フレーム構造の弾塑性地震応答のモード解析

MODAL ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC SEISMIC RESPONSE OF FRAMED STRUCTURES

中尾 好昭*
Yoshiaki NAKAO

In recent years, elastic-plastic seismic responses of local stresses and deformations of individual structural members of tall and complicated framed structures have been analyzed. However, discussion on modal property of such detailed responses has not been presented before. This paper first presents a modal method of analysis, which uses the mass condensation method, applicable to structures having numerous degrees of freedom and performing severe nonlinear behaviors. Secondly, this method is applied to examples of 2-15 storied framed structures. As a result, it is shown that for structures of about 10 stories and below the 1st mode solutions are good approximations of overall responses, such as horizontal displacements of the top of the structures, and that for these same structures local responses, such as rotation angles of plastic hinges, can also be roughly estimated by the 1st mode solutions.

Keyword: framed structures, elastic-plastic, seismic response, modal analysis
フレーム構造、弾塑性、地震応答、モード解析

1. まえがき

近年、建物の用途、デザインなどへの要求の多様化に伴い、高層化、複雑化されたフレーム構造のより正確な実態把握のために、個々の部材の応力・変形に至るまで直接計算する立体フレーム構造の精密な弾塑性地震応答解析が行われてきている^{3), 4), 5) など}。

これらにより得られた詳細データは極めて具体的であり、実際の設計上非常に有用であると考えられるが、これら詳細データに関し、振動現象を比較的単純で物理的理解のしやすい形で整理・検討するのに従来から有効に用いられてきた^{6), 7)} 振動モードの考え方を使用して応答特性の検討を行った文献はまだ見当たらない。このような検討を行うには、前述のような大規模構造の弾塑性応答を精密にモード解析する必要があるが、これについては現在まだ研究段階にあり、種々の方法が模索されている状況と考えられる^{8) など}。

そこで本文では、まずこれら弾塑性応答を精密にモード解析することのできる一つの方法を導出すること、つ

ぎにこの方法を用いて、いくつかの構造例についての地震応答計算を行い、上記地震応答のモード特性に関する検討を行うことを目的とする。

非線形応答解析へのモード解析法の応用に関しては以前からいくつかの文献が発表されている⁹⁾。筆者も1973年立体骨組構造の弾塑性応答への応用を試みたが¹⁰⁾、ここでは自由度の非常に多い構造への適用を目的としたので、まず文献11、12に倣い未知変数を運動を代表する主変数とそれ以外の従変数に分けて運動方程式を縮小し、さらに、この自由度の低減された方程式において解を固有モード（弾性）で展開する、非線形性の弱い問題であることを前提とした近似的弾塑性応答解析法を提案している¹⁰⁾。

その後（1981年）、弾塑性変形をする部材は全部材中の一部に限られるが、非線形性が非常に強い問題¹³⁾の解析が必要となり、この場合は弾塑性挙動に関係する未知変数が少ないことを考慮し上記文献10の方法においてこれら未知変数をすべて主変数に含ませる精密解法を提

注) 本研究の一部は文献1,2において発表している。

* 広島工業大学工学部建築学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Hiroshima Institute of Technology, Dr. Eng.

案した¹³⁾。

しかし本文が対象とするフレーム構造の地震応答の場合は全部材に弾塑性変形が生じ得ること、また変形が大きく（非線形性が非常に強く）なり得ることなどから、全未知変数が非線形挙動に關与する問題の精密解析が必要となる。本文では上記2方法^{10), 13)}を更に発展させる新しい方法を検討する。

まず文献10、13と同様、弾塑性復元力を線形項と非線形項に分け、これらをそれぞれ左辺と右辺に置いた運動方程式を逐次近似法により解く方法¹⁰⁾を用いる。本法では上記右辺を等価外力としてモード解析する方法をとるため、各時刻ステップにおいて固有振動解析を行う必要がなく、これは本方法の特色である。つぎに厳密のためには全モードを用いる必要があるが、自由度の非常に大きい系で全モードを求めることは困難であり、本法では系を主変数に關する運動方程式に縮小(動的)することにより全モードを実用的に求め得るようにする。これらを用いれば、適切な主変数の選択¹²⁾を前提として、精密な解を想定でき、この点も本方法の特色である。

さらに、文献10または13においては縮小された運動方程式から求められる主変数に対応する従変数の各時刻ステップにおける評価が近似的または不必要であったが、全未知変数が非線形項に關与する本強非線形問題の場合、後述のように精密な評価が必要であり、本文で新しい表式を提案する。

ついで、本法では上述のように逐次近似法を用いるので収束性の検討が必要であるが、本文では簡単な数値例についての検討を行う。また主変数の選択が適切であれば全モードを用いた解（全モード解と呼ぶ、以下同じ）は通常の増分法による解とよく合うことを示す。

最後に本法を用いていくつかのフレーム構造例につき弾塑性応答の全モード解を求めると共に、1次モードのみを用いた近似解（1次モード解と呼ぶ、以下同じ）も求め、両者を比較検討して、10層程度以下の構造の場合全体的応答（例えば頂部変位等）については1次モード解がよい近似を与えること、また局部的応答（例えば塑性ヒンジの関節回転角¹⁴⁾（残留折れ曲がり角）については、誤差が小さくはないが1次モード解によりごく大まかな評価は可能であることを示す。

2. 解析式

(仮定) (1)主変数に關する運動方程式では弾性振動モードの減衰定数に対応する減衰を用いる。(2)従変数に關する運動方程式では減衰項を無視できるとし、慣性項、外力項は剛性項、非線形項に比し小さいとする(付2)。また非線形項の時間微分は瞬間的には大となるが平均的には0に近いので無視できるとする。

図1は全部材に弾塑性変形を想定したフレーム構造の

解析モデルの

例を示す。

本例では各部材が隣接部材と節点で剛に接合されているとしており

図1 フレーム構造の解析モデル例

また、各部材端のすべてに塑性ヒンジの発生を想定している(図1(b))。このような構造モデルの場合、各部材に關する力・変位關係は一般につぎの形に表すことができる。

$$\begin{aligned} \{p\} &= [k]\{d\} - \{n\} \\ \text{ただし} \quad \{p\} &: \text{材端力 (含モーメント) ベクトル} \\ [k] &: \text{部材の (弾性) 剛性行列} \\ \{d\} &: \text{部材の節点変位 (含回転) ベクトル} \\ \{n\} &: \text{部材の非線形ベクトル (付1)} \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)を用いれば全体構造の運動方程式がつぎのように求められる。

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = -[M]\{1\}\ddot{u}_0 + \{N\} \quad (2)$$

ここに $\{D\}$ は未知変数ベクトル、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ質量（集中質量系では対角行列）、減衰、剛性行列、 $\{1\}$ は X 方向(図1(a))の地震力係数ベクトル（未知変数が X 方向変位のときそれに対応する成分は1であり他の成分は0）、 $\{N\}$ は非線形ベクトルを表す。

式(2)において $\{D\}$ を前述のように運動を代表する主変数ベクトル $\{D_n\}$ とその他の変数からなる従変数ベクトル $\{D_s\}$ に分け(付2)、これらに対応して $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 、 $\{1\}$ 、 $\{N\}$ も分割すると次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [M_M] & 0 \\ 0 & [M_S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{D}_M\} \\ \{\ddot{D}_S\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{MM}] & [C_{MS}] \\ [C_{SM}] & [C_{SS}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{D}_M\} \\ \{\dot{D}_S\} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [K_{MM}] & [K_{MS}] \\ [K_{SM}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D_M\} \\ \{D_S\} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [M_M] & 0 \\ 0 & [M_S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{1_M\} \\ \{1_S\} \end{bmatrix} \ddot{u}_0 + \begin{bmatrix} \{N_M\} \\ \{N_S\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)を書き換えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} [M_M]\{\ddot{D}_M\} + [C_{MM}]\{\dot{D}_M\} + [C_{MS}]\{\dot{D}_S\} \\ + [K_{MM}]\{D_M\} + [K_{MS}]\{D_S\} = -[M_M]\{1_M\}\ddot{u}_0 + \{N_M\} \\ [M_S]\{\ddot{D}_S\} + [C_{SM}]\{\dot{D}_M\} + [C_{SS}]\{\dot{D}_S\} \\ + [K_{SM}]\{D_M\} + [K_{SS}]\{D_S\} = -[M_S]\{1_S\}\ddot{u}_0 + \{N_S\} \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)第2式を微分し、前述の仮定(2)を用いると、 ϵ を小数として近似的に

$$\begin{aligned} \{\dot{D}_S\} &= -[K_{SS}]^{-1}[K_{SM}]\{\dot{D}_M\} + o(\epsilon) \\ \{\ddot{D}_S\} &= -[K_{SS}]^{-1}[K_{SM}]\{\ddot{D}_M\} + o(\epsilon) \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができ、また $[K_{SS}]^{-1}[M_S]$ も $o(\epsilon)$ のオーダーとなるので、式(5)第2式を式(4)第2式に代入し、2次の微小項($o(\epsilon^2)$)以下を無視して次式を得る。

$$\{D_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{D_m\} - [K_{ss}]^{-1}([M_s]\{1_s\}\ddot{u}_0 - \{N_s\}) + [K_{ss}]^{-1}[M_s][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{\ddot{D}_m\} \quad (6)$$

式(6)、式(5)第1式を式(4)第1式に代入し微小項を無視して ($[C_{ms}][K_{ss}]^{-1}$ も高々 $O(\varepsilon)$ のオーダー) 整理するとつぎの形の縮小された運動方程式が求められる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} [M^*]\{\ddot{D}_m\} + [C^*]\{\dot{D}_m\} + [K^*]\{D_m\} &= -\{M_1^*\}\ddot{u}_0 + \{N^*\} \\ \text{ただし} \\ [M^*] &= [M_m] + [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[M_s][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \\ [C^*] &= [C_{mm}] - [C_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \\ [K^*] &= [K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \\ \{M_1^*\} &= [M_m]\{1_m\} - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[M_s]\{1_s\} \\ \{N^*\} &= \{N_m\} - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}\{N_s\} \\ \ddot{u}_0 &= x \text{ 方向の地震加速度} \end{aligned} \quad (7)$$

なお以上では簡単のために x 方向の一方向地震 ($\ddot{u}_0$) を想定しているが、多方向地震の場合も以下の議論は同様に成立する。

式(7)は式(6)と連立させ逐次近似法を用いて解を求めることができるが、前述のように本法ではここでモード解析法を適用する。まず式(7)第1式の 1、2、...、 N 次 (N : 主変数ベクトルの自由度数) の固有円振動数および固有モードベクトルがそれぞれ

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \quad \text{および} \quad \{\phi_{m1}\}, \{\phi_{m2}\}, \dots, \{\phi_{mN}\}$$

であるとする、固有モードの直交性と完全性により任意の自由度 N のベクトル (したがって $\{D_m\}$) が N 個 (全モード) の固有モードベクトルにより (厳密に) 次のように展開できる¹⁰⁾。

$$\{D_m\} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \{\phi_{mn}\} \quad (8)$$

式(8)を式(7)第1式に代入し左から $\{\phi_{mn}\}^T$ (T : 転置記号) を乗じて上記直交性を用いると共に、 $[C^*]$ を粘性減衰としてモード減衰 (減衰定数: h_n) に関する前述の仮定(1)に基づく式:

$$\{\phi_{mn}\}^T [C^*] \{\phi_{mn}\} = 2h_n \omega_n \{\phi_{mn}\}^T [M^*] \{\phi_{mn}\} \quad (9)$$

を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_n + 2h_n \omega_n \dot{\alpha}_n + \omega_n^2 \alpha_n &= -\beta_n \ddot{u}_0 + v_n, \quad (n=1, 2, \dots, N) \\ \text{ただし} \\ h_n &: \text{弾性部の } n \text{ 次の減衰定数} \\ \beta_n &= \{\phi_{mn}\}^T \{M_1^*\} / M_n: n \text{ 次の刺激係数} \\ M_n &= \{\phi_{mn}\}^T [M^*] \{\phi_{mn}\}: n \text{ 次の有効質量} \\ v_n &= \{\phi_{mn}\}^T \{N^*\} / M_n: n \text{ 次の非線形項} \end{aligned} \quad (10)$$

全モードを用いた式(10)第1式は前述のように式(7)第1式と等価である。また式(6)、(8)より次式が得られる。

$$\{D_s\} = \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \{\phi_{sn}\} + \ddot{\alpha}_n \{\varphi_{sn}\} - [K_{ss}]^{-1}([M_s]\{1_s\}\ddot{u}_0 - \{N_s\}) \right)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{\phi_{sn}\} &= -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{\phi_{mn}\} \\ \{\varphi_{sn}\} &= [K_{ss}]^{-1}[M_s][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{\phi_{mn}\} \end{aligned} \quad (11)$$

なお以上において、 $\{N_m\}$ 、 $\{N_s\}$ は $\{D_m\}$ 、 $\{D_s\}$ の (非線形) 関数であり、したがって $\{D_m\}$ 、 $\{D_s\}$ が与えられると式(7)第6式、式(10)第4式から $\{N^*\}$ 、 v_n が順次求められる。

文献10においては前述のように非線形性の弱い場合を想定し、従変数に及ぼす慣性項、外力項、非線形項の影響が無視できると仮定して、式(11)の代わりに

$$\{D_s\} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \{\phi_{sn}\}$$

を用いる方法などの近似解法を提案した。この場合は $\{D_s\}$ が主変数モード成分のみにより一意的に定まるので取扱いが非常に簡単になるが、非線形性が強くなって非線形項が無視できない場合には適用できない。

また文献13では前述のように非線形性に関与する変数はすべて主変数に含め、 $\{N_s\} = 0$ となるように主変数を選ぶので、式(7)したがって式(10)は式(11)とは無関係に (非線形性が弱いなどの仮定なしに) 解くことができる。すなわち非線形性の強弱に関わらず式(10)のみを解いて (式(6)を導く際の仮定を前提として) 正確な解が求められるが、本文の場合のように全部材に非線形性を想定する場合にはこの方法は適用できない (全変数を主変数としなければならない)。

これに対し本法では式(6)を使用することにより、非線形性が強い場合もその効果を正確に考慮した $\{D_s\}$ を用いることができ、また全未知数が非線形性に関与する問題を取り扱うことも可能となる。

式(10)第1式の積分にはNewmarkの β 法 ($\beta=1/4$) を用いることとし、各時間ステップ毎に v_n の代りにその0次近似 $v_n^{(0)}$ (例えば前のステップのもの) から出発し式(10)第1式を積分して $\alpha_n^{(1)}$ 、さらに式(8)、(11)、式(7)第6式、式(10)第4式を次々に用いて v_n の1次近似 $v_n^{(1)}$ を求め、あと同様に繰り返せば $\{D_m\}$ 、 $\{D_s\}$ の収束解を得ることができる。

なお以上において集中質量が質点なら全非拘束線変位を主変数、全非拘束角変位 (回転) を従変数に選べば $[M_s] = 0$ となり、したがって減衰 0 の場合は、式(4)第2式と式(6)が完全に一致し ($[K_{sm}]\{D_m\} + [K_{ss}]\{D_s\} = \{N_s\}$ と $\{D_s\} = -[K_{ss}]^{-1}([K_{sm}]\{D_m\} - \{N_s\})$)、本法により理論上厳密解の得られることがわかる。また減衰が 0 でない場合も通常程度の減衰であればそれを無視した式(6)の誤差は非常に小さいと考えられ、本法は精度のよい解を与えると考える。

最後に、以上において全モードを用いる代わりに、低次モード成分のみを用いれば近似解 (例えば1次モード

解) が得られる。

3. 簡単な数値例についての計算結果の検討

本文では簡単のために図1(b)に示した部材モデルを用い、また同図で塑性ヒンジは図2に示す剛塑性形の特徴を持つとし、かつ2方向曲げ間の干渉、軸力の影響はないとする(図2で m 、 m_p 、 ϕ はそれぞれ曲げモーメント、塑性モーメント、関節回転角(残留折れ曲がり角)を表す)。

まず先端に集中質量 M を有する高さ3(m)の片持梁を例にとる(図3)。基部X方向に El Centro NS波 $\ddot{u}_0$ (最大

図2 塑性ヒンジ特性

図3 数値例(片持梁)

加速度 $\ddot{u}_{0\max}$ (cm/s²)) が加えられた場合について計算する。図3に示すように節点2のX方向変位 u (cm) を主変数に選ぶ(このとき節点2のZ方向変位およびY方向回転は従変数となる)。なお図3で M 、 E 、 I 、 m_p はそれぞれ質量、ヤング率、断面2次モーメント、塑性モーメントであり、図3に示す数値であるとする。また基部モーメントを m (tm) で表す。主変数が u のみであるからモード数は1であり、図3の数値に対し1次固有周期 T_1 は約2(s)となる。

応答計算には前述のように Newmarkの β 法 ($\beta=1/4$) を用いる。時間ステップ dt は0.01(s)とし、減衰定数 h は0とする。応答が弾性域に留まる最大の地震加速度最大値 $\ddot{u}_{0\max}$ (これを α_0 と書き、以下弾性限地震加速度と呼ぶ) は約13.2(cm/s²)となる。 $\ddot{u}_{0\max}$ を α_0 、 $2\alpha_0$ 、 $4\alpha_0$ 、とした場合の頂部変位、基部モーメント応答 u 、 m (図3)の計算結果を図4に実線で示す。 $\ddot{u}_{0\max}$ が増すにつれて応答波形が弾性解($\ddot{u}_{0\max}=\alpha_0$)からずれるのが見られ、 $4\alpha_0$ 程度となるとこの(線形解からの)ずれが大となって強非線形域にあるとしてよいと考えられる。

図4で破線は通常の増分法(時間ステップ $dt=0.0005$

(s))による計算結果を参考までに示したものである。実線で示した本法による結果は増分法によるそれらと区別できない程度によく合うことがわかる。

図4 片持梁の応答計算結果

図4は前に述べた逐次近似の繰り返し回数 i を1とした場合の結果であるが、 $4\alpha_0$ の場合を例にとって i と収束性の関係を検討する。図5は種々の i に対する時刻 $t=5.9$ (s)における頂部変位 u を、代表的に、プロットしたもの(→印)である。収束は非常に速く i は1回で十分(収束値に対する誤差約1%)であることがわかる。また収束値は増分法の結果(破線)とよく合っている。

なお図6は頂部変位

u とせん断力 q の関係(復元力特性)の計算結果を示したものである。本法による計算結果を実線で、また増分法による計算結果を破線で表した。両者はよく合っている。

つぎの例として2層1スパン平面フレーム構造(図7)を取り上げる。諸元など図3の例と同じとするが(1、2階の階高:3(m)、断面積 A は 0.1×10^4)、ここでは節点3、5のX方向変位 u_1 、 u_2 を主変数とする(従変数は節点3、5のZ方向変位、Y方向

図5 逐次近似解の収束性

図6 復元力特性計算結果

角変位と節点4、6のX、Z方向の変位およびY方向角変位)。なお集中質量Mについては、1次固有周期 T_1 (s)が建物高さH(m)に対し $0.03H^{1/5}$ となるように調節して $M=6.4424$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{cm}$)とし、また減衰定数 $h=0$ とする。

図7 計算例(2層1スパンフレーム構造例)

本構造の固有振動計算結果を表1に示す(固有モードの数値は主変数の値であるが対応する従変数の値も含めた変形は図のように中心線に対しほとんど逆対象(本例の場合有効数字8桁程度の一致)となっている。以下応

表1 2層1スパンフレーム構造の固有振動計算結果

	1次	2次
固有周期(s)	0.18	0.0519
等価質量($\text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{cm}$)	15.608	15.608
刺激係数	1.2050	0.4460
固有モード

答においても同じ)。同表より本構造の場合2次固有周期が0.0519(s)と短いので、時間ステップ dt として前例で用いた0.01(s)が適当かどうかも含め解の収束性の検討を行う。地震波形にはEl Centro NS波を用いる。この場合弾性限地震加速度 α_0 は $234.06(\text{cm}/\text{s}^2)$ となる。また逐次近似の繰り返し回数 $i=1$ とする。

図8は $dt=0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002$ に対する $\ddot{u}_{0\max}=4\alpha_0$ の場合の頂部変位 u の本法による計算結果(全モード解、実線)を増分法($dt=0.0005$)による結果(破線)と比較したものである。なお地震波データは0.01(s)刻みのものを使用し、中間値は直線補間によって求めた。

図8で dt を小さくするに従って本法による解(全モード解)が増分法による解に収束してゆく様子が見られ(部材応力についても同様であった)、図7の主変数による全モード解の精度は十分と考えられる(なお本法は増分法に比し計算が複雑であるにも拘らず本例では1回の積分時間は大差なく(本法がやや少)、これは本法での求解の自由度が小さいためと思われる)。上記 $dt=0.01$ の場合、主要応答区間($t=0-5\text{s}$)で各ピーク値における誤差の増分法により求めた応答最大値($t=3.6\text{s}$)に対する相対誤差は

図8 2層1スパンフレーム構造の応答計算結果

約10%程度以下であり、次節の(モード性状の近似的)検討においては十分実用的に使用できると考える。次節における計算結果はすべて $dt=0.01$ に対するものである。

なお前述のような全節点の非拘束線変位を主変数、同角変位を従変数に選んで求めた厳密解(本例の場合減衰0)は上述の全モード解、増分法の解と図の上で区別できない程度に一致する(図8では省略)。

つぎに図7の例で節点5のX、Z方向変位を主変数とした場合の結果(全モード解($dt=0.002$)、実線)を、上記と同様に増分法の解(破線)と比較すると、図9に見られるように全く合っておらず、主変数が不適切であることがわかる。以下のフレーム構造例においては図7と同様1層につき主変数を1つ(X方向変位)ずつ選ぶこととする(なお未経験の構造の場合には適宜精度確認計算を行うべきことを付記する(付2))。

以上は減衰が0の場合であったが、図10は図7で減衰定数 $h=0.05$ の場合の u の本法による計算結果(全モード解($dt=0.002$)、実線)と増分法によるそれら(破線)を比較

図9 主変数が不適切な場合の計算結果

図10 減衰定数 $h=0.05$ の場合の応答計算結果

したものである($\ddot{u}_{0\max}=4\alpha_0$ に対する計算結果を示す)。両者は減衰 $h=0$ の場合(図8($dt=0.002$))と同程度によく合うことがわかる。以下では非線形効果がより表れ易いと思われる $h=0$ の場合についてのみ検討を行う。

4. フレーム構造例の応答解析とモード特性の検討

前節までに述べた弾塑性応答のモード解析法を用いて、以下フレーム構造のいくつかの例につき応答解析を行うと共に、モード特性に関し若干の考察を行ってみる。

まず図7の2層1スパンフレーム構造について、前述のように、本法において1次モードのみを用いた近似解(1次モード解)と、全モードを用いた解(全モード解)を求め両者を比較してみる。まず地震加速度最大値 $\ddot{u}_{0\max}=\alpha_0, 2\alpha_0, 4\alpha_0$ の場合についての応答計算を行う。

全体的傾向を眺めるために頂部変位 $u(\text{cm})$ と柱基部曲げモーメント $m(\text{tm})$ の応答波形に着目し、全および1次モード解をそれぞれ破線および実線で示す(図11)。 $\ddot{u}_{0\max}=\alpha_0$ の場合、実線と破線は区別できないほど重なっており、2次成分は無視できる。これに対し、 $2\alpha_0, 4\alpha_0$ では、モーメント応答に差が出ている箇所もある。しかし全体的にはよく一致しており本構造例の場合全体的変位応答については1次モードのみを用いて近似的に弾塑性応答を評価し得ると考えられる。

図11 2層1スパンフレーム構造の応答計算結果

以上全体的応答について検討したがこれらの内 $\ddot{u}_{0\max}=4\alpha_0$ (強非線形)の場合を例にとって局部的応答計算結果の検討を行う。計算の対象とする諸量を図12に

図12 計算対象の諸応答量

示す。同図で、 u, du, q, m はそれぞれ層変位(cm)、層間変位(cm)、柱せん断力(t)、曲げモーメント(tm)を表す。また ψ は塑性ヒンジの関節回転角(rad 、図2参照)であるが、これは個々の部材の応力、変形に至る詳細応答解析結果を局部破壊の評価に関連づける応答量の一つと考え取り上げた。なお前述のように本計算例の部材モデル(図1(b))が最も単純な剛塑性形塑性ヒンジ(図2)を両端に持つものであるため、 ψ による局部破壊の予測は概略のもの¹⁴⁾とならざるを得ない(将来は ψ でなく、より直接的破壊予測につながるとされる鉄骨部の局部的真ひずみ¹⁵⁾、ひびわれ発生後の圧縮縁コンクリートのひずみ⁷⁾などの応答を詳細に計算できるよう解析モデルを精密化することが考えられる)。

図13 2層1スパンフレーム構造の応答計算結果

図12に示した諸応答量の計算結果を図13に示す。同図よりほとんどの応答量について全モード解（破線）と1次モード解（実線）の概略一致が見られ、全体的には1次モード解がよい近似を与えることがわかる。ただ詳細に見ると全モード解と1次モード解との不一致も見られ、特に関節回転角 ϕ_1 、 ϕ_3 について誤差が大きくなっている。なお図13で du_1 および ϕ_2 、 ϕ_4 が欠けているのは du_1 が u_1 と等しいことおよび同図右下に示すように ϕ_2 、 ϕ_4 が0（塑性ヒンジの発生なし）であることから省略したものである。

これらのデータから1および2層の復元力特性（ q_1 - du_1 および q_2 - du_2 関係）を求めたものをそれぞれ図14（a）および（b）に、また1層の柱基部および梁端の塑性ヒンジ特性 m_1 - ϕ_1 および m_3 - ϕ_3 関係を求めたものをそれぞれ図14（c）および（d）に示す。通常図14（a）、（b）は全体的強度

図14 カー変位関係の例

の目安となり、また図14（c）、（d）は前述のように局部的強度の目安となると考えられるが、前者では全モード解（破線）と1次モード解（実線）が大略一致しているのに対し、後者においては破線と実線の差が大となっているのが見られる（付3）。

つぎに層数が増した場合にも同じことが云えるかどうかを検討してみる。図15は n 層1スパンフレーム構造例を示す。同図で諸元などは前述のものと同じとするが集中質量 M については前例と同様1次固有周期 $T_1=0.03H$ (s)となるように調節する。層数 $n=3, 4, \dots, 15$ の場合の集中質量 M および対応する1、 n 次の固有周期 T_1 、 T_n の計算結果を表2に示す。なお前例と同様、1、2、 $\dots$ 、 n 層の代表水平変位 u_1 、 u_2 、 $\dots$ 、 u_n を主変数とした（図15）。

まずこれら構造例の El Centro NS波（ $\ddot{u}_{0\max}=4\alpha_0$ 、 α_0 ：表2）に対する応答計算を行った結果、10層程度以下の場合、2層（図13）の場合と大略同様の傾向の応答が得られた。図13でも見られるように、全体的応答は頂部変位 u （図15）によって代表され、また局部的応答性状は塑性ヒンジの関節回転角 ϕ で代表的に表されると考

図15 n 層1スパン平面フレーム構造

表2 n 層1スパン平面フレーム構造の振動特性

層数 n	集中質量 $M(\text{kg}^2/\text{cm})$	1次固有周期 $T_1(\text{s})$	n 次固有周期 $T_n(\text{s})$	弾性地面加速度 (El Centro NS) $\alpha_0(\text{cm/sec}^2)$
3	6.3220	0.27	0.0431	259.78
4	6.2177	0.36	0.0396	165.51
5	6.1446	0.45	0.0379	113.29
6	6.0939	0.54	0.0368	85.92
7	6.0565	0.63	0.0362	123.74
8	6.0315	0.72	0.0357	98.02
9	6.0116	0.81	0.0354	145.70
10	5.9960	0.90	0.0352	81.00
11	5.9837	0.99	0.0350	87.63
12	5.9737	1.08	0.0348	122.85
13	5.9655	1.17	0.0347	108.86
14	5.9586	1.31	0.0346	114.36
15	5.9528	1.35	0.0345	153.82

えられることから、以下 u と ϕ （全モード解で最大値の発生する塑性ヒンジに着目し、その値を ϕ とする）につき検討する。なお、ここでは $\ddot{u}_{0\max}=4\alpha_0$ の場合の1次モード解の性質のみを検討することとし、建物の耐力特性との関連などについては今後の問題と致したい。

図16は全モード解最大値（ $u_{\max}$ 、 $\phi_{\max}$ ）の1次モード解最大値（ $u_{1\max}$ 、 $\phi_{1\max}$ ）に対する比 $u_{\max}/u_{1\max}$ 、 $\phi_{\max}/\phi_{1\max}$ を層数 n に対してプロット（◆印）したものである（ $n=2$ のデータは図13のものを使用した）。

まず図16（a）より10層程度以下の構造例では $u_{\max}/u_{1\max}$ が1の近くで小さくばらつingのが見られ（誤差約2割以内）、

(a) 頂部変位 u (b) 最大関節回転角 ϕ

図16 n 層1スパン構造の1次モード解の性状

頂部変位 u については1次モード解がよい近似を与えることが知られる。つぎに、図16(b)より、塑性ヒンジの関節回転角 ϕ については、全モード解に対する1次モード解の誤差が小さくはないが、10層($n=10$)程度以下の場合大略同じ誤差範囲に収まっており、ごく大まかには1次モード解による評価が可能と思われる。なお、参考までに、 $N=5$ の場合のTaft NS、八戸NS波に対する応答計算結果を図16に□、△印で示す(その他の n についても同様の結果が得られた)。

ついで高次モードの影響を検討するために、上記構造($n=5$)でモード数 m (1- m 次のモードを使用、 $m=1-5$)の解の最大値 u_{mx} 、 ϕ_{mx} についての計算結果を図17に示す(ϕ_{mx} は図16(b)の場合と同様全モード解 $\phi_{\text{全}}$ が最大となるヒンジ点の値の最大値である)。 $u_{\text{全}}/u_{mx}$ の値は $m=1$ の場合も十分に近く、 m が増すと急速に1に収束しているのに対し、 ϕ については $m=4$ (1-4次モード使用)でも15%程度の誤差が残っているのが見られる。更に強度予測の精度を向上させるためには、 ϕ の履歴についても正確な評価が望まれるが、図18に示すように $m=4$ の場合ですら ϕ の全モード解(破線)は $m=4$ の解(4次モード解、実線)に対して部分的には大きく食い違い得ることがわかり、更に精度を要する場合には全モード解の使用が望ましいと考えられる。

以上は1スパンの場合の結果であったが、つぎに図19に示す5層3スパン平面構造を例にとってスパン数の影響を検討してみる。諸元などは前述と同じとしスパンはいずれも5(m)、また集中質量 M も前述と同様 $T_1=0.03H$ とな

(a) 頂部変位 u (b) 最大関節回転角 ϕ

図17 5層1スパンフレーム構造の

弾塑性応答における使用モード数の影響

図18 5層1スパンフレーム構造の弾塑性応答

図19 5層3スパン平面フレーム構造

図20 5層平面フレーム構造例の弾塑性応答

るように調節した(図19)。El Centro NS波($\ddot{u}_{g\text{max}}=4\alpha_0$ 、 $\alpha_0=104.5\text{cm/s}^2$)に対する頂部変位 u 、内柱基部塑性ヒンジの関節回転角 ϕ (図19、本例ではここが最大となる)の全モード解を図20に破線で、またこれに対応する5層1スパン平面フレーム構造(図15)の場合の全モード解を実線で示す。破線と実線は u の場合ほぼ一致しており、また ϕ の場合も大略同様であることから、スパンの影響は比較的小さいと考えられる(1次モード解についても同様であった)。なお参考までに塑性ヒンジ発生箇所を図20右上図に黒丸で示した。

以上述べたことから、10層程度(高さ約30(m))以下の平面フレーム構造においては、1次周期 $T_1=0.03H$ として、全体的応答において1次モード解がよい近似を与えること、また局部的応答(特に塑性ヒンジの関節回転角)については、誤差が小さくないが1次モード解によりごく大まかな評価は可能と考えられることなどが知られる。なお更に精密な評価が必要な場合は、本法では全モード解を用いる必要があると考えられる。

以上に対し図16で $n=15$ のばあい u 、 ϕ の誤差が大きく、10層程度以下の場合と違った傾向を示しているのが見られることから、高層あるいは超高層建物の場合には高次モード成分の影響が大となって上記のことが成立しなくなる可能性も大きいと考えられる。図21は $n=15$ の場合の応答波形を示す(ϕ は最大値の発生する3層梁端のものである。なお、参考までに、塑性ヒンジ発生箇所を図21右図に黒丸で示した)。10層程度以下の場合の応答

波形を代表的に示した図13と比較すると、図21の場合、 u 、 ϕ 共に1次モード解の誤差が大きく、これらによる概略評価は困難になると思われる（なお、平均的変位応答スペクトル（梅村スペクトル）を用いて弾性地震応答における1次成分に対する2次成分の比を求めてみると、10層程度以下のモデルでは5%程度以下であるのに対し、不一致の大きい15層モデルにおいては10%となっていることから、5%程度が1次モード解の適用限界ではないかと考えられる）。これに対処する方法としては、現状では

図21 15層1スパン平面フレーム構造の応答波形例

正解またはそれと同等の精度の解によるのがよいと考えられる。なお、前述のように、現在本問題に関する諸研究が実施されつつあり^{8) 4) 5)}、将来更に簡便な方法が導出されれば有用と思われる。

以上の他、立体構造の捻り振動、2方向（または3方向）地震に対する応答、大変形時の幾何学的非線形（動的安定性）問題など、精密解析上の重要問題が多い。本文の方法はこれらの諸問題にモードの観点から接近する場合にも一つの有効な方法になり得ると考える。

5. むすび

以上述べたことを要約すると次のようである。

- (1) 高層化、複雑化されたフレーム構造の個々の部材の応力、変形に至る弾塑性地震応答を精密解析可能なモード解析の一方法を提案した。具体的には、
- (2) 大自由度の運動方程式を（動的）縮小法により運動を代表する主変数に関するそれに縮小した。
- (3) 本問題では全部材に塑性変形発生の可能性があり、かつ大きい変形（強非線形）も起こり得るので、これらの従変数への影響を精密に評価できる表式を導いた。
- (4) 縮小された運動方程式と従変数評価式のモード表示式を求めこれらを連立させて解く新しい方法を示した。
- (5) 簡単な数値例につき、本法（全モード解）による地震応答計算を行い、逐次近似回数1で1%程度の誤差まで解が収束すること、またこの収束解が増分法による解とよく合うことを示した。ついで、
- (6) 本法により各部材の両端に塑性ヒンジ（剛塑性形）を持ち、1次固有周期(s)が高さ(m)の0.03倍である2-15層1スパン平面フレーム構造例（階高、スパンがそ

れぞれ3、5(m))の地震応答計算を行った。

(7) まず2層1スパンフレーム構造の場合の構造各部の応答波形を求め、全体的応答は頂部変位により代表できること、局部的応答性状は塑性ヒンジの関節回転角により代表的に表されることを示した。

(8) つぎに、上記2-15層1スパン構造の頂部変位、関節回転角の全モード解の1次モード解に対する比を検討し、10層程度（高さ約30(m)）以下の構造の場合、全体的変位応答については1次モード解がよい近似を与えることを示した。なお局部的応答については、誤差が小さくないが1次モード解によりごく大まかには評価可能であることを述べた。

(9) 更に精密な評価が必要な場合には、本法においては全モード解を用いる必要があることを述べた。

(10) 層数が更に増し、高層あるいは超高層構造の場合には高次モード成分の影響が大となって、1次モード解による概略評価が困難になると思われることを述べ、これに対処するには正解またはそれと同等の精度の解によるのがよいこと、また将来更に簡便な方法が導出されれば有用と思われることなどを述べた。

今後は本文の結果を終局安全性に関連する諸問題の検討へと結び付けて行きたい。

（謝辞）

本研究実施に当たりデータ整理、資料作成などに協力願った広島工業大学大学院学生波多野義久君にお礼申し上げる。

参考文献

- 1) 中尾好昭：フレーム構造の弾塑性地震応答のモード解析、日本建築学会近畿支部研究報告集、pp.317-320、1994年6月。
- 2) 中尾好昭：フレーム構造弾塑性地震応答の1次モード成分に関する一考察、日本建築学会大会学術講演梗概集B、pp.745-746、1994年9月。
- 3) 田才 晃、小谷俊介、青山博之：終局強度型耐震設計法によるフレーム構造の2方向地震応答、構造工学論文集、Vol.36B、pp.281-294、1990年3月。
- 4) 木村雄一、高山正春、宇治昇一、児島千里、池本雅秀：立体動的弾塑性解析プログラムの開発（その3）RC建物モデルの地震応答、日本建築学会大会学術講演梗概集B、pp.401-402、1993年9月。
- 5) 松崎 端、森川博司、前田達哉、高橋元美、喜多村秀司、吉川和秀：任意形立体骨組の弾塑性解析プログラムの開発、日本建築学会大会学術講演梗概集B、pp.403-404、1993年9月。
- 6) 大沢 胖、南 忠夫、松島 豊、長田正至：新建築学体系38構造物の動的解析、彰国社、pp.198-203、1981年10月。
- 7) 日本建築学会：鉄筋コンクリート建造物の終局強度型耐震設計指針・同解説、日本建築学会、p.66、pp.87-88、1990年11月。
- 8) 孫 宏、大井謙一、陳 以一：多自由度弾塑性地震応答解析における部分モード解析法、日本建築学会大会学術講演梗概集B、pp.741-742、1994年9月。
- 9) 鷲津久一郎、他：有限要素法ハンドブックII応用編、培風館、pp.65-78、517-524、1983年1月。
- 10) Nakao, Y. and Takano, S.: Elasto-Plastic Seismic Response

Analysis of Framed Structures by Mode Superposition, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, University of Tokyo Press, pp.423-436, 1973.

11) Guyan, R. J.: Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal Vol.3, p380, 1965.

12) Irons, B.: Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables, AIAA Journal Vol.3, pp.961-962, 1965.

13) Nakao, Y., Murase Y. and Kohata H.: Elastic-Plastic Seismic Response Analyses of Structures Supporting Steam Generators, Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics, Pergamon Press, pp.205-211, 1981.

14) 藤田 誠、楠田忠夫、川井忠彦：塑性設計法、森北出版、pp. 67-68、1961年8月。

15) 日本建築センター：構造設計指針・同解説、日本建築センター、pp.88-89、1986年5月。

16) 桑村 仁：繰り返し塑性ひずみを受ける構造用鋼材の疲労・延性破壊遷移、日本建築学会構造系論文報告集 第481号、pp. 123-131、1994年7月。

(付1) 部材の非線形ベクトル

フレーム構造を構成する任意部材に対し、本文式(1)における非線形ベクトル $\{n\}$ は材端力ベクトル $\{p\}$ が材端変位ベクトル $\{d\}$ およびその履歴に対応して決定されるとき、次式によって求められる。

$$\{n\} = [k]\{d\} - \{p\}(\{d\} \text{ およびその履歴 }) \quad (a1.1)$$

例えば 図a1.1 に示すように x 軸上にある部材 ij (節点 i, j (・印) のすぐ内側に塑性ヒンジ (○印、剛塑性形(本文(図2))) を有すると

図a1.1 任意部材 ij

図a1.2 $n-l$ 関係

する)において、節点 i, j の y 方向変位と回転 u_i と θ_i 、 u_j と θ_j が与えられた場合にはたわみ角式を用いて材端モーメント m_i 、 m_j がつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} m_i &= l_i - n_i \quad , \quad m_j = l_j - n_j \\ \text{ただし} \quad l_i &= \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\frac{u_j - u_i}{L}) \quad , \quad l_j = \frac{2EI}{L} (\theta_i + 2\theta_j - 3\frac{u_j - u_i}{L}) \\ n_i &= \frac{2EI}{L} (2\psi_i + \psi_j) \quad , \quad n_j = \frac{2EI}{L} (\psi_i + 2\psi_j) \end{aligned} \right\} \quad (a1.2)$$

ここに L 、 E 、 I 、 ϕ_i 、 ϕ_j はそれぞれ部材長さ、ヤング率、断面2次モーメント、節点 i, j における関節回転角 (本文図2、残留折れ曲がり角) である。 Δt 時間前の時刻 t_0 における諸量 (下添字 0 を付す) の Δt 時間での増分を前に Δ を付して表すと、式(a1.2)第3行目の式より次式が成立する。

$$\Delta n_i = \frac{2EI}{L} (2\Delta\psi_i + \Delta\psi_j) \quad , \quad \Delta n_j = \frac{2EI}{L} (\Delta\psi_i + 2\Delta\psi_j) \quad (a1.3)$$

時刻 t_0 に m_0 、 l_0 、 n_0 であった諸量が、 Δt 時間後の時刻 t に m 、 l 、 n になったとして、式(a1.2)第1行目の関係は図a1.2 のように表すことができるので、時刻 t に与えられる節点変位、回転に対応する l_i 、 l_j に対し、 n_i 、 n_j がつぎのように求められる。

- (1) $|l_i - n_{i0}| \leq m_p$ 、 $|l_j - n_{j0}| \leq m_p$ の場合
両端弾性域であり $\Delta\psi_i = \Delta\psi_j = 0$ $\therefore$ 式(a1.3)より $\Delta n_i = \Delta n_j = 0$
 $\therefore n_i = n_{i0}$ 、 $n_j = n_{j0}$
- (2) $|l_i - n_{i0}| > m_p$ の場合
i) $|l_j - n_{j0}| \leq m_p$ のとき $\Delta\psi_i \neq 0$ 、 $\Delta\psi_j = 0$ $\therefore \Delta n_i \neq 0$ 、 $\Delta n_j = \frac{1}{2}\Delta n_i$
 $\therefore m_i = l_i - n_i = m_p$ より $n_i = l_i - m_p$
ii) $n_j = n_{j0} + \frac{1}{2}\Delta n_i \leq m_p$ のとき、 $n_j = n_{j0} + \frac{1}{2}(l_i - n_{i0} - m_p)$
iii) $n_j = n_{j0} + \frac{1}{2}\Delta n_i > m_p$ のとき、 $n_j = l_j - m_p$
- (3) $|l_j - n_{j0}| > m_p$ のとき
 $n_i = l_i - m_p$ 、 $n_j = l_j - m_p$
- (4) $|l_i - n_{i0}| < -m_p$ の場合も(2)項と同様に求められる。

なお更に一般の場合 (例えば Ramberg-Osgood 型の応力・ひずみ特性を有する鋼材から成る梁部材の弾塑性変形) においても、材端変位ベクトル $\{d\}$ を強制変位と考えて、当該部材を (例えば有限要素法などにより) 準静的に弾塑性解析して材端力ベクトル $\{p\}$ を求めれば上記と同様に式(a1.1)により非線形ベクトル $\{n\}$ を求めることができる。

(付2) 主変数と従変数

本文では非常に自由度の多い運動方程式の未知変数ベクトル $\{D\}$ を運動を代表すると思われる主変数ベクトル $\{D_n\}$ とそれ以外の変数から成る従変数ベクトル $\{D_s\}$ に分け、 $\{D_n\}$ と $\{D_s\}$ 間に適切な従属関係を課することにより振動自由度を低減する方法^{11), 12)} を用いている。主変数の選択は経験的に行うこととなるが初めての構造の場合には正解またはそれと同等の精度を有する解との比較により選択の可否を検討しておく必要がある。なお定性的には式4第2式 ($\{D_s\}$ に関する運動方程式) で $\{D_n\} = 0$ とした場合を考え、 $[K_M]$ に比し $[M_d]$ が十分小さく (固有振動数が十分高く) なるように $\{D_s\}$ を選ぶという考え方が参考となろう。

(付3) q - du 関係は各層の平均的特性であるため1次モード解でも十分評価できるのに対し、 n - ϕ 関係は局部的特性であるため、高い精度が要求される場合は、正解またはそれと同等の精度の解から求めねばならないものと思われる。

(1995年11月9日原稿受理、1996年2月1日採用決定)