高層平面フレームの近似振動解析

AN APPROXIMATE VIBRATION ANALYSIS OF HIGH-RISE PLANE FRAMES

千葉正裕*, 倉田光春**, 池田昭男**

Masahiro CHIBA, Mitsuharu KURATA and Akio IKEDA

This paper proposes a new method for reducing the degree-of-freedom and node in vibration analysis of high-rise plane frames in earthquakes. A theory of the reduction of stiffness and mass matrices in the equation of motion is also established for the proposed method. A finite element model reducing the degree-of-freedom and node by the method are analyzed. The analyzed results of the deformation and member forces of the model are approximate to the exact solution. In conclusion, the proposed method is available for the approximate vibration analysis of high-rise buildings.

Keywords : vibration analysis, finite element method, reduction of dynamic matrices, earthquake response

振動解析, 有限要素法, 動的マトリックス縮小, 地震応答

1. 序 論

近年, 敷地の制約や使用目的などにより, 平面形・立面形が複雑な建物や不連続な剛性および強度分布を持つ建物が多くなってきている。また, 鉄筋やコンクリートの高強度化, 施工技術の向上に伴い, 超高層鉄筋コンクリート造建物などが数多く建設されている。このような建物の振動性状を忠実に把握することは, 簡便なモデルによる振動解析では難しく, かつ部材レベルでの詳細な変形状態および応力状態を把握することはできない。また, 許容応力度設計法から終局強度型設計法へと移行しつつある現在では, 地震時における各部材の詳細な応力状態を把握することが必要であり, 急務となっている。

一方, 有限要素モデルを用いた振動解析は, 建物の詳細な振動性状の把握を可能にするものであるが, 未知数が膨大になるため, 解析が非常に困難になる。

既往の論文では, 骨組構面を薄板あるいは立体高層骨組を1本の薄肉はりなどの連続体に置換し, 未知数の低

減が行われている。例えば, 富沢と小西^{1)~3)}は, 武藤のD値法を拡張し, 柱の伸縮を考慮したラーメンを薄板に, 加藤⁴⁾は, 骨組をエネルギー的に等価な連続体に置換している。また, 日置^{5), 6)}らは, 耐震壁を含む高層架構を1本の棒に置換している。最近では, 藤井と藤谷^{7), 8)}が立体高層骨組を1本の薄肉はりに置換している。しかし, 建物の局所的な変形を連続体で精度よく置換することは難しく, そのためには連続体の変形仮定が複雑となる。連続体置換とは別に, 加藤⁹⁾らは, 有限要素法を用いた骨組構面の一部を取り出し, 各節点変位をエネルギー的に等価な代表節点の変位に置換し, 未知数の低減を行っている。これは, 建物の局所的な変形が, 建物の主要な変形に対して影響が少ないと仮定することにより可能となる。また, Guyanの静的縮小法^{10), 11)}は, 運動方程式中の動的な項を無視することで未知数を低減するものであるが, その適用によっては, 誤差を多く含む結果となる。したがって, 既往の論文では, 層レベルでの変形

本論文の一部は, 参考文献12), 15)~17)で発表している。

* 日本大学工学部建築学科 講師・工修

** 日本大学工学部建築学科 教授・工博

Lecturer, Dept. of Architecture, College of Engineering, Nihon Univ., M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture, College of Engineering, Nihon Univ., Dr. Eng.

および応力に対しては、比較的よい精度が得られているが、部材レベルでの変形および応力に対しては、よい精度が得られていない。

以上の背景を踏まえて、本論文では、運動方程式中の動的な項を無視することなく、建物の局所的な変形を精度よく低減できる『動的縮小法』を提案する。さらに建物の挙動を支配する主要な変形に対しては、簡単な変形仮定のモードで置換し、未知数を低減するものである。この2つの方法を組み合わせることにより、大幅な未知数の低減が可能となり、精度のよい簡便な解析法となる。なお、本解析法は未知数の低減が行えると同時に、低減されたモデルの解析結果を低減前の全未知数まで復元することが可能である。

本解析法は、建物の立体振動解析に適用すべく開発したものである。しかし、本論文では厳密解との比較が可能な高層平面フレームモデルに対してその有効性を検討する。なお、高層平面フレームモデルにおける梁および柱部材は、全て有限要素法に基づく線材要素とし、剛性に関する要素の変形は、軸変形および曲げ変形、質量に関しては、分布質量を用いた。この線材要素で組まれた高層平面フレームモデルの全未知数に対して、振動解析した結果を厳密解とする。これに対し、動的縮小法およびモード置換を用いて未知数を低減したモデルの振動解析結果を近似解とする。振動解析は、固有値解析、地震応答解析および地震時応力解析とし、部材レベルにおける変形および応力について精度検討を行う。

2. 動的縮小法¹²⁾

2.1 主変位に関する運動方程式

一般に運動方程式は(1)式で表され、主変位を $\ddot{\delta}_1, \dot{\delta}_1, \delta_1$ 、従変位を $\ddot{\delta}_2, \dot{\delta}_2, \delta_2$ （ただし、 $\delta_1 \gg \delta_2, \dot{\delta}_1 \gg \dot{\delta}_2, \ddot{\delta}_1 \gg \ddot{\delta}_2$ ）とすると(2)式を得る。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 $[M]$ ：質量マトリックス

$[C]$ ：減衰マトリックス

$[K]$ ：剛性マトリックス

$\{F\}$ ：外力ベクトル

$\{\ddot{\delta}\}$ ：相対加速度ベクトル

$\{\dot{\delta}\}$ ：相対速度ベクトル

$\{\delta\}$ ：相対変位ベクトル

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \{\ddot{\delta}_0\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $\{\ddot{\delta}_0\}$ ：入力加速度ベクトル

(2)式の第2式より δ_2 について解き、時間 t で2回および1回微分し、時間 t の3階以上の高階微分を含む項は、他に対して十分小さいと仮定すると(3)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_2 &= -K_{22}^{-1} K_{21} \ddot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 &= -K_{22}^{-1} (C_{21} \dot{\delta}_1 + C_{22} \dot{\delta}_2 + K_{21} \delta_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

(3)式の第1式を(3)式の第2式に、さらに(2)式の第2式に代入すると(4)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_2 &= -K_{22}^{-1} K_{21} \ddot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 &= -K_{22}^{-1} \tilde{C}_2 \dot{\delta}_1 - K_{22}^{-1} K_{21} \delta_1 \\ \delta_2 &= -K_{22}^{-1} \{ (\tilde{M}_2 - C_{22} K_{22}^{-1} \tilde{C}_2) \dot{\delta}_1 + \tilde{C}_2 \delta_1 + K_{21} \delta_1 + M_{21} \delta_0 \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $\tilde{M}_2 = M_{21} - M_{22} K_{22}^{-1} K_{21}$

$$\tilde{C}_2 = C_{21} - C_{22} K_{22}^{-1} K_{21}$$

(4)式を(2)式の第1式に代入すると(5)式を得る。

$$\tilde{M} \ddot{\delta}_1 + \tilde{C} \dot{\delta}_1 + \tilde{K} \delta_1 = \tilde{F} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $\tilde{M} = \tilde{M}_1 - K_{12} K_{22}^{-1} \tilde{M}_2 - \tilde{C}_2^T K_{22}^{-1} \tilde{C}_2$

$$\tilde{C} = \tilde{C}_1 - K_{12} K_{22}^{-1} \tilde{C}_2$$

$$\tilde{K} = \tilde{K}_1$$

$$\tilde{F} = -\tilde{M}_1^T \ddot{\delta}_0$$

ただし、 $\tilde{M}_1 = M_{11} - M_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$

$$\tilde{M}_1^T = M_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} M_{21}$$

$$\tilde{C}_1 = C_{11} - C_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$$

$$\tilde{C}_2^T = C_{12} - K_{12} K_{22}^{-1} C_{22}$$

$$\tilde{K}_1 = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$$

したがって、(5)式は主変位 $\ddot{\delta}_1, \dot{\delta}_1, \delta_1$ に関する運動方程式となる。

2.2 従変位の誘導

(2)式の第1式より δ_1 について解き、第2式に代入し、 δ_2 について解くと(6)式を得る。

$$\delta_2 = \tilde{K}_3^{-1} (\tilde{M}_3 \ddot{\delta}_2 + \tilde{C}_4 \dot{\delta}_1 + \tilde{C}_3 \dot{\delta}_2 + \tilde{K}_4 \delta_1) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $\tilde{M}_3 = -M_{22} + M_{21} M_{11}^{-1} M_{12}$

$$\tilde{C}_3 = -C_{22} + M_{21} M_{11}^{-1} C_{12}$$

$$\tilde{C}_4 = -C_{21} + M_{21} M_{11}^{-1} C_{11}$$

$$\tilde{K}_3 = K_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} K_{12}$$

$$\tilde{K}_4 = -K_{21} + M_{21} M_{11}^{-1} K_{11}$$

(6)式を時間 t で4回～1回微分し、時間 t の5階以上の高階微分を含む項は、他に対して十分小さいと仮定すると(7)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_2 &= \tilde{K}_3^{-1} \tilde{K}_4 \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 &= \tilde{K}_3^{-1} (\tilde{C}_4 \ddot{\delta}_1 + \tilde{C}_3 \ddot{\delta}_2 + \tilde{K}_4 \ddot{\delta}_1) \\ \ddot{\delta}_2 &= \tilde{K}_3^{-1} (\tilde{M}_3 \ddot{\delta}_2 + \tilde{C}_4 \dot{\delta}_1 + \tilde{C}_3 \dot{\delta}_2 + \tilde{K}_4 \delta_1) \\ \dot{\delta}_2 &= \tilde{K}_3^{-1} (\tilde{M}_3 \ddot{\delta}_2 + \tilde{C}_4 \dot{\delta}_1 + \tilde{C}_3 \dot{\delta}_2 + \tilde{K}_4 \delta_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $\ddot{\delta}_1, \ddot{\delta}_1$ は(5)式で求められた主変位 $\ddot{\delta}_1$ を用いて、(8)式に示す差分式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_1(t) &= \frac{1}{2\Delta t} \{ \ddot{\delta}_1(t+\Delta t) - \ddot{\delta}_1(t-\Delta t) \} \\ \ddot{\delta}_1(t) &= \frac{1}{2\Delta t} \{ \ddot{\delta}_1(t+\Delta t) - \ddot{\delta}_1(t-\Delta t) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

したがって、従変位 $\dot{\delta}_2, \dot{\delta}_2, \delta_2$ は(5)式で求められた主変位 $\dot{\delta}_1, \dot{\delta}_1, \delta_1$ を用いて(6)式、(7)式より求められる。

3. 平面梁モード¹²⁾

図-1に示すように平面梁材軸上任意点の材軸方向変位 u を x の1次関数、たわみ方向変位 v を x の3次関数、平面梁材軸の回転角 θ_z をたわみ v の1階微分、平面梁法線の回転角を β_z とし、せん断変形($\gamma = \theta_z + \beta_z$)を x の1次関数で与えられるものとする(9)式を得る。

図-1 平面梁内任意節点変位と平面梁材端節点変位

$$\begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \\ \theta_{zk} \\ B_{zk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2x & -3x^2 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ v_j \\ \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \beta_{zi} \\ \beta_{zj} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 x, y は平面梁内任意節点 k の x, y 方向座標値、 l は平面梁スパンである。

したがって、平面梁内任意節点 k の変位 $U_k, V_k, \theta_{zk}, B_{zk}$ ($k=1, 2, \dots, n$)は平面梁材端節点変位 $u_i, u_j, v_i, v_j, \theta_{zi}, \theta_{zj}, \beta_{zi}, \beta_{zj}$ で表すことができる。

4. 解析モデル

図-2に示すように解析モデルは、床板の質量および剛性、部材の鉄筋を考慮しない純フレーム構造の25階建鉄筋コンクリート造高層平面フレームモデルとした。

表-1 各部材断面寸法

部 材	階	断面寸法(mm)
梁	R階～21階	500× 750
	20階～16階	550× 750
	15階～11階	550× 800
	10階～ 6階	600× 800
	5階～ 3階	600× 900
	2階	600×1000
柱	25階～15階	800× 800
	14階～ 7階	850× 850
	6階～ 1階	900× 900
基礎梁	1階	900×4500

図-2 解析モデル

表-1に各部材断面寸法を示す。コンクリートは高強度コンクリートとし、設計基準強度を図-2中に示す。各部材の材料定数は、ポアソン比1/6、単位体積重量2.4 tf/m³とし、ヤング係数は、日本建築学会編「鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説」¹³⁾に基づき算出した。

5. 未知数の低減方法

未知数の低減は、図-3に示すように水平変位に関しては、各層ごとにフレームの中央に代表節点を設け、各層に存在する節点の水平変位 V_{ki} を代表節点の水平変位 $\tilde{V}_k$ と梁部材のひずみにより表現すると(10)式を得る。

$$V_{ki} = \tilde{V}_k + \sum_{m=0}^i \varepsilon_{km} \ell_{km} \quad (i = -n, -n+1, \dots, -1, 1, \dots, n-1, n) \quad \dots (10)$$

ここに、 V_{ki} : k 層 i 節点における水平変位

$\tilde{V}_k$: k 層代表節点における水平変位

ε_{km} : k 層 $m - \frac{m}{|m|}$ 節点と m 節点間のひずみ

ℓ_{km} : k 層 $m - \frac{m}{|m|}$ 節点と m 節点間の材長

上下変位に関しては、各通りごとの最下層柱脚に代表節点を設け、水平変位と同様に、各通りに存在する節点の上下変位を柱部材のひずみにより表現する。これは、従変位を動的縮小法で消去する際、変位レベルよりひずみレベルの方が主変位に対して十分小さくなるため、より精度が向上するからである。したがって、回転角の項および各部材のひずみの項は、代表節点の水平変位の項

に対して十分小さくなると仮定し、動的縮小法により消去する。次に、前述の平面梁モードを用いて、各層に存在する代表節点の水平変位を平面梁材端節点変位で表し未知数を低減する。なお、代表節点はフレームの中央すなわち平面梁材軸上に存在するため、(11)式に示すように(9)式のたわみ方向変位を用いることになる。したがって、(11)式に各層における代表節点の x 方向座標値を代入することにより、各層の代表節点の水平変位 $\tilde{V}_k$ は、平面梁材端節点変位 $v_i, v_j, \theta_{zi}, \theta_{zj}$ で表すことができ、未知数が低減される。

$$\tilde{V}_k = [1 \ x_k \ x_k^2 \ x_k^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad \dots (11)$$

ここに、 ℓ : 平面梁材端の i 節点と j 節点間の距離

本解析モデルにおける未知数低減前のモデルは、各節点ごとに水平変位、上下変位および回転角の3自由度を有している。したがって、低減前の未知数は450となる。このモデルに対して、前述のひずみによる表現および動的縮小法を用いて、未知数の低減を行うと、解析モデルは各階の代表節点の水平変位で表され、解析モデル全体の未知数は25となる。さらに、図-2に示すように高次モードおよび境界の影響を考慮して4本の平面梁モードで置換し、代表節点の水平変位を平面梁材端節点変位で表し、5節点に低減する。したがって、低減後の未知数は、平面梁材端節点の水平変位および回転角の9となり、未知数低減前に対して2%となる。

図-3 未知数の低減モデル

6. 解析結果

6.1 固有値解析

固有値解析は、バイセクション法を用いて行い、未知数低減前のモデルおよび未知数低減後のモデルの非減衰自由振動方程式からそれぞれの固有周期を求めた。表-2に厳密解および近似解の1次～4次固有周期を示す。高次で多少の相違が見られるが、よく一致している。

表-2 各次固有周期 (秒)

次数	厳密解	近似解
1次	0.820	0.820
2次	0.287	0.287
3次	0.165	0.164
4次	0.117	0.115

6.2 地震応答解析

地震応答解析は、モーダルアナリシスによらず、時刻歴の直接応答として、線形加速度法を用いて行った。解析時間間隔 Δt は1/1000秒とし、入力地震動のデータを線形補間して解析に用いた。減衰は剛性に比例する内部粘性減衰とし、1次固有振動数に対して、減衰定数を5%とした。入力地震動¹⁴⁾は、設計によく用いられているEL CENTRO NS, TAFT EW, HACHINOHE NS, THO30-1FL NSの4種類を各部材の応力が弾性内になるように最大加速度を50galに基準化して用いた。以上の入力地震動を用い、未知数低減前のモデルおよび未知数低減後のモデルに対して解析を行い、全節点にお

ける絶対加速度、相対加速度、相対速度および相対変位の水平成分、上下成分および回転成分の時刻歴応答を求めた。ここで、近似解の精度検討の1つとして、得られた近似解の全節点における各時刻歴応答の最大値を厳密解のそれと比較する。表-3に全節点中で最も誤差の大きい節点での誤差をそれぞれの最大誤差として示す。最大誤差は、全て5%以内であり、非常によい精度が得ら

表-3 各入力地震動の各最大応答値の最大誤差(%)

地震動		水平成分	上下成分	回転成分
EL CENTRO NS	絶対加速度	0.83	----	----
	相対加速度	0.78	4.55	4.71
	相対速度	0.79	0.05	3.40
	相対変位	0.63	0.17	3.11
TAFT EW	絶対加速度	0.30	----	----
	相対加速度	0.80	0.95	3.56
	相対速度	0.59	0.06	3.23
	相対変位	0.63	0.12	3.18
HACHINOHE NS	絶対加速度	0.29	----	----
	相対加速度	4.71	0.72	4.06
	相対速度	0.74	0.17	3.43
	相対変位	0.66	0.06	3.25
THO30-1FL NS	絶対加速度	0.25	----	----
	相対加速度	4.71	0.55	3.64
	相対速度	0.63	0.11	3.23
	相対変位	0.60	0.13	3.14

図-4 最大水平相対変位時(5.78秒)におけるフレーム全体変形
〔入力地震動：EL CENTRO NS〕

図-5 最上階隅部における相対変位の時刻歴応答波形〔入力地震動：EL CENTRO NS〕

れた。図-4にEL CENTRO NS地震動入力における最大水平相対変位時(5.78秒)のフレーム全体変形を厳密解は実線、近似解は破線で示す。厳密解および近似解のフレーム全体変形は完全に一致している。また、図-5に最上階隅部における厳密解および近似解の相対変位の水平成分、上下成分および回転成分の時刻歴応答波形を示す。厳密解および近似解とも同時刻で最大値を示しており、振幅、位相特性もよく一致している。

6.3 地震時応力解析

地震応答解析より得られた厳密解および近似解の絶対加速度、相対速度および相対変位を用いて、全部材材端の軸力、せん断力および曲げモーメントの時刻歴応答を求めた。ここで、近似解の精度検討の1つとして、得られた近似解の全部材材端における各時刻歴応答の最大値を厳密解のそれと比較する。なお、比較は各時刻歴応答の最大値が、部材の位置により大きく異なるため、厳密解の梁および柱部材別の軸力、せん断力および曲げモーメントの各最大応力値に対して行う。表-4に全部材材端中で最も誤差の大きい部材材端での誤差をそれぞれの最大誤差として示す。最大誤差は、全て8%以内であり、

非常により精度が得られた。図-6にEL CENTRO NS地震動入力における最大水平相対変位時(5.78秒)のフレーム全体の軸力、せん断力および曲げモーメントを厳密解は実線、近似解は破線で示す。厳密解および近似解のフレーム全体の軸力、せん断力および曲げモーメントはよく一致している。また、図-7に1階隅柱柱脚における厳密解および近似解の軸力、せん断力および曲げモーメントの時刻歴応答波形を示す。厳密解および近似解とも、同時刻で最大値を示しており、振幅、位相特性もよく一致している。

表-4 各入力地震動の各最大応答値の最大誤差(%)

地震動	部材	軸力	せん断力	曲げモーメント
EL CENTRO NS	梁	3.44	2.75	2.78
	柱	0.17	7.02	5.31
T A F T EW	梁	4.02	3.12	3.15
	柱	0.26	7.98	6.07
HACHINOHE NS	梁	3.67	2.52	2.46
	柱	0.21	6.37	4.69
THO30-1FL NS	梁	3.60	2.62	2.62
	柱	0.23	6.62	4.98

図-6 最大水平相対変位時(5.78 秒)におけるフレーム全体応力〔入力地震動: EL CENTRO NS〕

7. 結 論

本論文で提案した動的縮小法およびモード置換を用いることにより、低減後の未知数は、低減前に対して2%となり、大幅な未知数の低減が可能となった。固有値解析より得られた厳密解および近似解の固有周期は、よい一致を示した。地震応答解析より得られた厳密解および近似解の全節点における各時刻歴応答の最大値から、厳

密解に対する近似解の最大誤差は、全て5%以内、また、地震時応力解析より得られた厳密解および近似解の全部材材端における各時刻歴応答の最大値から、厳密解の各最大応力値に対する最大誤差は、全て8%以内であり、非常により精度が得られた。さらに、地震応答解析に要する解析時間は、縮小および復元を含めて、未知数低減前の約1/6とかなりの時間短縮がなされた。

したがって、建物の立体振動解析に適用可能な本解析法は、少ない未知数で低減前の局所的な変形や部材レベ

ルでの応力を精度よく求めることができ、非常に有効な解析法である。

図-7 1階隅柱柱脚における応力の時刻歴応答波形〔入力地震動：EL CENTRO NS〕

参考文献

- 富沢 稔, 小西義昭: 柱の伸縮を考慮した多層多張間立体ラーメンの SHEAR-LAG-ANALOGY による近似理論-その1. D値法よりの拡張-, 日本建築学会論文報告集, 第139号, pp. 11-21, 1967.9
- 富沢 稔: 歪エネルギーの凍結解凍の方法による柱伸縮ラーメンの近似解法(その1のI), 日本建築学会論文報告集, 第157号, pp. 27-31, 1969.3
- 富沢 稔: 歪エネルギーの凍結解凍の方法による柱伸縮ラーメンの近似解法(その1のII), 日本建築学会論文報告集, 第158号, pp. 27-33, 1969.4
- 日本建築学会編: 建築構造物の応力解析, 丸善, pp. 125-145, 1977
- 日置興一郎, 山中邦一, 北野博己: 反り変形を考えた棒理論による高層架構の解析-その1. 弾性静力学-, 日本建築学会論文報告集, 第253号, pp. 51-57, 1977.3
- 日置興一郎, 北野博己: 反り変形を考えた棒理論による高層架構の解析-その2. 弾性自由振動-, 日本建築学会論文報告集, 第257号, pp. 31-38, 1977.7
- 藤井大地, 藤谷義信: 薄肉はり理論にもとづく立体高層骨組の有限要素解析法-薄肉はり置換法による高層ビルの構造解析に関する研究(その1)-, 日本建築学会構造系論文報告集, 第453号, pp. 65-75, 1993.11
- 藤井大地, 藤谷義信: 薄肉はり置換法の実務構造設計への適用に関する検討-薄肉はり置換法による高層ビルの構造解析に関する研究(その2)-, 日本建築学会構造系論文集, 第467号, pp. 45-53, 1995.1
- 加藤史郎, 菖蒲谷和孝, 渡 祥弘: ポテンシャルエネルギー最小の原理に基づき自由度を低減した骨組構造の解析, 構造工学論文集, Vol.41B, pp. 171-178, 1995
- Guyan, R. J.: Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal, Vol.3, No.2, p. 380, 1965
- 長松昭男, 大熊政明: 部分構造合成法, 培風館, pp. 73-75, 1991
- 倉田光春: マトリックス構造解析法に関する一考察-マトリックスの縮小法-, 日本大学工学部学術研究報告会講演要旨集, 第35回, pp. 155-158, 1992
- 日本建築学会編: 鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説, 丸善, pp. 5-6, 1993
- 高層建築物構造評定委員会: 高層建築物の動的解析用地震動について, ビルディングレーター, pp. 49-50, 1986.6
- 千葉正裕, 池田昭男, 倉田光春: 建物の近似立体振動解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集B, pp. 391-392, 1993
- 千葉正裕, 倉田光春, 松澤美広: 建物の近似立体振動解析-平面フレームの地震時応力の検討-, 日本建築学会大会学術講演梗概集B, pp. 693-694, 1994
- 千葉正裕, 倉田光春, 松澤美広: 建物の近似立体振動解析-高層平面フレームの地震時応力-, 日本大学工学部紀要A, 第36巻, pp. 103-114, 1995

(1995年5月1日原稿受理, 1995年8月15日採用決定)