コンクリート円柱のフープ筋による拘束効果の解析

ANALYSIS OF CONCRETE CONFINEMENT BY CIRCULAR HOOPS

小 椋 紀 行*, 市之瀬 敏勝**

Noriyuki OGURA and Toshikatsu ICHINOSE

Confining effect of concrete pillar by circular hoops is analyzed assuming as follow.

1) Mohr's theory of failure is applicable to concrete under triaxial compression.

2) Stress field is given by functions so that principal stresses distribute like an onion with a core.

The equilibrium conditions are considered approximately, but not rigorously. Thus, imaginary body forces are assumed to satisfy the conditions. The functions of principal stresses are determined so that the imaginary body forces are minimized. According to the lower bound theorem, the maximum strength may be chosen as the strength of a pillar.

The pillar strength decreases as the hoop spacing increase, even if shear reinforcement ratio is the same. This tendency agrees with existing experimental results quantitatively.

Keywords : circular hoop, confining effect, triaxial compression,
imaginary body force, the lower bound theorem
円形フープ筋, 拘束効果, 三軸圧縮, 仮想物体力, 下界定理

1. 序論

コンクリート円柱の円形フープ筋による拘束効果は、能動的拘束と受動的拘束の2種類に大別できる。

能動的拘束とは、静水圧機などによって機械的にコンクリートに加えられる拘束のことである。この拘束は任意に変化させることが出来るため、三軸圧縮応力下でのコンクリートの材料特性などを調べるためによく用いられる。

また、受動的拘束とは、フープ筋などが配筋されたコンクリートが軸方向に圧縮力を受けた場合、コンクリートが横方向に膨張する事によって初めて起こる補強筋による拘束のことである。そのためコンクリートの軸ひずみが小さい時はこの拘束は小さく、軸ひずみが大きくなるに従って拘束力も大きくなる。

この受動的拘束による効果について、鈴木・中塚らのモデル¹⁾やSheikhらのモデル²⁾などの様な実験式は数多く提案されている。しかし、この拘束効果を解析的に求め

ている研究は少ない。本論では、この受動的拘束の効果について下界定理を用い三軸圧縮によるコンクリートの強度上昇を考慮に入れた解析を行った。

2. 解析仮定

2.1 仮定1: 破壊条件

三軸圧縮を受けるコンクリートは、Richartら³⁾の静水圧下での実験式（つまり、Mohr-Coulombの破壊基準）である以下の式（1）を満たすとき破壊すると仮定する。

$$\sigma_3 = m\sigma_1 + \sigma_B \quad (1)$$

σ_1 : コンクリートの第1（最小）主応力

σ_3 : コンクリートの第3（最大）主応力

m : 実験より得られる係数（本論文においては $m=4.1$ ）

σ_B : 無筋コンクリートの一軸圧縮強度

（以下圧縮を正とする。）

* 名古屋工業大学社会開発工学科 大学院生・工修

** 名古屋工業大学社会開発工学科 助教授・工博

Graduate Student, Dept. of Architecture, Nagoya Institute of Technology, M. Eng.

Associate Prof., Dept. of Architecture, Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

図1 三軸圧縮

2.2 仮定2：圧縮応力場

圧縮応力場は図2の様に鼓が積み重なったような形で存在すると仮定する。この図において、 D はコンクリート円柱の直径、 s は補強筋間隔である。また、図に示すように r 軸、 z 軸、 θ 軸をとる。具体的には圧縮応力場は、図3に示すように中央にある円筒形状の部分とその回りがあるタネギ状の部分とフープ筋付近の支圧部分からなる。本論文では、これらの応力場を順にコア部、オニオン部、支圧部と称する。この図において d_s はフープ筋の直径を示す。さらに、解析を簡略化するために図4、5に示すように前述の2つの応力場（コア部、オニオン部）のみに置き換えて解析を行う。（この詳細については付録1に記する。）ここで、図5において r_{co} は

図2 圧縮応力場

図3 応力場断面図1

図4 応力場断面図2

図5 応力場詳細図

コア部の半径、 r_{on} はオニオン部の半径、 r_0 は $D/2$ 、 z_0 は $s/2$ である。

2.2.1 第3主応力の軌跡の仮定

第3主応力 σ_3 の軌跡は図6に示す様な関数式 $J(r, z)$ を用いて表す。 $J(r, z)$ は、コア部では式(2)に示すように単に r と仮定し、オニオン部では式(3)に示すように r に関して1次関数であり z に関して2次関数で仮定する。

$$J(r, z) = r \quad (0 \leq r \leq r_{co}) \quad (2)$$

$$J(r, z) = a(r - r_{co})z^2 + r \quad (r_{co} \leq r \leq r_{on}) \quad (3)$$

ここで境界条件 $J(r_{on}, z_0) = r_0$ より、式(3)における定数 a は以下の式(4)により得られる。

$$a = \frac{r_0 - r_{on}}{(r_{on} - r_{co})z_0^2} \quad (4)$$

また、主応力の方向 $\phi(r, z)$ は式(5)で得られる。

$$\tan \phi(r, z) = \frac{\partial}{\partial z} J(r, z) \quad (5)$$

2.2.2 第1主応力の仮定

図7に座標 $(J(r, z), z)$ における第1主応力 $\sigma_1(r, z)$ の分布を表す。コア部での第1主応力 σ_1 は式(6)に示す様に係数 α_1 を用いた定数で仮定する。オニオン部においては式(7)に示すような r に関して2次関数であり、 z に関しては1次関数となる様に係数 α_1 と α_2 を用いて仮定する。

$$\sigma_1(r, z) = \alpha_1(r_{co} - r_{on}) \quad (0 \leq r \leq r_{co}) \quad (6)$$

$$\sigma_1(r, z) = \{\alpha_1 + \alpha_2(z_0 - z)(r - r_{co})\}(r - r_{on}) \quad (r_{co} \leq r \leq r_{on}) \quad (7)$$

上式(6)(7)は圧縮応力場の最外面において $\sigma_1(r, z)$ は0という境界条件を満たす。

図6 σ_3 の軌跡 図7 σ_1 の分布

2.2.3 第2, 3主応力

第2主応力 $\sigma_2(r, z)$ は、下界定理より第1主応力に等しくなる。第3主応力 $\sigma_3(r, z)$ は仮定1より式(1)で得られる。

3. 解析方法

3.1 釣合条件

図8に示すような圧縮応力場内の微小立体を用いて、3つの主応力方向(σ_1 , σ_2 , σ_3 軸方向)の釣合条件を考える。

3.1.1 断面積

図9に示す部分のような σ_1 , σ_2 , σ_3 軸に垂直な断面の断面積を各々 $dS_1(r, z)$, $dS_2(r, z)$, $dS_3(r, z)$ とし、以下の式(8)(9)(10)を用いて算出する。

$$dS_1(r, z) = 2J(r, z) \sec \phi(r, z) dz d\theta \quad (8)$$

$$dS_2(r, z) = 4 \frac{\partial}{\partial r} J(r, z) dr dz \quad (9)$$

$$dS_3(r, z) = 2J(r, z) \frac{\partial}{\partial r} J(r, z) \cos \phi(r, z) dr d\theta \quad (10)$$

3.1.2 微小立体の表面に働く力

図10(b)(c)に示す様な微小立体の $dS_1(r \pm dr, z)$ 平面に働く力、 $dF_1(r \pm dr, z)$ は式(11)により得られる。

$$dF_1(r \pm dr, z) = \sigma_1(r \pm dr, z) dS_1(r \pm dr, z) \quad (11)$$

図8 微小立体

(a) σ_1 に垂直な断面(b) σ_2 に垂直な断面(c) σ_3 に垂直な断面

図9 微小立体の断面積

(a) σ_1 に垂直な断面(b) σ_2 に垂直な断面(c) σ_3 に垂直な断面

図10 微小立体の面に加わる力

また、図10(a)(c)に示す様な微小立体の $dS_2(r, z)$ 平面に働く力、 $dF_2(r, z)$ は以下の式 (12) により得られる。

$$dF_2(r, z) = \sigma_2(r, z) dS_2(r, z) \quad (12)$$

そして、図10(a)(b)に示す様な微小立体の $dS_3(r, z \pm dz)$ 平面に働く力、 $dF_3(r, z \pm dz)$ は以下の式 (13) により得られる。

$$dF_3(r, z \pm dz) = \sigma_3(r, z \pm dz) dS_3(r, z \pm dz) \quad (13)$$

3.1.3 仮想物体力

ここで、圧縮応力場内部の全ての微小立体についての釣合条件を考えてみる。本解析方法では主応力の方向とその大きさを前述したように関数式(2)~(7)を用いて仮定しているため、全ての位置での微小立体における釣合条件を満たすような係数 α_1 、 α_2 は存在しない。そこで、図12(b)(c)より σ_1 軸方向の釣合に必要な力 Bf_1 を式(14)で、また図12(a)(c)より σ_3 軸方向の必要な力 Bf_3 を式(15)で定義する。(但し、 σ_2 軸方向は常に釣り合うのでこのような力は必要としない。)そして図11に示すようにこれらの力を成分とする力を Bf とする。以後、この力 Bf を仮想物体力と称する。

$$\begin{aligned} Bf_1(r, z) dr dz d\theta = & \{dF_1(r-dr, z) - dF_1(r+dr, z)\} \\ & + \{dF_2(r, z) \cos \phi(r, z) d\theta\} \\ & + \{dF_3(r, z-dz) + dF_3(r, z+dz)\} \frac{\partial^2}{\partial z^2} J(r, z) dz \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Bf_3(r, z) dr dz d\theta = & \{dF_1(r-dr, z) + dF_1(r+dr, z)\} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} J(r, z) dr \\ & + \{dF_3(r, z-dz) - dF_3(r, z+dz)\} \end{aligned} \quad (15)$$

3.1.4 主応力関数の決定

前述した仮想物体力による誤差 Er を以下の式 (16) で定義する。

$$Er = \iiint \{Bf_1(r, z)^2 + Bf_3(r, z)^2\} dr dz d\theta \quad (16)$$

この誤差 Er が最小となるように、先に仮定した主応力関数の係数 α_1 と α_2 を以下の偏微分方程式(17)(18)を解くことにより決定する。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} Er = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} Er = 0 \quad (18)$$

図11 仮想物体力

(a) σ_1 に垂直な断面

(b) σ_2 に垂直な断面

(c) σ_3 に垂直な断面

図12 微小立体表面に加わる力の示力図

3.2 圧縮応力場の決定

3.2.1 圧縮応力場の半径 r_{co} , r_{on} の範囲の決定

図13に示す様な $z = z_0$ の微小断面におけるせん断応力 $\tau(r)$ は式 (19) により得られる。

$$\tau(r) = \{\sigma_3(r, z_0) - \sigma_1(r, z_0)\} \sin \phi(r, z_0) \cos \phi(r, z_0) \quad (19)$$

図13の微小断面積 $dA_c(r)dr$ は式 (20) で得られる。

$$dA_c(r) dr = J(r, z_0) \frac{\partial}{\partial r} J(r, z_0) dr d\theta \quad (20)$$

前述のせん断応力 $\tau(r)$ によりフープ筋には図14に示すような分布力 Q が加わる。この Q は以下のような式 (21) で得られる。

$$Q d\theta = \int_0^{r_0} \tau(r) dA_c(r) dr \quad (21)$$

フープ筋の釣合条件を考慮すると、フープ筋の応力 σ_{s1} は以下の式 (22) で得られる。

$$\sigma_{s1} = \frac{4}{sD\rho_s} \int_0^\pi Q \sin \theta d\theta = \frac{8Q}{sD\rho_s} \quad (22)$$

ここで、 ρ_s は補強筋体積比である。

しかし、フープ筋による拘束力が仮想物体力により過大評価される可能性がある。そこで、コア部の側面位置での拘束力を考慮することにより、この場合のフープ筋の応力 σ_{s2} は以下の式 (23) で得られる。

$$\sigma_{s2} = \frac{\sigma_1(r_{co}, z)}{2\rho_s} \quad (23)$$

図13 せん断応力 τ

図14 フープ筋位置での釣合

以上により得られた σ_{s1} と σ_{s2} のいずれか大きい方をフープ筋の応力 σ_s とする。

σ_1 , σ_3 , τ は r_{co} と r_{on} の関数であるので σ_s も図15に示すような r_{co} と r_{on} の関数となる。一方、 σ_s は式 (24) に示す様にフープ筋の降伏応力 σ_y 以下でなければならない。

$$0 \leq \sigma_s \leq \sigma_y \quad (24)$$

この式 (24) より、図15の■部で示すような r_{co} と r_{on} の許容範囲が得られる。

3.2.2 一軸圧縮強度 σ_{cc} の決定

ある r_{co} と r_{on} での、座標 $(J(r, z), z)$ における軸応力 $\sigma_z(r, z)$ は以下の式 (25) により得られる。

$$\sigma_z(r, z) = \sigma_1(r, z) \sin^2 \phi(r, z) + \sigma_3(r, z) \cos^2 \phi(r, z) \quad (25)$$

この軸応力 σ_z を用いることにより $z = z_0$ 面での平均応力 σ_0 は以下の式 (26) により得られる。

$$\sigma_0 = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \sigma_z(r, z) dA_c(r) dr \quad (26)$$

ここで σ_z が r_{co} と r_{on} の関数であることから、 σ_0 も図16に示すような r_{co} と r_{on} の関数となる。そこで下界定理により、図16の■部で示すような前述した r_{co} と r_{on} の許容範囲内での σ_0 の最大値 σ_{cc} を拘束されたコンクリート円柱の一軸圧縮強度とする。

図15 フープ筋応力 σ_s と許容範囲

図16 平均応力 σ_0 と許容範囲

4. 解析結果

4.1 解析条件

解析パラメータとして、 s/D （補強筋間隔／コンクリート円柱の直径）と $\rho_s \sigma_y / \sigma_B$ （補強筋体積比×補強筋降伏強度／無筋コンクリートの一軸圧縮強度）の2つを用いて解析を行った。また、鈴木・中塚らの実験を解析対象とし、 $d_s = 9/150$ とした。本論文において以後 s/D を“補強筋間隔比”、 $\rho_s \sigma_s$ を“拘束応力”、 σ_{cc} / σ_B を“拘束効果”と称する。

4.2 解析結果

図17に拘束応力と補強筋間隔比の関係の解析結果を太線で示す。また同図に鈴木・中塚らの実験結果により得られた補強筋が降伏する範囲を点線で示す。拘束応力は図17に示すように、補強筋間隔比の小さい場合は一定の値つまり補強筋降伏時の拘束応力の値をとる。しかし、補強筋間隔比が大きい場合は拘束応力は補強筋間隔比の増加に従い減少して行く。そして、全ての $\rho_s \sigma_y / \sigma_B$ で同じ値になる。これは補強筋間隔比の小さい場合は補強筋が降伏する範囲で拘束効果が最大となり、補強筋間隔比の大きい場合は補強筋が降伏しない範囲で拘束効果が最大となることを示している。また、解析結果と実験値の降伏

図17 拘束応力と補強筋間隔比の関係

図18 コア部の半径と補強筋間隔比の関係

範囲を比較してみると、 $\rho_s \sigma_y / \sigma_B$ の値によって多少のズレがあるもののほぼ対応していることがわかる。

図18にコア部の半径 r_{co} と補強筋間隔比の関係を示す。同図において、 r_{co} は補強筋間隔比が増加するに従い単調減少し0となり、その後単調増加する。また、 $\rho_s \sigma_y / \sigma_B$ が大きいものほど、 r_{co} は小さい値をとる。

図19にオニオン部の半径 r_{on} と補強筋間隔比の関係を示す。同図において、 r_{on} は補強筋間隔比が小さい場合は単調減少するが、 r_{co} が0になった後に単調増加に転ずる。また、 $\rho_s \sigma_y / \sigma_B$ で比較した場合、 $\rho_s \sigma_y / \sigma_B$ が大きいものほど r_{on} は小さい値を取る。しかし、前述したように拘束応力は補強筋間隔比がある値を超えると同じ値をとる。これに対応して r_{on} の値も補強筋間隔比がその値を超えると同じ値になる。

図20に拘束効果 σ_{cc} / σ_B と補強筋間隔比の関係の解析結果と鈴木・中塚らの実験結果（ $\sigma_B = 330 \text{ kg/cm}^2$ ）を示す。拘束効果は図20に示すように補強筋間隔比の増加に従い単調減少する。そして、 r_{on} の場合と同様に拘束応力に対応して補強筋間隔比がある値を超えると同じ値になる。つまり、補強筋比と降伏応力の拘束効果に対する影響の頭打ちが見られる。また、解析結果と実験値を比較すると、補強筋間隔比 s/D が小さい場合、解析値が実験

図19 オニオン部の半径と補強筋間隔比の関係

図20 拘束効果と補強筋間隔比の関係

値に比べやや低い値を示しているが、全体的によく対応している。

図21に高強度コンクリートを用いた場合の解析結果と実験結果 ($\sigma_B=680\text{kg/cm}^2$) を示す。この図に示すように高強度コンクリートの場合でも普通強度の場合と同様全体的によく対応している。

図21 拘束効果と補強筋間隔の関係 (高強度)

5. 結論

- 1) 本解析により補強筋比や降伏応力による強度上昇への影響の頭打ち現象を表すことができる。
- 2) 実験値と解析値を比較した場合、両者は比較的よい対応を示す。
- 3) 圧縮応力場と破壊条件を仮定することにより、円形フープ筋による拘束効果を下界定理を用いて算定することができる。

謝辞

本論文を執筆するにあたり愛知産業大学・坂田弘安先生から御助言、御指導を賜りました。また、大阪大学・中塚信先生から貴重な実験データを送っていただきました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 鈴木計夫, 中塚信, 井上和正: 円形補強筋を用いたコンファインドコンクリートの応力・歪み特性及び同コンクリート内に配筋された圧縮軸筋の座屈性状, コンクリート構造物の靱性とその評価法に関するコロキウム, 日本コンクリート工学協会, pp. 21-32, 1988.3
- 2) Shamim A. Sheikh and Murat T. Toklucu: Reinforced Concrete Coullums Confined by Circular Spirals and Hoops, ACI Structural Journal, Vol. 90 No. 5, pp. 542-553, 1993
- 3) Richart, F. E.: Study of the Failure of Concrete under Combined

Compressive Stresses, University of Illinois Engineering Experimental Station, Bulletin, No. 185. 104 pp. 1928

付録1 (フープ筋付近の圧縮応力場)

圧縮応力場のモデル化 (本論 2. 2. 仮定 2: 圧縮応力場の仮定) において3つの圧縮領域 (コア部, オニオン部, 支圧部) を2つの圧縮領域 (コア部, オニオン部) のみに置き換えて解析をおこなった。ここではその詳細について述べる。

本論で述べたように、付図1 (本論 2. 2, 仮定 2: 圧縮応力場の図3の詳細図) に示すような圧縮応力場が形成されるとする。具体的には支圧部の応力場は付図2のようになる。この場合 EF 断面の境界条件 (せん断応力が0となる。) を満たすようにフープ筋の拘束力により支圧部内で応力の流れが変化する。しかし、この応力場モデルを用いた場合、主応力の仮定がかなり複雑なものとなる。そのため本解析方法ではこの圧縮応力場モデルを支圧部を用いない付図3に示すようなモデルを用いて解析を行う。この場合、フープ筋の拘束力を EF 断面での釣合条件を満たすようにせん断力に置き換えることにより3つの領域を用いた解析と同様の結果を得られる。

付図1 圧縮応力場詳細図

付図2 応力分布図 (支圧部有り)

付図3 応力分布図 (支圧部無し)

付録 2 (誤差による影響)

本論文では、圧縮応力場の釣合条件を満たすため仮想物体力 Bf を想定し解析を行った。そのために誤差 Er が生じた。ここでは、その誤差による影響について考察を行う。

付図 4, 5 にある条件下 ($\sigma_B = 330 \text{ kgf/cm}^2$, $\rho_s \sigma_y / \sigma_B = 0.5$, $s/D = 0.4$) の仮想物体力 Bf の r 軸方向成分 Bf_r と z 軸方向成分 Bf_z の分布を示す (Bf_r は r 軸方向を, Bf_z は z 軸方向を正とする)。付図 4, 5 に示すように, Bf_r と Bf_z はともに曲面的に分布している。つまり、釣合状態と比較した場合にフープ筋による拘束力や軸圧縮力は位置により多少異なることがわかる。

ここでこれらの仮想物体力による誤差をより把握するために、付図 6 に同条件下の解析における第 3 主応力の軌跡による切断面位置での拘束力の分布を、また付図 7 に z 軸方向の拘束効果の分布を示す。付図 6 に示すように拘束力も仮想物体力の影響のため位置により異なり、最大 7% の誤差を生ずる。ま

た、拘束効果も付図 7 に示すように、解析値として用いた値 (図中▼で示す $Z = Z_0$ の値) が最大となる放物線状の分布を示し、最大 4% の誤差を生ずる。

ここではある特定の条件下での解析結果を示したが他の条件下での解析もほぼ同様の傾向を示している。

以上のように仮想物体力による誤差の個々の影響について述べてきたが、ここで全体的に把握するために式 (16) で得られる誤差 Er を用いて仮想物体力による影響 BEr を以下の式 (27) で定義する。

$$BEr = \frac{\sqrt{Er}}{\sigma_B \pi_0^2} \quad (27)$$

付図 8 に BEr と補強筋間隔比の関係を示す。この図に示すように補強筋比や降伏応力や補強筋間隔によりその値は多少変化する。しかし、全て 1% も満たない値となる。このことから仮想物体力による影響は全体としては許容範囲内であるといえる。

付図 4 r 軸方向の仮想物体力 付図 5 z 軸方向の仮想物体力

付図 6 フープ筋の拘束力の分布

付図 7 拘束効果の分布

付図 8 誤差の分布

(1994年12月10日原稿受理, 1995年6月22日採用決定)