関数による定式化は2章と同様の手順で行うことができる。この方程式に対しては

$$\Delta_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'''(s-k) \phi(s-j) ds \quad (61)$$

の計算が必要となるが、 ϕ としてMeyerのスケール関数を用い、あらかじめファイルに保存しておくこととする。また代表的な荷重として次の2ケースを与えた。

$$(i) f(x) = \sin 2\pi x/L \quad (62)$$

$$(ii) f(x) = \delta(x-L/2) \quad (63)$$

離散点は $[0, L]$ 区間で512(2^9)個とし $EI=1, L=1$ とした。尚、(ii)のケースでは、荷重を全区間で積分し1となるように、離散中心点($x=0.5$)に与えた。また、(59)式のような方程式系では外力の平均値分の補正が必要となるた

め、あとでその値を付加するものとする。

図-15, 16は(i) (ii)の外力における理論解の最大値が1になるように理論解、本法とも正規化して誤差を比較したものである。正弦波の場合で 10^{-5} 程度、集中荷重で 10^{-3} 程度の誤差であり、十分な精度で求まることがわかる。全ての荷重はこの2つのケースを基本として組合せで考えることができ、本法で任意の荷重分布が解けることがわかる。任意荷重の一例として、図-17のような台形型の荷重について変位分布を理論解とともに示したものが、図-18である。両者は図上で重なっており、数値的にも誤差が $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度の精度で求まっていることがわかる。尚、多次元問題に対しては、本法で示した1次元のウェーブレットを組み合わせることによって比較的簡単に拡張が可能である。そのため境界条件、初期条件等を考慮にいたった板の任意荷重問題や、時間的に移動する荷重問題、杭への地震入力問題等への適用の可能性もある。

6. まとめ

ウェーブレット変換の完全正規直交性と合成積の性質を利用した微分方程式の解法の定式化を示した。また解法を行う際必要となる連結係数の計算法をDaubechiesおよびMeyerのスケール関数を用いた場合について示し、そ

それぞれの数値計算結果を比較しその基本的性状を明らかにした。次に初期値問題として一自由度系の振動応答解析を行い理論解、他手法との精度の比較検討を行った。更に、境界値問題の適用例として両端固定梁の任意荷重の解析結果について検討を行った。

それらをまとめると次のように述べる事ができる。

- 1) ウェーブレット変換を利用することにより、微分方程式の解法を単純なベクトルの要素同志の割り算に帰着させることができる。
- 2) 本法にcapacitance matrix methodを用いることにより、境界条件、初期条件を考慮に入れた解法が可能である。
- 3) 本法による解法での演算回数は、フーリエ変換の計算手続きのオーダーであり、高速で解を得ることができる。
- 4) Daubechiesのスケール関数を用いる場合は連結係数の計算個数は少ないが、方程式系により用いるスケール関数を考慮する必要がある。一方、Meyerのスケール関数を用いた場合は連結係数を理論上無限個計算する必要があるが、その収束は非常に早い。
- 5) 一自由度系の振動応答を行った結果、Newmarkの β 法に見られるような周期の伸長、みかけの減衰は見られなく、高精度で結果を得ることができる。
- 6) ランダム外力に対する加速度応答スペクトルを比較すると、外力を直線補間した場合、本法はDuhamel積分の結果に近づき、外力を振動数領域で補間すると、Duhamel積分が本法に近づく傾向がある。
- 7) 両端固定梁の解析に本法を適用した結果、任意の荷重に対して実用上十分良い精度で解が得られる。

謝辞

本論の作成に際し東京大学大学院数理科学研究科の山田道夫教授、マサチューセッツ工科大学J. Williams準教授および鹿島建設(株)情報システム部の高瀬啓元博士には、貴重な御討議と御意見を頂きました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Morlet J., Arens G., Fourgeau E. and Giard D. "Wave propagation and sampling theory", Geophysics, vol.47 No.2, pp.203-236, 1982
- 2) Meyer Y. "Orthonormal Wavelets", in Wavelets, Springer, pp.21-37, 1989
- 3) Battle G. "A Block Spin Construction of Ondelettes", Communications in Mathematical Physics, vol.110, pp.601-615, 1987
- 4) Daubechies I. "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", Communications on Pure and Applied Mathematics, vol.41 No.7, pp.909-996, 1988
- 5) 山口昌哉、山田道夫「ウェーブレット解析」、科学、pp.398-405、1990年6月号
- 6) 佐々木文夫、前田達哉、山田道夫「ウェーブレット変換を用いた時系列データの解析」、構造工学論文集、Vol.38B, pp.9-20、1992年3月
- 7) Mallat S.G. "Multiresolution Approach to Wavelets in Computer Vision", in Wavelets, Springer, pp.313-327, 1989
- 8) 村木茂「ウェーブレット変換を用いたボリュームデータの近似法」、電子情報通信学会技術研究報告、IE91-81, pp.65-72、1991
- 9) Lewis A.S. and Knowles G. "Video Compression using 3D Wavelet Transforms", Electronics Letters, vol.26 No.6, pp.396-398, 1990
- 10) 太田陸「画像符号化における直交ウェーブレット」、第35回自動制御連合講演会、pp.25-30、1992年10月
- 11) Grossmann A., Kronland-Martinet R. and Morlet J. "Reading and Understanding Continuous Wavelet Transforms", in Wavelets, Springer, pp.2-20, 1989
- 12) Irino T. and Kawahara H. "Signal Reconstruction from Modified Wavelet Transform", IEEE Proceedings of ICASSP-92, 1992
- 13) 河原英紀、入野俊夫「Wavelet変換による音声の駆動源の特徴付けについて」、電子情報通信学会技術研究報告、SP91-46, pp.25-32、1991年7月
- 14) 河原英紀「ウェーブレット解析の聴覚研究への応用」、日本音響学会誌、47巻6号、pp.424-429、1991
- 15) Rioul O. and Vetterli M. "Wavelets and Signal Processing", IEEE Signal Processing Magazine, pp.14-38, October 1991
- 16) 佐々木文夫、前田達哉「ウェーブレット変換の適用性の検討(その1)、(その2)」、日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸)情報システム技術、pp.1591-1592、1992年8月
- 17) 佐々木文夫、前田達哉「データ解析におけるウェーブレット変換の基本的性状の検討」、日本建築学会構造系論文報告集、第453号、pp.197-206、1993年11月
- 18) Basdevant C., Holschneider M. and Perrier V. "Méthode des Ondelettes Mobiles", C. R. Acad. Sti. Paris, t.310 Série I, pp.647-652, 1990
- 19) Glowinski R., Lawton W.M., Ravachol M. and Tenenbaum E. "Wavelet Solution of Linear and Nonlinear Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems in One Space Dimension", Aware, INC. Technical Report, AD890527.1, pp.1-79, 1989
- 20) 吉川敦「偏微分方程式とWAVELETS」、ウェーブレット技術セミナー講演録、日本応用数理学会、1991年11月
- 21) 守本晃「ウェーブレットを用いた数値計算について」、数理科学 No.354, pp.36-43、1992年12月
- 22) Weiss J. "Wavelets and the Study of Two Dimensional Turbulence", Aware, INC. Technical Report, AD910628.1, pp.1-28, 1991
- 23) Dahlke S. and Weinreich I. "Wavelet-Galerkin Methods: An Adapted Biorthogonal Wavelet Basis", Constructive Approximation, Vol.9, pp.237-262, 1993
- 24) Daubechies I. "Ten Lectures on Wavelets", CBMS-NSF Series in Applied Mathematics 61, SIAM Publ., Philadelphia, 1992
- 25) Qian S. and Weiss J. "Wavelets and the Numerical Solution of Partial Differential Equations", Journal of Computational Physics, Vol.106 No.3, pp.155-175, 1993
- 26) Amaratunga K., Williams J., Qian S. and Weiss J. "Wavelet-Galerkin Solutions For One Dimensional Partial Differential Equation", IESL Report MIT, Order No.92-05, 1992
- 27) Proskurowski W. and Widlund O., "On the Numerical Solution of Helmholtz's Equation by the Capacitance Matrix Method", Mathematics of computation, Vol.30 No.135, pp.433-468, 1976
- 28) 佐々木文夫、前田達哉、高瀬啓元「ウェーブレット変換を用いた方程式の数値解法」、日本建築学会大会学術講演梗概集(東海)情報システム技術、1994年9月
- 29) K.J. Bathe, E.L. Wilson著、菊池文雄訳「有限要素法の数値計算」科学技術出版社
- 30) Tomas J.R. Hughes, "The Finite Element Linear Static and Dynamic finite Element Analysis" Prentice-Hall, INC.
- 31) 武藤清、高瀬啓元、上野弘道、小林俊夫「動力学における数値解析の研究」、日本建築学会大会学術講演梗概集(九州)、1972年10月
- 32) 永井亮一、正司豊「Newmarkの β 法の誤差について」、日本建築学会学術講演梗概集(東京)、1993年9月

(1994年11月10日原稿受理、1995年6月13日採用決定)