鋼製部分球形殻の弾塑性座屈耐力に関する解析的研究

NUMERICAL STUDY OF ELASTIC-PLASTIC BUCKLING STRENGTH OF STEEL SPHERICAL CAPS

千葉義尚*, 加藤史郎**
Yoshinao CHIBA and Shiro KATO

The main aim of this paper is to present several "elastic-plastic buckling strength" of uniformly pressurized perfect and imperfect steel spherical caps by using F.E.M. with updated Lagrangian Jaumann stress (co-rotational stress) rate formulation. Numerical examples include asymmetrically imperfect caps. Through parametric studies, the elastic-plastic buckling characteristics, especially stress distributions and yieldings are also illustrated. Numerical results are normalized and plotted against slenderness parameters. The knockdown factors are also examined by giving inward dimple type imperfections and asymmetric pie-shaped imperfections. A comparison is made, in view of buckling stresses, with the values given by buckling strength curves in the codes and with past experimental and analytical results.

Keywords : *sphericap cap, elastic-plastic buckling, updated Lagrangian*

Ahmad Shell element, co-rotational stress, buckling strength curve

部分球形殻、弾塑性座屈、updated Lagrangian、Ahmad Shell 要素、共回転応力、座屈耐力曲線

1. 序

既往の研究： 薄肉殻の座屈に関しては膨大な数の研究成果が発表されている¹⁾²⁾。円筒殻については弾塑性座屈も含めてかなりの研究が蓄積され、設計規準としてまとめられている³⁾。一方、球形殻においては弾性座屈に関しては実験的研究や非線形弾性座屈解析による研究が蓄積され、設計規準⁴⁾⁵⁾に取り入れられているものの、弾塑性性を考慮する必要があると思われる範囲では球形殻の実験データが非常に少なく、数値解析的な研究においても対象とする球形殻をいくつか取り上げて弾塑性座屈解析を行った例⁶⁾⁻¹¹⁾はあるが、広範囲の部分球形殻を対象にして系統的に応力性状や塑性化の進展状況、初期不整の影響を調べた研究はきわめて少ない。薄肉殻に関する諸外国の規準・指針⁴⁾⁵⁾においては、その基本となる実験データ及び経験式が異なるが、形状初期不整及び断面の塑性化の影響を低減係数で評価し、実験データの下限値に適合させながら、座屈耐力曲線がシェルの細長比

の関数として示されている。

研究の目的： Galletly ら¹¹⁾は溶接による鋼製半球殻の実験結果 (DTMB) を対象とし初期不整データを整理して、BOSOR5 による弾塑性解析結果と比較して各種の設計曲線を検証している。筆者らは既報¹²⁾¹³⁾において軸対称・等分布荷重を受ける周辺固定の部分球形殻に対して、回転殻要素による有限要素法を用い、弾性座屈に限定して、線形座屈解析と非線形弾性座屈解析を広範囲な細長比について実行し、座屈荷重の表現方法について比較・考察を行ない、座屈応力度に基づく座屈耐力曲線を求め、既往の研究結果及び設計曲線と比較した。その際、等価膜応力度を用いて弾塑性域での座屈耐力推定の可能性について検討したが、シェルの細長比がほぼ 1.0 以下の範囲においては弾塑性座屈解析が必要であるとの結論を得た。そこで今回は良く検証された、比較的精度の高い弾塑性座屈解析プログラムを新たに作成し、弾塑性座屈性状を調べることを目的とする。

* 法政大学工学部建築学科 助手・修士(工学)

** 豊橋技術科学大学建設工学系 教授・博士(工学)

Research Assoc., Dept. of Architecture, College of Engineering, Hosei Univ., M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Regional Planning, Toyohashi Univ. of Technology, Dr. Eng.

研究の方法: 既報¹²⁾の解析モデルに対して、共回転の応力増分を使った updated Lagrangian 型の有限要素法を用い、弾塑性を考慮する必要があると思われる範囲の細長比について弾塑性座屈解析を実行し、弾塑性座屈時の応力性状・塑性化の進展状況について比較・考察を行なう。また、形状初期不整を有する場合についても弾塑性座屈解析を実行し、不整による座屈荷重の低減係数を調べる。これらの結果より、座屈応力度に基づく座屈耐力曲線を求め、既往の研究結果及び設計曲線と比較し、弾塑性域での座屈耐力推定について検討する。

2. 有限要素法による解析手法及び解析条件

2.1 弾塑性座屈解析の基本仮定

今回用いた有限要素法プログラムに関する主な仮定は以下の通りである。

- i) 大変形、大ひずみを伴う強非線形問題に対応できる、Updated Lagrangian Jaumann stress rate (U.L.J.) formulation¹⁴⁾⁻²²⁾を用いる。すなわち、基準配置を常に更新し、共回転の応力増分を用いる。
- ii) 9節点 Ahmad Shell 要素を使用する。積分点は 3×3 の Gauss 積分とした^{注1)}。ただし、軸対称変形のみ考慮する場合は回転殻要素による幾何学的非線形解析結果との比較^{注2)}から、積分点は 2×2 の一様低減積分とした。
- iii) 公称応力を用いて表された増分型の仮想仕事の原理を、Kirchhoff 応力の Jaumann 微分を用いて変換し、増分型の剛性方程式を定式化する。¹⁴⁾⁻¹⁶⁾
- iv) 各ステップで応力値の更新に際しては体積変化の項を無視して、Cauchy 応力の Jaumann 微分を Kirchhoff 応力の Jaumann 微分で近似する²⁰⁾。

$$[\Delta\sigma] \approx [\Delta t] = [\Delta t^*] - [\Delta\omega][\sigma] + [\sigma][\Delta\omega] \quad (1)$$

ここに、 $[\Delta t^*]$ は Kirchhoff 応力の Jaumann 微分、 $[\sigma]$ は Cauchy 応力、 $[\Delta\omega]$ はスピン・マトリクス、 $[\Delta\sigma]$ は Cauchy 応力増分、 $[\Delta t]$ は Kirchhoff 応力増分である。

- v) 板厚方向については層分割法により層ごとに塑性化を考慮し、積分は Newton - Cotes 型の 9 点積分を用いる。ただし、弾性解析については 2 層とし、Gauss - Legendre 型の 2 点積分を用いる。
- vi) 弾塑性構成式²³⁾は Mises の降伏条件式、Levy - Mises の流れ則、加工硬化則を用いる。材料は鋼を想定し、等方硬化則を仮定する。
- vii) 荷重の変位依存性は考慮しない。

2.2 有限要素法の基本式

ここで述べる定式化は既に論文等¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁹⁾で発表されているものであるが、解法手順を明確にするために Chang

らの論文¹⁵⁾¹⁶⁾を引用して記述しておく。

時刻 t における配置 θ_i を基準として、公称応力 $\tilde{S}_{ij}$ を用いた仮想仕事の原理は次式のように表される。

$$\int_{V_0} (\tilde{S}_{ij} + \Delta\tilde{S}_{ij}) \delta \left(\frac{\partial \Delta u_j}{\partial \theta_i} \right) dV = \int_{V_0} (\tilde{F}_i + \Delta\tilde{F}_i) \delta \Delta u_i dV + \int_{S_0} (\tilde{T}_i + \Delta\tilde{T}_i) \delta \Delta u_i dS \quad (2)$$

ここに、 $\Delta\tilde{S}_{ij}$ は時刻 t における公称応力増分であり、 $\tilde{F}_i$, $\tilde{T}_i$ はそれぞれ物体力、表面力を表す。updated Lagrangian 定式化を用いると、時刻 t における配置（更新された座標 x_i ）を基準として、仮想仕事の原理は次式のように表される。

$$\int_{V_t} (\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \delta \left(\frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_{V_t} (F_i + \Delta F_i) \delta \Delta u_i dV + \int_{S_t} (T_i + \Delta T_i) \delta \Delta u_i dS \quad (3)$$

ここに、 σ_{ij} は時刻 t における Cauchy 応力増分であり、公称応力増分 $\Delta\tilde{S}_{ij}$ は Kirchhoff 応力の Jaumann 微分 ΔS_{ij}^* を用いて次のように表される。

$$\Delta\tilde{S}_{ij} = \Delta S_{ij}^* + \sigma_{ik} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_k} - (\sigma_{ik} D_{jk} + \sigma_{jk} D_{ik}) \quad (4)$$

$$\Delta S_{ij}^* = C_{ijkl} D_{kl}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

式 (4) をマトリクス表示すれば、

$$[\Delta s] = [\Delta t^*] + [\sigma][\Delta e] - [\Delta e][\sigma] - [\sigma][\Delta e] \quad (6)$$

ここに、 $[\Delta s]$ は公称応力増分、 $[\Delta e]$ は変位勾配マトリクス、 $[\Delta e]$ は Euler のひずみ (速度)¹⁹⁾である。尚、この式を用いることにより剛性マトリクスは対称となる。式 (4) を用いて式 (3) を増分型に書き直すと、

$$\begin{aligned} \int_{V_t} [C_{ijkl} D_{kl} \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (2 D_{ik} D_{kj} - \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j})] dV \\ = R(t + \Delta t) - \int_{V_t} \sigma_{ij} \delta D_{ij} dV \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 $R(t + \Delta t)$ は式 (3) の右辺である。

上式が U.L.J. を用いた増分型の仮想仕事の原理である。Bathe らの定式化¹⁴⁾では Cauchy 応力の Jaumann 微分が用いられている。

2.3 数値解析手法

球形殻に対して、Ahmad Shell 要素による有限要素法¹⁴⁾を用いて、次式の増分形の釣合方程式及び剛性マトリクス (線形剛性、幾何剛性) を誘導し、Newton - Raphson 法と修正 Riks - Wempner 法²⁴⁾を用いて幾何学的非線形解析及び弾塑性座屈解析を行なった^{注2)}。今

回の解析においては軸対称変形のみを考慮した場合、周方向に 10° のモデルを想定し、要素分割は経線方向に9要素19節点(自由度 $57 \times 5 = 285$)とした。変位の軸対称条件には多点拘束条件式²⁵⁾(Multipoint Constraints)を採用した。また、非軸対称変形を含む場合は周方向に1/2対称モデルを設定し、72要素323節点(自由度 1615)とした。尚、今回の解析においては非軸対称分岐座屈荷重は求めていない^{注3)}。

$$([K_L] + [K_N])\{\Delta u\} = \{\Delta P\} \quad (8)$$

$$[K_L] = \int_{V_t} [B_L]^T [D_{ep}] [B_L] dV$$

$$[K_N] = \int_{V_t} ([B_1]^T [\sigma] [B_1] - 2[B_2]^T [\sigma] [B_2]) dV$$

$$\{\Delta P\} = \{R(t + \Delta t)\} - \int_{V_t} [B_L]^T \{\sigma\} dV$$

ここに $[D_{ep}]$ は弾塑性マトリクス、 $[B_L]$ は線形のひずみマトリクス、 $[B_1]$ 、 $[B_2]$ はそれぞれ式(7)の左辺第3項、第2項に関連するひずみマトリクスである。

2.4 解析モデルの幾何形状、材料定数、境界条件、荷重条件、形状初期不整

回転殻の幾何形状、変位、応力の定義を図1に示す。今回解析を行ったモデルは既報の解析モデル¹²⁾を用いた。解析条件は表1及び表2、設定した形状初期不整分布を図2、3に示す。モデルの設定に用いた式は下記の通りである。

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_s &= \sqrt{\sigma_y / \sigma_{cl}} \\ &= \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \times \sqrt{\sigma_y / E} \times \sqrt{R/t} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_{cl} = P_d R / 2t = E / \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot (t/R) \quad (10)$$

軸対称初期不整¹¹⁾及び非軸対称初期不整分布⁹⁾

$$w_{imp}(s) = (w_{imp})_{max} [1 - (2s/L_{cr})^2]^3 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} w_{imp}(\phi, \theta) &= (w_{imp})_{max} \times 64 (R \sin \phi / a)^3 \times \\ &\quad (1 - R \sin \phi / a)^3 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 $a = R \sin \theta_0$ (殻の底面半径) とする。

表 1 解析条件

曲率半径	$R = 50\text{cm}$
半開角	$\theta_0 = 10^\circ$
ヤング係数	$E = 2.1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$
ポアソン比	$\nu = 0.3$
降伏応力度	$\sigma_y = 2400 \text{kgf/cm}^2$
ひずみ硬化係数	$E_T = 2.1 \times 10^4 \text{kgf/cm}^2$
境界条件	周辺完全固定支持
荷重	自重による軸対称荷重
初期不整	軸対称 inward dimple型
	非軸対称 cut pie型

表 2 解析パラメータ

$\bar{\lambda}_s$	$t(\text{cm})$	$L_{cr}(\text{cm})$	λ	$P_{cl}(\text{kgf/cm}^2)$
0.4	0.59010	19.01	2.92	354.0581
0.5	0.37766	15.21	3.65	145.0222
0.6	0.26227	12.67	4.38	69.9374
0.7	0.19268	10.86	5.10	37.7505
0.8	0.14752	9.51	5.83	22.1286
0.9	0.11656	8.45	6.56	13.8148
1.0	0.09442	7.60	7.29	9.0639
1.1	0.07803	6.91	8.02	6.1908

図-1 幾何形状・変位・応力の定義

図-2 軸対称・形状初期不整分布

図-3 非軸対称・形状初期不整分布

3. 弾塑性座屈解析結果の分析

完全形状の部分球形殻については8ケースの $\bar{\lambda}_s = 0.4 \sim 1.1$ について、それぞれ弾性座屈解析及び弾塑性座屈解析を行った。荷重—変位曲線・変位分布・応力及び相当応力度分布を用いて、基本的な弾塑性座屈性状を分析する。また、 $\bar{\lambda}_s = 0.5 \sim 1.1$ については軸対称初期不整の最大振幅と板厚の比 $\varepsilon_g = (w_{imp})_{max}/t$ をそれぞれ0.2、0.5、1.0とした場合の計21ケースについて弾塑性座屈解析を行ない、形状初期不整による座屈荷重の低減係数を調べた。尚、荷重—変位曲線において最初に荷重が低下する点を弾塑性座屈荷重（塑性崩壊荷重）と定義し、その荷重及びその平均応力度（ $\sigma = PR/2t$ ）をそれぞれ、 P_{cr}^{pl} 、 σ_{cr}^{pl} と表し、軸対称初期不整のある場合の弾塑性座屈荷重を P_{max}^{pl} と表す。非軸対称の初期不整を与えた場合は $\bar{\lambda}_s = 0.6, 0.8, 1.0$ について、それぞれ $\varepsilon_g = (w_{imp})_{max}/t = 1.0$ を1ケースずつ、さらに $\bar{\lambda}_s = 0.8$ については $\varepsilon_g = 0.2, 0.5$ を加えた、計5ケースについて弾塑性座屈解析を行った。非軸対称初期不整のある場合の弾塑性座屈荷重を P_{asym}^{pl} と表す。今回の形状初期不整は $\varepsilon_g = 1.0$ 以下としているが、より大きな初期不整については今後の課題とする。

3.1 荷重—変位曲線・変位分布及び塑性化の進展 (完全形状の場合)

荷重—変位曲線の性質はほぼ3つの型（ $\bar{\lambda}_s = 0.4$ 、 $\bar{\lambda}_s = 0.5 \sim 0.7$ 、 $\bar{\lambda}_s = 0.8 \sim 1.1$ ）に分類できる。 $\bar{\lambda}_s = 0.4$ の場合、弾性では荷重が低下する点が明確に現れず、弾塑性においては殻頂部（Apex）の法線方向変位（ w_{Apex}/t ）がほぼ0.2で荷重が最大となり（塑性崩壊）、その後荷重はほとんど低下せず変形が進み、殻頂部上層及び固定支持端の上下層で材料の塑性化が進行する。 $\bar{\lambda}_s = 0.5 \sim 0.7$ の場合は弾性・弾塑性とも同様になだらかな山型の曲線を描き、弾塑性座屈荷重は w_{Apex}/t がほぼ0.4～0.5で生じ、殻頂部上層及び固定支持端の下層で塑性化が生じる。 $\bar{\lambda}_s = 0.6$ の荷重—変位曲線及び弾塑性座屈荷重時の塑性化の様子を図4に示す。 $\bar{\lambda}_s = 0.8 \sim 1.1$ の場合は弾性では起伏の激しい、非常に複雑な荷重—変位曲線を描く。弾塑性においては殻頂部の変位が一旦減少し、荷重が最大となり、その後荷重は急激に低下していく。この範囲の $\bar{\lambda}_s$ で特徴的なのは弾塑性座屈荷重時の変位分布が殻中間部（頂部と支持部の中間）で最大（板厚の0.5～0.7倍）となることであり、 $\bar{\lambda}_s$ が大きくなるほど支持部に近づいていく。殻中央部の変位を用いた荷重—変位曲線は $\bar{\lambda}_s = 0.5 \sim 0.7$ の場合と同様になだらかな山型の曲線となっている。塑性化は最初に合モーメントの大きな固定支持部で生じ、続いて殻頂部の下層側及び変位の最も大きい殻中間部上層側で生じている。 $\bar{\lambda}_s = 0.8$ の例を図5に示す。

3.2 応力分布及び相当応力度分布（完全形状の場合）

図—4 荷重—変位曲線の例（ $\bar{\lambda}_s = 0.6$ ）

図—5 荷重—変位曲線の例（ $\bar{\lambda}_s = 0.8$ ）

$\bar{\lambda}_s = 0.6$ 及び $\bar{\lambda}_s = 0.8$ の場合の弾塑性座屈荷重時の応力性状をそれぞれ図6、図7に示す。合応力 N_s 、 N_θ の傾向はほぼ同じであるが、 N_θ は $\bar{\lambda}_s$ が大きい程、膜応力 $PR/2$ からのずれが少ない。積分点5（中央面）の相当応力度分布をみると、 $\bar{\lambda}_s = 0.6$ では殻頂部から中間部にかけて全般的に大きいのに対して、 $\bar{\lambda}_s = 0.8$ では変位が最も大きくなる中間部のみで大きくなっている。合モーメントは $\bar{\lambda}_s = 0.6$ の場合 M_θ が中間部で M_s が端部で大きくなっているのに対して、 $\bar{\lambda}_s = 0.8$ の場合は変位分布に対応して、 M_s が頂部、中間部、端部でそれぞれ大きくなっている。 $\bar{\lambda}_s$ が大きくなる程、合モーメントの影響が大きくなり、積分点1（上層側）及び9（下層側）の相当応力度分布が積分点5を中心にして互いに鏡像のよう

図-6 弾塑性座屈荷重時の応力性状 ($\bar{\lambda}_s = 0.6$) 図-7 弾塑性座屈荷重時の応力性状 ($\bar{\lambda}_s = 0.8$)

になっている。いずれにしても合モーメントの影響が小さい範囲の $\bar{\lambda}_s$ では中央面 (積分点5) の相当応力度が降伏応力度に達することで座屈耐力が決まっている。

3.3 軸対称初期不整のある場合

$\bar{\lambda}_s = 1.0$ について完全形状及び初期不整のある場合 $\varepsilon_g = (w_{imp})_{max}/t = 0.2, 0.5, 1.0$ の4ケースの荷重-変位曲線を図8に示す。完全形状の場合は殻中間部の変位が最も大きい、初期不整がある場合は殻頂部の変形が大きく、荷重-変位曲線はなだらかな山型となる。特に $\varepsilon_g = 1.0$ の場合は荷重がほとんど低下せず殻頂部の変形が進行する。弾塑性座屈荷重時の殻頂部の変位は弾性解析の結果¹²⁾に比較すると塑性の影響で小さくなっている。初期不整の値が大きくなると弾性座屈による低減率

図-8 初期不整がある場合の荷重-変位曲線

図-9 $\varepsilon_g = 0.2$ の塑性化及び変位・応力分布

の方がより小さくなり、塑性の影響は小さくなると考えられる。

$\varepsilon_g = (w_{imp})_{max}/t = 0.2, 1.0$ の場合の弾塑性座屈荷重時の変位分布・塑性化及び応力分布を図9、図10に示す。変位分布は弾性解析による結果と同様な傾向を示し、殻頂部の変形が大きい。 $\varepsilon_g = 0.2$ の場合で特徴的なのは変位分布から想像されるように合モーメントが数カ所で大きくなり M_s の変化が大きいことであり、その結果、前述したように相当応力度の分布も変動が大きい。 $\varepsilon_g = 1.0$ の場合、 N_s と M_s は初期不整の始まる位置で大きくなり、 N_θ が少し頂部に近い位置で大きくなり、 M_θ は変位分布と同じように頂部で最大となっている。結果として塑性

図-1 0 $\varepsilon_g = 1.0$ の塑性化及び変位・応力分布

化は初期不整のある位置の上・下層で生じている。これらは $\bar{\lambda}_s$ に拘わらず、ほぼ同様な傾向を示している。

今回用いた軸対称初期不整による弾塑性座屈解析結果としてはKaoによる $\lambda = 5, 7.5, 10.0$ の例⁷⁾及びYang & Liawによる $\lambda = 5$ の例⁹⁾があるが、いずれも座屈荷重の結果が示されているだけで塑性化及び変位・応力分布に関する記述はほとんどない。Yang & Liawによる座屈荷重の値は本解析による結果とほぼ同様な値となっているが、Kaoの結果は初期不整の値が大きくなると本解析の結果と比較して座屈荷重がかなり小さくなる。

3. 4 非軸対称初期不整のある場合

今回用いた非軸対称初期不整分布はKao & Perroneによる弾性座屈²⁶⁾²⁷⁾及びYang & Liawによる弾塑性座屈解析⁹⁾において用いられたものである。筆者らの調べた範囲では非軸対称初期不整による弾塑性座屈解析を行った例($\lambda = 6$ のみ)はYang & Liawによる文献⁹⁾のみである。 $\bar{\lambda}_s = 0.6, 1.0$ における $\varepsilon_g = (w_{imp})_{max}/t = 1.0$ の弾塑性座屈荷重時の変位分布及び塑性化の様子をそれぞれ図1 1、図1 2に示す。周方向 $\theta = 0^\circ$ の変位を比較すると初期不整振幅が最も大きい殻中間部で最大となり、板厚が薄いほど変位が増幅され、当然ながら変位勾配も大きくなる。 $\theta = 180^\circ$ の変位分布をみるとやはり板厚が薄いほど、初期不整の影響がApexを越えて伝わっているのがわかる。塑性化の様子はほぼ同様に、 $\theta = 0^\circ$ において変位が最も大きい殻中間部の上・下層及び支持端で、さらに $\bar{\lambda}_s = 0.6$ の場合はApex付近上層側のほぼ全域で塑性化している。 $\theta = 180^\circ$ の結果をみると $\bar{\lambda}_s = 0.6$ の場合はApex付近はほぼ全域で塑性化している。初期不整の振幅が小さくなると($\bar{\lambda}_s = 0.8$ における $\varepsilon_g = 0.2, 0.5$

図-1 1 $\bar{\lambda}_s = 0.6, \varepsilon_g = 1.0$ の変位分布及び塑性化 図-1 2 $\bar{\lambda}_s = 1.0, \varepsilon_g = 1.0$ の変位分布及び塑性化

の例)、 $\bar{\lambda}_s = 1.0$ の結果とほぼ同じような傾向を示し、殻中央部上層及び支持端下層のみで塑性化している。

図1 3、図1 4にはそれぞれ、 $\bar{\lambda}_s = 0.6, 0.8$ の場合の最上層(表層、積分点1)、中央面(積分点5)及び最下層(積分点9)における塑性化の周方向分布(塑性化した積分点を単に塗り潰したもので塑性域とは違って大きさに意味はない)を示す。非軸対称cut pie型(片側 $\theta = 45^\circ$)の初期不整に対して、 $\bar{\lambda}_s = 0.6$ の場合は初期不整の範囲を大きく越えて塑性化が広がっており、最下層では周辺支持部全域が降伏している。ここには示していないが、 $\bar{\lambda}_s = 1.0$ の場合は中央面では塑性化はほとんどみられず、最大耐力に達している。なお、今回は周方向に $\cos 2\theta$ の非軸対称初期不整分布のみを対象とした

図-1 3 $\bar{\lambda}_s = 0.6$ の塑性化の周方向分布 図-1 4 $\bar{\lambda}_s = 0.8$ の塑性化の周方向分布

図-1 5 初期不整敏感性曲線

が、これ以外の不整分布の影響も検討の必要があろう。

3. 5 初期不整敏感性

形状初期不整による弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{pl} の低減係数を調べるため、縦軸に P_{cr}^{pl}/P_{cr}^{pl} 及び P_{asm}^{pl}/P_{cr}^{pl} 、横軸に $\varepsilon_g = (w_{imp})_{max}/t$ をとった弾塑性の初期不整敏感性曲線を図 1 5 に示す。軸対称初期不整の結果を○印、非軸対称初期不整の結果を■印で示している。 $\varepsilon_g = 0.2, 0.5, 1.0$ の場合でそれぞれ、最小となる低減係数は 0.72、0.44、0.38 となっており、初期不整の振幅が大きくなると $\bar{\lambda}_s$ が大きいほど (R/t が大きいほど) 低減係数は小さくなる。従来、初期不整敏感性曲線は古典座屈荷重 P_{cl} を用いて表されてきたが、弾塑性座屈荷重については降伏応力度 σ_y の影響も考慮して、完全形状の弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{pl} からの低減度で表するのが妥当であろう。

4. 座屈耐力曲線上での比較

4. 1 細長比パラメータ $\bar{\lambda}_s$ による座屈荷重の比較

横軸に $\bar{\lambda}_s$ 、縦軸に古典座屈荷重 P_{cl} により無次元化した座屈荷重 P/P_{cl} をとり各種の座屈荷重の比較を図 1 6 に示す。図中には既報¹²⁾で推定した、合応力のみによる相当応力度が降伏応力度に達する荷重 P_{yld2}^{el} や回転殻要素による数種の座屈荷重をプロットしてある。注 2 に示すように本解析における弾性座屈解析結果と回転殻要素による解析結果はほとんど同じ値となるため、弾性の結果は既報のものを用いている。合モーメントの影響が小さい範囲の $\bar{\lambda}_s$ では P_{yld2}^{el} は P_{cr}^{pl} と非常に良く合っており、既報で求めた推定方法が妥当であることがわかる。また、

図-1 6 各種座屈荷重の比較

$\bar{\lambda}_s$ が1.0～1.1、幾何形状パラメータ λ でほぼ8前後で、弾性の座屈荷重と弾塑性の座屈荷重が互いに交差している。

図中には軸対称初期不整による弾塑性座屈解析結果としてKaoによる $\lambda = 5$ の結果⁷⁾を示してある。Kaoは同一の幾何形状パラメータ λ 、同一の $\sigma_y/E = 2 \times 10^{-3}$ となる2種類の形状 ($R/t = 96.15$, $R/t = 209.69$) に対して、初期不整感受性を含む弾塑性座屈解析を行っている。その論文中の解析条件から $\bar{\lambda}_s$ に換算すると、2種類の球形殻はそれぞれ、 $\bar{\lambda}_s = 0.564$, 0.832 に相当する。Kaoが解析で用いた不整を与えた範囲は球形殻全体と思われ、本解析の条件とは若干異なっているものの、Kaoの結果は初期不整の値が大きくなると本解析の結果と比較してかなり小さくなる。Yang & Liawによる結果⁹⁾は本解析による結果とほぼ同様な値となっている。Kaoの論文中の荷重-変位曲線を見るとピークの値はきちんと求められておらず、解析手法に問題があると思われる。いずれにしても、Kaoが指摘したように同一の幾何形状パラメータ λ 、同一の $\sigma_y/E = 2 \times 10^{-3}$ となる、2種類の形状 ($R/t = 96.15$, $R/t = 209.69$) をもつ球形殻において弾塑性座屈荷重は大きく異なることから、従来から行われてきた幾何形状パラメータ λ 及び古典座屈荷重 P_d を用いた座屈耐力の表現方法は適当ではない。また、 σ_y/E の値、いわゆる初期降伏ひずみを変化させた場合についても検討の必要があろう。

4. 2 既往の実験値及び解析結果との比較

本解析結果を座屈応力度 ($\sigma_{cr} = P_{cr}R/2t$) に基づく座

屈曲線として表示し、各種の設計曲線と比較して、その特徴を検討する。図17は $\bar{\lambda}_s$ をパラメータとする座屈耐力曲線である。それぞれ、[a] 本解析での弾塑性座屈解析結果、[b] 代表的な実験結果として、図中の○印で示される、 $33 < R/t < 170$ の溶接による鋼製半球殻の実験結果¹¹⁾ (DTMB) を用いた。[c] 設計曲線は、図中の(1)(2)(3)であり、各々文献28)11)29)から引用している。[d] Kao⁷⁾及びYang & Liaw⁹⁾による弾塑性座屈解析の結果も挿入してある。本解析の結果と実験値を比較すると、実験値は解析結果の P_{cr}^{pl} と $\varepsilon_g = 1.0$ による P_{max}^{pl} を上下限とした範囲内に分布している。Galletlyらは $\bar{\lambda}_s$ に基づき座屈耐力を評価するとき弾性域では実験結果の下限にほぼ合うものの、弾塑性域では既往の設計曲線及び実験結果に比べて過小に評価する傾向にあると報告¹¹⁾している。各種の設計曲線と比較すると $\varepsilon_g = 0.5$ の場合、すなわち軸対称初期不整の最大振幅が板厚の0.5倍の場合においても弾塑性座屈解析の結果はBS5500やIASSの設計曲線を下回っており、 $\varepsilon_g = 1.0$ の場合、すなわち板厚程度の最大振幅をもつ初期不整がある場合には $\bar{\lambda}_s$ が0.8より小さい範囲でDAST 013²⁸⁾を下回っている。ただし、DAST 013ではinward dimple型の不整範囲として $4\sqrt{Rt}$ 、その最大振幅で $0.04\sqrt{Rt}$ という許容値が設定されており、本解析結果と比較するため最大振幅を換算すると、 $\bar{\lambda}_s = 0.6, 0.8, 1.0$ でそれぞれ $\varepsilon_g = 0.552, 0.736, 0.921$ となり、不整の範囲 (本解析では $L_{cr} = 3.5\sqrt{Rt}$) は若干異なるものの、本解析結果と良く符合している。

図-17 座屈耐力曲線と設計曲線、実験・解析結果との比較

本解析結果においては軸対称及び非軸対称初期不整による弾塑性座屈荷重の低減係数を求めたが、座屈耐力曲線上でも Yang & Liaw⁹⁾の結果と本解析結果はほぼ合うものの、前述したように Kao⁷⁾の結果は初期不整の振幅が大きくなると座屈耐力がかなり小さい値となっている。また、本解析で用いた非軸対称初期不整の分布は cut pie 型に限られているが、 $\bar{\lambda}_s$ が 1.0 より小さい範囲では軸対称初期不整を与えた場合の座屈耐力のほうがより小さくなっている。

5. 結論、将来の研究

本論では軸対称等分布荷重を受ける周辺固定の部分球形殻に対して、Ahmad Shell 要素による有限要素法を用い、細長比が 1.1 以下 (λ が約 8 以下) の範囲について弾塑性座屈解析を実行し、各種の座屈荷重と比較し、座屈応力度に基づく座屈耐力曲線を求め、既往の研究結果及び設計曲線と比較・検討した。本研究の結論は以下に要約できる。

(1) 回転殻要素を用いた結果と Ahmad Shell 要素を用いた結果は非常に良く一致した。これにより、回転殻要素を用いた弾性座屈解析結果と Ahmad Shell 要素を用いた弾塑性座屈解析の結果を座屈耐力曲線等で効率よく利用できる。

(2) 弾塑性座屈解析結果から、 $\bar{\lambda}_s$ が 0.7 以下 (R/t がほぼ 260) では合モーメントの大きな固定端部分で塑性化が始まり、続いて合応力の大きな殻中間部分から殻頂部において塑性化が進行して、少し耐力が上昇し塑性崩壊に至る。 $\bar{\lambda}_s$ が 0.8 以上では固定端部分で塑性化が始まり、続いて合モーメントの大きな殻中間部の上層側及び殻頂部の下層側において塑性化が進行して塑性崩壊に至る。

(3) 今回の解析例では殻の中央面 (中立面) の塑性化で座屈耐力が決まるので、弾性解析の P_{yld2}^{el} による弾塑性座屈荷重の推定は非常に有効である。

(4) 軸対称の inward dimple 型の形状初期不整による弾塑性座屈荷重の低減係数は $\varepsilon_g = (w_{imp})_{max}/t = 0.2$ の場合でほぼ 0.72、 $\varepsilon_g = 1.0$ の場合で 0.38 である。各種の設計曲線と比較すると、かなり小さな値となっている。

(5) 半球殻の実験結果 (DTMB) を座屈耐力曲線で評価すると、今回の弾塑性座屈荷重を上限、軸対称初期不整 $\varepsilon_g = 1.0$ の座屈荷重を下限とした範囲に分布している。

(6) 今回想定した非軸対称の cut pie 型の形状初期不整による弾塑性座屈荷重の低減係数は軸対称の場合に比較してそれほど小さくならない。ただし、 $\bar{\lambda}_s$ が 1.0 以上になると非軸対称の cut pie 型の形状初期不整による低

減係数のほうがより小さくなる。今後は弾塑性を考慮した非軸対称分岐座屈解析、さらには非軸対称荷重による座屈解析を進め、結果を座屈耐力曲線上で評価・比較し、弾塑性座屈耐力の推定手法に関する研究を行う予定である。また、材料特性、特に降伏応力度 σ_y の変化による弾塑性座屈荷重の変動についても研究を行う予定である。

6. 謝辞

豊橋技術科学大学助教授・山田聖志博士には計算工学研究会等を通じて御指導を賜り、また有益な御助言を頂きました。ここに深く感謝致します。

岐阜工業高等専門学校校助教授・武藤至氏には本論文作成にあたり、非常に有益な御助言を頂きました。ここに深く感謝致します。

また、本研究における弾塑性座屈解析の検証については (株) 巴コーポレーション建設技術開発室向山洋一氏の協力を得ました。ここに記して謝意を表します。

本研究における非軸対称変形を含んだ弾塑性座屈解析については法政大学計算センターのスーパーコンピュータ VPX210/10 を使用しました。記して謝意を表します。

注 1

Ahmad Shell 要素の数値積分については疑似モードやロッキング現象を避けるため、Heterosis 要素²³⁾や混合型定式化に基づく退化殻要素³⁰⁾等をはじめ、さまざまな工夫がなされている。しかし、平面板の場合と違って、シェル非線形解析においては変位型の定式化による選択低減積分手法 (Heterosis 要素) は最良ではないと考える¹⁵⁾。汎用プログラムの ADINA においても 3×3 または 2×2 の積分を用いており、選択低減積分は用いられていない。本解析においては積分点は 3×3 とした。

注 2

今回用いた弾性及び弾塑性座屈解析プログラムに関しては次の 3 種類の検証解析を行って、その妥当性を検討した。

- i) Ahmad Shell 要素による幾何学的非線形解析との比較²¹⁾
中央に集中荷重を受ける偏平な屋根型円筒殻 ($t = 6.35\text{mm}$) を 1/4 対称モデルにより、4 要素・25 節点 (自由度数 125) の解析を行った。荷重-変位曲線において、Krätzig らの結果³¹⁾と非常に良く一致した。
- ii) 回転殻要素による弾性・幾何学的非線形解析との比較
既報¹²⁾で用いた回転殻要素 (Koiter のひずみ-変位関係式を用いた Total Lagrangian 型の解析) による結果との比較を行った。両者の間には T.L. 及び U.L. の違い、ひずみ-変位関係式の違いがある。また板厚方向のモデル化についても、一方は合応力を用いる stress resultant model、他方は数値積分を用いる integrating model³²⁾であるが荷重-変位曲線及び合応力・合モーメントともにきわめて良く一致した。結果の一部を別表 1 に示す。ひずみが 0.1% のオーダーになれば構成方程式に対して座標の変換を考慮する必要があるとされているが¹⁹⁾、本解析のように変形が板厚の数倍程度になってもひずみはそれほど大きくなく、弾塑性座屈荷重は変形が板厚の 0.5 倍以下で生じており、T.L. と U.L. の違いは明確には現れないと考えられる。初期不整のある場合の解析については、回転殻要素 (T.L.) では初期ひずみとして導入する方法、Ahmad Shell 要素 (U.L.) では初期形状の変化として導入する方法を用いているが、両者の結果は非常に良く一致した。

iii) 汎用プログラム ADINA による弾塑性・幾何学的非線形解析との比較

今回の解析モデルによる完全形状 $\bar{\lambda}_s = 0.6, 0.7, 0.8$ の3ケースについて、ADINA を用いた結果 (Total Lagrangian 型、板厚方向 6 点積分) と比較し、次の別表 2 のような良好な結果を得た。 $\bar{\lambda}_s = 0.7$ の場合においては座屈荷重に 8%ほど違いがあるが、荷重-変位曲線・塑性化の進展等については定性的にほぼ同様な結果が得られた。

別表 1 弾性・幾何学的非線形解析

$\bar{\lambda}_s$	$P_{cr}^{el} (kgf/cm^2) (A)$ Ahmad Shell 要素	$P_{cr}^{el} (kgf/cm^2) (B)$ 回転殻要素	(A/B)
0.6	39.859	39.448	1.010
0.7	23.618	23.595	1.001
0.8	20.962	20.912	1.002
0.9	14.007	13.967	1.003

別表 2 弾塑性・幾何学的非線形解析

$\bar{\lambda}_s$	$P_{cr}^{pl} (kgf/cm^2) (A)$ ADINA	$P_{cr}^{pl} (kgf/cm^2) (B)$ 本解析	(A/B)
0.6	19.705	20.218	0.975
0.7	13.959	15.262	0.915
0.8	11.316	11.337	0.998

注 3

非軸対称変形を含んだ解析としては非軸対称分岐座屈解析があげられる。Galletly ら¹⁰⁾は汎用プログラムの BOSOR 及び FASOR を用いて $\lambda = 7.5, 10.0$ の弾塑性・非軸対称分岐座屈荷重を求めており、それぞれ $P/P_{cl} = 0.54 \sim 0.55$ 、 $P/P_{cl} = 0.76$ の結果を得ている。 $\lambda = 7.5, 10.0$ を解析条件より換算するとそれぞれ、 $\bar{\lambda}_s = 0.59, 0.79$ の場合に相当する。本解析における初期不整を有する結果と比較するとかなり高い値となっている。非軸対称分岐座屈解析については改めて別報にて報告する予定である。

参考文献

- Kollár L. and Dulácska E. : *Buckling of Shells for Engineers*, John Wiley & Sons, 1984.
- Bushnell, D. : *Computerized buckling analysis of shells*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
- Bornscheuer, F.W. : To the Problem of Buckling Safety of Shells in the Plastic Range, Proc. of a State-of-the-Art Colloquium Universität Stuttgart, pp.601-619, 1982.
- ECCS : The Buckling of Shells, European Recommendations for Steel Construction, Brussels, Publication 29, 1983.
- BS5500 : Specification for Unfired Fusion Welded Pressure Vessels, British Standards Institution, London, 1984.
- 安藤良夫、飯田国広、川井忠彦、矢川元基、菊地文雄 : 有限要素法による軸対称かくの弾塑性大たわみ解析、日本機械学会論文集 (第 1 部)、第 37 巻 303 号、pp.609-619, 1971 年 11 月。
- Kao, R. : Large Deformation Elastic-Plastic Buckling of Spherical Caps with Initial Imperfections, Computers & Structures, Vol.11, pp.609-619, 1980.
- Bushnell, D. : Plastic Buckling of Various Shells, J. of Pressure Vessels, Vol.104, ASME, pp.51-72, 1984.
- Yang, T.Y., Liaw, D.G. : Elastic-plastic dynamic buckling of thin-shell finite elements with asymmetric imperfections, J. American Inst. of Aeronautical and Astronautics, Vol.26, No.4, pp.479-486, 1988.
- Blachut, J., Galletly, G.D. : Buckling Strength of Imperfect Spherical Caps - Some Remarks, AIAA Journal Technical notes, Vol.28, No.7, pp.1317-1319, 1990.
- Galletly, G.D., Blachut, J. : Buckling design of imperfect welded hemispherical shells subjected to external pressure, Proc. Instn. Mech. Engrs. 205(C), pp.175-188, 1991.
- 千葉義尚、加藤史郎、武藤至 : 部分球形殻の弾性座屈荷重の表現方法に関する比較・考察、日本建築学会構造系論文集第 458 号、pp.69-78、1994 年 4 月。
- Chiba, Y., Kato, S. and Mutoh, I. : Various Expressions for Elastic Buckling Loads of Spherical Caps, Proc. of the SEIKEN-IASS Symposium, pp.129-136, 1993.
- Bathe, K.J. : *Finite Element Procedures in Engineering Mechanics*, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey, 1982.
- Chang, T.Y. and Sawamiphakdi, K. : Large Deformation Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method, Computers & Structures, Vol.13, pp.331-340, 1981.
- Chang, T.Y. and Sawamiphakdi, K. : Large Deflection and Post-buckling Analysis of Shell Structures, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.32, pp.311-326, 1982.
- 都井裕 : 構造要素クラッシュ挙動のモデル化とシミュレーション、生産研究 第 38 巻 8 号、pp.23-30, 1986 年 8 月。
- Washizu, K. : *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., Pergamon Press, 1975.
- 鷲津久一郎他共編 : 有限要素法ハンドブック II 応用編、培風館、1983 年。
- 日本塑性加工学会編 : 非線形有限要素法、コロナ社、1994 年。
- 久田俊明 : 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎、丸善、1992 年。
- 富田佳宏 : 数値弾塑性力学、養賢堂、1990 年。
- Owen, D.R.J. and Hinton, E. : *Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, 1980.
- Ramm, E. : Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points : *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Proc. Europe-U.S. Workshop Ruhr-Universität Bochum, Springer-Verlag, pp.63-89, 1981.
- Cook, R.D., Maslusk, D.S. and Desha, M.E. : *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1989.
- Kao, R., Perrone, N. : Asymmetric Buckling of Spherical Caps With Asymmetrical Imperfections, Journal of Applied Mechanics, Vol.38, pp.172-178, 1971.
- Kao, R. : A Note on Buckling of Spherical Caps With Initial Asymmetrical Imperfections, Journal of Applied Mechanics, Vol.39, pp.842-844, 1972.
- Bornscheuer, F.W. : Schalenbeulen : von der DAST-Richtlinie 013 zu DIN 18 800 Teil 4, Bautechnik 65, H.10, S.325-331, 1988.
- Medwadowski, S.J.(Chair.) : Recommendations for Reinforced Concrete Shells and Folded Plates, IASS, Madrid, 1979. (川口 衛訳 : IASS 鉄筋コンクリートシェル及び折板構造指針、季刊カラム No. 78, pp.79-96, 1980.)
- 山田貞博、和田章 : Hu-Washizu の原理に基づく混合型 9 節点殻要素、日本建築学会学術講演梗概集 (関東)、pp.1305-1306、昭和 63 年 10 月。
- Krätzig, W.B., Basar, Y. and Wittek, U. : Nonlinear Behaviour and Elastic Stability of Shells - Theoretical Concepts - Numerical Computations - Results, Proc. of a State-of-the-Art Colloquium Universität Stuttgart, pp.19-56, 1982.
- Ramm, E. and Stegmüller, H. : The Displacement Finite Element Method in Nonlinear Buckling Analysis of Shells, *ibid.*, pp.201-235.

(1995 年 7 月 6 日原稿受理, 1995 年 9 月 13 日採用決定)