自由表面を有する非圧縮粘性流れの数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOWS WITH FREE SURFACE

西村 敏雄*¹, 近藤 典夫*², 加納 充浩*³
Toshio NISHIMURA, Norio KONDO and Mitsuhiro KANO

The purpose of this paper is to calculate incompressible viscous flows with free surfaces by using the third-order upwind finite element scheme and the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) method. Waves on the free surfaces are limited to the waves without braking conditions. Numerical dissipation added into the upwind finite element scheme is expressed by the fourth-differentials with respect to the flow velocities. The pressure is computed by the Poisson equation which is derived by making the divergence of the Navier-tokes equations. Numerical results of flows with free surfaces are presented to illustrate the effectiveness and robustness of the proposed upwind scheme.

Key words: Third-order upwind scheme, Finite element method,
Arbitrary Lagrangian-Eulerian method
3次上流スキーム、有限要素法、ラグランジュ・オイラー混合法

1. はじめに

近年、造船、海洋工学などの分野において構造物周りの流体现象の解明が様々な手法を用いて行われるようになった。ここで対象とされる流体は圧力による密度変化を無視することができ、非圧縮性流体と呼ばれるもので、我々の身近に存在する流れのほとんどがこの性質を仮定することができる。また物体に働く抵抗を正しく評価するために、扱う流体特有の粘性を考慮に入れなければならない。この流体は、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式と連続方程式によって支配される。これらの方程式を数値的に解くことにより、ポテンシャル理論では予測し得ない複雑な現象を解明することが可能となる。

有限要素法では、SUPGスキーム、BTD適用スキームなど多くのスキームが使われてきたが、2階微分で表される数値粘性を付加した上流スキームでは、高レイノルズ数域において計算された解は拡散的になることが知られている。これに対して、3次上流有限要素法^[1]が有効であることが報告されている。この手法は、摂動関数を標準重み関数の2階と3階

の空間微分の和で与えている。2階微分項は、移流項の離散化にともなう2次の打ち切り誤差を消去する働きがある。この結果、移流項の離散化は4次精度の中心近似のものとなる。3階微分項は移流項と結びついて、4階3次の数値粘性を作る働きがあり、差分法で使われている3階4次のものと同様な性質を示す。これにより、高レイノルズ数域における数値的発散が抑えられている。圧力の解法には、ナビエ・ストークス方程式の発散をとり、圧力のポアソン方程式を誘導し有限要素近似を行う。これにより、圧力のポアソン方程式に適用する形状関数に、流速と同じものを適用することができる。

自由表面を考慮する場合、ナビエ・ストークス方程式を直接解き、自由表面の取り扱いが可能な方法として、Welchらにより開発されたMAC(Marker-and-Cell)法^[2]が挙げられる。この方法は、時間進行と共に変化する自由表面形状を重さの無い理想粒子により追跡する方法であり、多くの研究者により様々な改良が進められている。主なものとしてAmsden, Haralawによって解法が簡易化されたSMAC(Simplified MAC)法^[3]が提案された。宮田らはTUMMAC(Tokyo University Modified

*¹ 日本大学理工学部 教授・工博

*² 日本大学理工学部 専任講師・工博

*³ 日本大学理工学研究 所 研究生・工博

Prof., Nihon Univ., College of Science and Technology, Dr. Eng.
Assist., Prof., Nihon Univ., College of Science and Technology,
Dr. Eng.
Researcher, Nihon Univ., Science and Technology Research Center,
Dr. Eng.

MAC) 法^[4]を開発し、造船分野への応用を実施している。

オイラー的方法では砕波など自由表面の大変形を伴う問題も扱え、その用途の広さに利点がある。しかし、計算格子が固定されており、自由表面位置を厳密に扱うことが出来ない。そのため自由表面の数値的な扱いに近似が入ることが避けられない。これに対し、自由表面に解析領域境界を適合させる、ラグランジュ的手法では、格子点を流体粒子と同一視するため、自由表面を直接的に捉えることができる。しかし、ラグランジュ的方法では、流体の運動に伴い要素の再分割が必要となる。このため格子点の移動量が大きくなった場合、有限要素のゆがみにより計算の続行が不可能になる場合がある。このラグランジュ的方法の欠点を改善したものとして、ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法がある。この方法では、流体粒子の速度と独立した格子移動の速度を導入し、計算格子の過度な変形が抑えられている。また、計算格子の移動を自由表面近傍にのみ施すことができ計算効率を高めることができる。

また有限要素法などを用いてナビエ・ストークス方程式の数値解析により、海洋構造物周りの流体現象を解明する場合、無限に広がる海洋空間を任意の有限領域に限定しなければならない。従って有限領域内において波の反射等が数値解に及ぼす影響を無くするためには、十分大きな有限領域を確保し、その領域の中で数値計算を行うことになる。

本研究では、海洋空間における流体現象を解明するための数値計算手法の確立を目的としている。その方法論として、自由表面を有する非圧縮粘性流体の数値解析に3次元上流有限要素法を用い、さらにALE法を採用した。また自由表面条件に対する支配方程式として運動学的条件式及び、応力の釣り合い式を誘導し、運動学的条件式では波高を一価関数として与えるように仮定する。

海洋空間のような自由表面問題を扱うための初段階として、本論文では閉領域内で自由表面を有する問題へ本手法を適用し、その有効性の確認を行うことを目的としている。具体的な数値解析例として、2次元孤立波反射問題、自由表面を有する正方キャビティ内流れ問題を取りあげ、流れの様子を明らかにする。

2. 基本式

自由表面を有する非圧縮粘性流体を支配しているナビエ・ストークス方程式と連続方程式は、無次元表示で以下のように与えられる。

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = \sigma_{ij,j} \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は流速、 σ_{ij} は全応力、 $(\cdot)_{,t} = \partial/\partial t$ 、 $(\cdot)_{,i} = \partial/\partial x_i$ である。また t は時間、 x_i は座標変数を表す。

全応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3)$$

で表され、動圧力 P と粘性応力 τ_{ij} は、

$$P = p + \frac{x_3}{Fn^2} \quad (4)$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

である。ここで、 Fn はフルード数、 Re はレイノルズ数、 p は圧力、 δ_{ij} はクロネッカー記号を示す。

一方、式(1)の発散を取ることで、以下のような圧力のポアソン方程式を得ることができる。

$$P_{ii} = -\tilde{u}_{i,i} \quad (6)$$

ここで、

$$\tilde{u}_i = u_{i,t} + u_j u_{i,j} - \tau_{ij,j} \quad (7)$$

である。また、自由表面における運動学的な条件式は、自由表面を表す関数を F とすれば、

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad (8)$$

と表すことが出来る。さらに F を波高 H によって、

$$F = x_3 - H \quad (9)$$

と表示する。式(9)は、波高 H を一価関数として表すことになり、砕波を伴わないような自由表面を想定することになる。これより、式(8)と式(9)から自由表面上の運動学的条件式は、

$$H_{,t} + u_\alpha H_{,\alpha} = u_3 \quad (10)$$

と表すことができる。ここで、添字 α は 1、2 をとる。

以上の基本式を解くために、解析領域の境界は、流速境界 Γ_1 、応力境界 Γ_2 、自由表面境界 Γ_3 に分けられる。流速境界 Γ_1 では、

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (11)$$

応力境界 Γ_2 では、

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (12)$$

が与えられ、 $\hat{u}_i$ と $\hat{\sigma}_i$ は各々規定値を示す。 n_i は単位法線ベクトルである。自由表面境界 Γ_3 では、自由表面の法線方向と接線方向の力学的釣り合い式を考える。まず、法線方向の力学的釣り合い式は、

$$p - \tau_{ij} n_i n_j + T = p_0 \quad (13)$$

で表される。ここで、 T は表面張力

$$T = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (14)$$

を示し、 γ は張力係数、 κ_1 と κ_2 は自由表面の主曲率である。また p_0 は大気圧を示す。次に、接線方向の力学的釣り合い式では、

$$\tau_{ij} n_i s_j = 0 \quad (15)$$

が与えられる。ここで、 s_j は単位接線ベクトルである。式(13)、(15)は、自由表面上の境界条件として圧力のポアソン方程式を解く際に適用される。

また $t = 0$ における初期流速として以下の条件を付加する。

$$u_i = \hat{u}_i^0 \quad (16)$$

ここで、 $\hat{u}_i^0$ は初期速度を示す。

3. 3次上流有限要素スキーム

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の適切な数値解を作るために、上流化手法の一つである3次上流有限要素法を導入する。

3次上流スキームは、4階3次の数値粘性を付加したスキームである。本論文では、ナビエ・ストークス方程式をペトロフ・ガラーキン法に基づいた弱形式にする際、修正重み関数を以下のように定義する。

$$\bar{u}_i = w_i + \tilde{w}_i \quad (17)$$

同様に式(10)に関する修正重み関数を以下のように定義する。

$$\bar{H} = \theta + \tilde{\theta} \quad (18)$$

ここで、 w_i 、 θ は標準重み関数で、 $\tilde{w}_i$ 、 $\tilde{\theta}$ は摂動関数を表す。

物理現象を数値的に計算するとき、解の解像度を高めるために解析領域を不等メッシュに分割することが多い。しかしこのような不等メッシュの下で直接に作られた有限要素方程式は、離散化に伴う打ち切り誤差により、高次精度を維持できない。そこで精度を高めるために、有限要素法の場合でも差分法と同じように、写像空間の中で離散化を行うことが必要になる。

物理空間 (x_i, t) から写像空間 (ξ_i, τ) へ以下のような座標変換を行う。

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \tau = t \quad (19)$$

さらに上流化は対流項にだけ施す場合を考えて、式(1)は写像空間内で次式のような弱表現として表すことができる。

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} w_i u_{i/\tau} J d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} (w_i + \tilde{w}_i) U_j u_{i/j} J d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} \xi_{k,j} w_{i/k} \sigma_{ij} J d\bar{\Omega} \\ = \int_{\bar{\Gamma}} w_i \sigma_i I d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (20)$$

同様に式(10)は、以下のように表される。

$$\int_{\bar{\Gamma}_3} \theta H_{/\tau} I d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}_3} (\theta + \tilde{\theta}) U_\alpha H_{/\alpha} I d\bar{\Gamma} - \int_{\bar{\Gamma}_3} \theta u_3 I d\bar{\Gamma} = 0 \quad (21)$$

ここで、 $()_{/\tau} = \partial/\partial\tau$ と $()_{/i} = \partial/\partial\xi_i$ は写像空間内での偏微分を表す。また、 $d\Omega = J d\bar{\Omega}$ 、 $d\Gamma = I d\bar{\Gamma}$ を示し、 J と I はそれぞれヤコビアンである。 U_i は次式のように表される反変流速である。

$$U_i = \xi_{i,t} + \xi_{i,j} u_j \quad (22)$$

次に、摂動関数 $\tilde{w}_i$ 、 $\tilde{\theta}$ を次のように定義する。

$$\tilde{w}_i = -\frac{1}{3} \Delta \xi_{(j)}^2 w_{i/(jj)} - \frac{1}{12} N_D \Delta \xi_{(j)}^3 \text{sgn}(U_{(j)}) w_{i/(jjj)} \quad (23)$$

$$\tilde{\theta} = -\frac{1}{3} \Delta \xi_{(\alpha)}^2 \theta_{/(\alpha\alpha)} - \frac{1}{12} N_D \Delta \xi_{(\alpha)}^3 \text{sgn}(U_{(\alpha)}) \theta_{/(\alpha\alpha\alpha)} \quad (24)$$

ここで、 $\Delta \xi_i$ は写像領域での要素の長さ、 N_D は数値粘性の強さを調整するパラメータである。またカッコ付き指標は移流項の指標 j または α と同じ数値を取るものと定義する。上式の右辺第1項は空間の微分作用素の離散化の精度を4次にする働きがあり、右辺第2項は、対流項を上流化する働きを持つ。上記の摂動関数は標準重み関数の2階と3階の微分により作られている。しかし、有限要素近似の際、線形形状関数を使用するために、形状関数に一次式を用いて対流項について高次精度の空間離散化を行う。そこで、以下のような補助関数を採用する。

$$\omega_i = J U_j u_{i/j} \quad (25)$$

$$\phi_{i(j)} = \Delta \xi_{(j)}^2 w_{i/(jj)} \quad (26)$$

$$\lambda = I U_\alpha H_{/\alpha} \quad (27)$$

$$\psi_{(\alpha)} = \Delta \xi_{(\alpha)}^2 \theta_{/(\alpha\alpha)} \quad (28)$$

以上より、式(3)、(5)、(23)、(25)、(26)を用いると、式(20)は次式となる。

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} w_i u_{i/\tau} J d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} (w_i \omega_i - \frac{1}{3} J U_j \phi_{i(j)} u_{i/j} \\ - \frac{1}{12} N_D \Delta \xi_{(j)}^3 J |U_j| \phi_{i(j)/(j)} u_{i/j}) d\bar{\Omega} \\ + \int_{\bar{\Omega}} \frac{1}{Re} \xi_{k,j} w_{i/k} (\xi_{n,j} u_{i/n} + \xi_{n,i} u_{j/n}) J d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}} \xi_{j,i} w_{i/j} P J d\bar{\Omega} \\ = \int_{\bar{\Gamma}} w_i \sigma_i I d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (29)$$

同様に、式(24)、(27)、(28)を使えば、式(21)は次式となる。

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Gamma}_3} \theta H_{/\tau} I d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}_3} (\theta \lambda - \frac{1}{3} I U_\alpha \psi_{(\alpha)} H_{/\alpha} \\ - \frac{1}{12} N_D \Delta \xi_{(\alpha)}^3 I |U_\alpha| \psi_{(\alpha)/(\alpha)} H_{/\alpha}) d\bar{\Gamma} \\ - \int_{\bar{\Gamma}_3} \theta u_3 I d\bar{\Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

補助関数式(25)～式(28)の重み付き残差方程式はそれぞれ以下のようになる。

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{\omega}_{(i)} \omega_i d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} J U_j \bar{\omega}_{(i)} u_{i/j} d\bar{\Omega} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\phi}_{(ij)} \phi_{i(j)} d\bar{\Omega} = - \int_{\bar{\Omega}} \Delta \xi_{(j)}^2 \bar{\phi}_{(ij)/(j)} w_{i/(j)} d\bar{\Omega} \\ + \int_{\bar{\Gamma}} \Delta \xi_{(j)}^2 \bar{\phi}_{(ij)} w_{i/(j)} n_{(j)} d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\int_{\bar{\Gamma}_3} \bar{\lambda} \lambda d\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}_3} I U_\alpha \bar{\lambda} H_{/\alpha} d\bar{\Gamma} \quad (33)$$

$$\int_{\bar{\Gamma}_3} \bar{\psi}_{(\alpha)} \psi_{(\alpha)} d\bar{\Gamma} = - \int_{\bar{\Gamma}_3} \Delta \xi_{(\alpha)}^2 \bar{\psi}_{(\alpha)/(\alpha)} \theta_{/(\alpha)} d\bar{\Gamma}$$

$$+ \int_{\bar{S}_3} \Delta \xi_{(\alpha)} \bar{\psi}_{(\alpha)} \theta_{/(\alpha)} n_{(\alpha)} d\bar{S} \quad (34)$$

ここで、 $\bar{\omega}_{(i)}$ 、 $\bar{\phi}_{(ij)}$ 、 $\bar{\lambda}$ 、 $\bar{\psi}_{\alpha}$ は標準重み関数を表す。

次に、連続方程式(2)と圧力のポアソン方程式(6)に関する重み付き残差方程式は、 q と $\bar{P}$ を重み関数として写像空間内でそれぞれ以下のようになる。

$$\int_{\Omega} \xi_{k,i} q u_{i/k} J d\bar{\Omega} = 0 \quad (35)$$

$$\int_{\Omega} \xi_{k,i} \xi_{l,i} \bar{P}_{/k} P_{/l} J d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} \xi_{j,i} \bar{P} \bar{u}_{i/j} J d\bar{\Omega} + \int_{\Gamma} \xi_{l,i} \bar{P} P_{/l} n_i d\bar{\Gamma} \quad (36)$$

以上が微分方程式系の弱表現である。これらは有限要素近似によって離散系へ変換される。

4. 有限要素方程式

前章で示した各弱表現に対し、通常の線形要素を採用した有限要素近似を行う。まず、式(29)、(31)、(32)は次のような離散方程式で表すことができる。

$$\mathbf{W}^t \mathbf{M} \mathbf{V}_{/\tau} + \mathbf{W}^t \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{A}_3 \mathbf{V} - \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{A}_4 \mathbf{V} + \mathbf{W}^t \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{W}^t \mathbf{C} \mathbf{P} = \mathbf{W}^t \mathbf{F} \quad (37)$$

$$\mathbf{M}_0 \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}_1 \mathbf{V} \quad (38)$$

$$\mathbf{M}_0 \boldsymbol{\Phi} = -\mathbf{B}_2 \mathbf{W} \quad (39)$$

同様に式(30)、(33)、(34)は以下のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\Theta}^t \bar{\mathbf{M}} \mathbf{H}_{/\tau} + \boldsymbol{\Theta}^t \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{\Psi}^t \mathbf{E}_3 \mathbf{H} - \boldsymbol{\Psi}^t \mathbf{E}_4 \mathbf{H} - \boldsymbol{\Theta}^t \bar{\mathbf{M}} \mathbf{V}_3 = 0 \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_0 \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{E}_1 \mathbf{H} \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_0 \boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{D}_2 \boldsymbol{\Theta} \quad (42)$$

ここで、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{W}$ 、 $\boldsymbol{\Omega}$ 、 $\boldsymbol{\Phi}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\boldsymbol{\Theta}$ 、 $\boldsymbol{\Lambda}$ 、 $\boldsymbol{\Psi}$ 、 $\mathbf{V}_3$ は u_i 、 P 、 w_i 、 ω_i 、 ϕ_{ij} 、 H 、 θ 、 λ 、 ψ_{α} 、 u_3 に関する未知節点ベクトル、 $\mathbf{F}$ は外力のベクトル、他のものはそれぞれ行列を表す。式(38)と式(39)を式(37)へ代入し、整理すると

$$\mathbf{M} \mathbf{V}_{/\tau} + (\mathbf{N} + \mathbf{K}) \mathbf{V} - \mathbf{C} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (43)$$

となり、移流項の行列 $\mathbf{N}$ は以下の行列の計算によって与えられる。

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}_1 \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2^t \mathbf{M}_0^{-t} \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_2^t \mathbf{M}_0^{-t} \mathbf{A}_4 \quad (44)$$

同様に、式(41)と式(42)を式(40)へ代入し、整理すると

$$\bar{\mathbf{M}} \mathbf{H}_{/\tau} + \bar{\mathbf{N}} \mathbf{H} - \bar{\mathbf{M}} \mathbf{V}_3 = 0 \quad (45)$$

となり、移流項の行列 $\bar{\mathbf{N}}$ は以下の行列の計算によって与えられる。

$$\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{D}_1 \bar{\mathbf{M}}_0^{-1} \mathbf{E}_1 + \mathbf{D}_2^t \bar{\mathbf{M}}_0^{-t} \mathbf{E}_3 + \mathbf{D}_2^t \bar{\mathbf{M}}_0^{-t} \mathbf{E}_4 \quad (46)$$

上記行列 $\mathbf{N}$ 、 $\bar{\mathbf{N}}$ の右辺第1項と2項の和が移流項 $U_j u_{i/j}$ 、 $U_{\alpha} h_{/\alpha}$ に関する4次精度の中心近似で、第3項が4階3次の数値粘性項を表し、全体として上流化が計られる。式(35)と式(36)の有限要素方程式は、それぞれ以下のように書くことができる。

$$\mathbf{R} \mathbf{V} = 0 \quad (47)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{P} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{G} \quad (48)$$

ここで、 $\mathbf{S}$ と $\mathbf{R}$ は行列、 $\mathbf{G}$ は圧力の境界条件から得られるベクトルである。

5. 計算手順

以上から計算手順は時間ステップを n として以下のようにする。

1. $n = 0$ とおき $\mathbf{V}^0$ 、 $\mathbf{H}^0$ に初期値を設定する。
2. 行列 $\bar{\mathbf{M}}$ と $\bar{\mathbf{N}}$ を作る。
3. $\mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{H}^n + \Delta t(\mathbf{V}_3^n - \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{H}^n)$ を計算する。
4. 自由表面の移動に伴う有限要素の再配置を行う。
5. 再配置後における節点座標ベクトル及び流速ベクトルを再配置前の各データをを用いて算出する。
6. 行列 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{C}$ を作成する。
7. $\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{N}^n + \mathbf{K}) \mathbf{V}^n$ の計算を行う。
8. $\mathbf{S} \mathbf{P}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{R} \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{R} \bar{\mathbf{F}}^{n+1} + \mathbf{G}^{n+1}$ より $\mathbf{P}^{n+1}$ を計算する。 $\bar{\mathbf{F}}^{n+1}$ は境界上の粘性力のベクトルを表す。
9. $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}^{n+1} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}^{n+1}$ の計算を行う。
10. $n \leftarrow n+1$ に置き2)へ戻り、必要な時間まで繰り返し計算する。

6. 数値解析例

6.1. 孤立波反射問題

6.1.1. 問題の設定

この問題は計算スキームの検討に適しており、多くの研究者によって計算されてきた^[5,6]。図1に示すように一様水深 h 、水路長 $2l$ を持つ水槽の中央に孤立波を与えた。図2に使用した有限要素メッシュの一部を示す。また固定壁面上で、滑り有りの条件を与えた。数値計算では、代表長 $L = h = 1$ 、代表流速 $V = \sqrt{gh} \cdot H_0/h$ により無次元化し、水路長 $l = 8.0$ 、最大波高 H_0 と設定した場合について解析を行い、波の伝播及び反射の過程を示す。初期条件として与える孤立波は、Laitoneの近似式^[7,8]を用い、以下のように与えた。

$$u_1 = \text{sech}^2 \left[\left(\frac{3H_0}{4} \right)^{\frac{1}{2}} x_1 \right] \quad (49)$$

図 1: 問題の設定

図 2: 有限要素メッシュ (一部)

$$u_2 = \sqrt{3}(H_0)^{\frac{1}{2}}(1+x_3)\operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{3H_0}{4}\right)^{\frac{1}{2}}x_1\right]\tanh^2\left[\left(\frac{3H_0}{4}\right)^{\frac{1}{2}}x_1\right] \quad (50)$$

$$H = H_0\operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{3H_0}{4}\right)^{\frac{1}{2}}x_1\right] \quad (51)$$

この時のフルード数は、

$$Fn = \frac{V}{\sqrt{gL}} = H_0 \quad (52)$$

となり、レイノルズ数 Re は、 10^4 として与えた。

6.1.2. 結果と考察

図3～16は、初期の最大波高 $H_0 = 0.2$ の時の結果を示したものである。図3～5は、横軸に x_1 座標、縦軸に駆け上がり高さ R をとり、孤立波の伝播過程を示したものである。図3において初期状態から孤立波が右壁に駆け上がる様子が捉えられている。また図4において波が元の位置に戻った時、波形、波高とも良く保持されている。図5は孤立波が中央から左へ移動し、左壁に駆け上がる様子を示したものである。

図6は右壁方向から元の位置に戻った時刻 $t = 2.91$ における波の状態である。図中の—がLaitoneによる近似理論解、○が本解析結果である。ここでは、ほぼ波形の保持がされているが、固定壁近傍の水位上昇量に差異が見られる。これは、粘性の効果による減衰であると考えられる。図7～16に領域全体における解析結果を示す。図中の(a)はメッシュ図、(b)は流速ベクトル図、(c)は等圧力線図を示す。各時刻とも流れ場は安定しており、圧力の振動などは見られず安定的に解析が行われていることが分かる。ここで、時刻 $t = 1.455, 4.365$ における流速ベクトル図10(c)、図16(c)を見ると、流速ベクトルがほとんど現れていない。これにより孤立波の進行が止まり、流れ場内が瞬間的に静止状態にあることが分かる。その後、波が逆方向に進行していくという孤立波の反射のメカニズムが良く捉えられている。

さらに詳しい検討を行う。孤立波の波速は、Laitoneの近似

式より無次元表示で、

$$c = \frac{(1 + \frac{1}{2}H_0)}{H_0} \quad (53)$$

と表すことができる。よって、波速の近似理論解は(53)式より初期の最大波高 $H_0 = 0.2$ を代入すれば $c = 5.5$ と計算され、孤立波が水路中央より右壁に到達するまでに要する無次元時間 t は、 $t = 8.0/5.5 = 1.455$ と計算される。解析結果では、図4から $t = 1.455$ の時に右壁への駆け上がり高さが最大となっており、近似理論解を再現している。次に、右壁への駆け上がり高さについて検討を行う。同様にLaitoneの近似式により、駆け上がり高さ R は無次元表示で、

$$R = 2H_0 + \frac{1}{2}(H_0)^2 \quad (54)$$

となり、初期の最大波高 $H_0 = 0.2$ を代入すると、 $R = 0.42$ と計算される。この時、解析結果は0.454でありほぼ近似理論解との一致が見られている。ただし、駆け上がり高さに現れる誤差は、固定壁近傍の要素分割の粗さに起因するものと考えられる。また、波が右壁に駆け上がり、再び元の位置に戻った時 $H_0 = 0.2$ であった波高が0.18となっており、一割ほどの減衰が見られた。これは、粘性の効果によるものと考えられる。

図17は初期波高 H_0 を変化させた時の孤立波の右壁への駆け上がり高さ R を示したものである。図中の●はCamfieldら[9]による実験値、○が本解析結果、—が近似理論解である。これより本解析結果が、近似理論解よりも実験値にほぼ

図3: 孤立波の伝播経過

($t = 0.0 \sim 1.455, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図4 孤立波の伝播経過

($t = 1.455 \sim 2.910, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 5: 孤立波の伝播経過
($t = 2.910 \sim 4.265, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 6: Laitone の近似理論解との比較
($t = 2.910, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 7: 孤立波の解析結果 ($t = 0.0, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 8: 孤立波の解析結果 ($t = 0.48, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 9: 孤立波の解析結果 ($t = 0.96, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 10: 孤立波の解析結果 ($t = 1.455, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 11: 孤立波の解析結果 ($t = 1.92, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 12: 孤立波の解析結果 ($t = 2.4, Re = 10^4, Fn = 0.2$)

図 1 3: 孤立波の解析結果 ($t = 2.91, Re = 10^4, Fn = 0.2$) 図 1 4: 孤立波の解析結果 ($t = 2.91, Re = 10^4, Fn = 0.2$) 図 1 5: 孤立波の解析結果 ($t = 3.84, Re = 10^4, Fn = 0.2$) 図 1 6: 孤立波の解析結果 ($t = 4.365, Re = 10^4, Fn = 0.2$) 図 1 7: 駆け上がり高さ R

一致していることがわかる。

これは、本解析が粘性を考慮に入れたため実現象に近い解を示していると考えられる。

6. 2. 正方キャビティ内流れ問題

6. 2. 1. 問題の設定

正方キャビティ流れ問題は、3つの壁を固定壁、残る壁を一定速度により移動する壁とし、それにより駆動される流れを対象とするもので、計算スキームの検証に適し、これまで多くの研究者によって解析が行われてきた^[10,11]。しかし、本論文では図 1 8に示すようにキャビティの上壁を自由表面とし下壁に一定流速を与えた場合の解析を行う。左右壁は滑り有りの条件を設定した。この様な条件の下で、自由表面の上下動の変化を捉える。図 1 9に解析に用いた有限要素メッシュを示す。図のように境界層を精度良く評価するため、境界壁近傍にメッシュを寄せた不等分割メッシュを用いた。本解析では、代表長 $L = h = l$ 、レイノルズ数 $Re = 400$ 、フルード数 $Fn = 2.0$ 、下壁に与える無次元流速を $\hat{u} = 1.0$ とし解析を行った。

図 1 8: 問題の設定

図 19: 有限要素メッシュ

6.2.2. 結果と考察

図 20 ~ 21 に非定常状態における解析結果を示す。(a) はメッシュ図、(b) は等圧力線図、(c) は流速ベクトル図をそれぞれ示している。下壁の移動による右上部自由表面の上昇が認められる。等圧力線図より、下方右隅の一次渦が形成されている位置で圧力の勾配が大きい。これは従来の自由表面条件を考慮しない解析にも現れる現象である。本解析結果は圧力の振動も現れず妥当な解が得られ、自由表面条件の付加による流れ場の特徴をよく捉えているといえる。

(a) メッシュ図

(b) 等圧力線図

(c) 流速ベクトル図

図 20: 正方キャビティの解析結果
($t = 1.0, Re = 400, Fn = 2.0$)

(a) メッシュ図

(b) 等圧力線図

(c) 流速ベクトル図

図 21: 正方キャビティの解析結果
($t = 2.7, Re = 400, Fn = 2.0$)

7. おわりに

自由表面を有する非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値解を安定に計算するための 3 次上流有限要素スキームを示してきた。この上流スキームの中に組み込まれる数値粘性は流速の 4 階微分で表現されており、ナビエ・ストークス方程式の中の粘性とは直接比例しない。したがって、数値計算する上で粘性を過大評価する事がなく、適切に数値計算を行うことができる。孤立波反射問題において本解析結果は、近似理論解と実験結果に良く一致し、本手法が実現象を良くシミュレートできることを示した。また、正方キャビティ内流れ解析では、自由表面の変化を安定的に捉えることができ、本手法の有効性が示された。

参考文献

- [1] N. Kondo, N. Tosaka and T. Nishimura, Numerical Simulation of Viscous Flows by the Third-Order Upwind Finite Element Method, Theoretical and Applied Mechanics, 39,

University of Tokyo Press, 237-250, 1990.

[2] 武本行正, 武内智行, 奥村博司, 薦田広章, 自由表面および内部境界面をもつ開水路非定常流の数値解析法, 農業土木学会誌, 第50巻, 第6号, 487-503, 1982年.

[3] A. A. Amsden and F. H. Harlow, A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, J. Comp. Phys., Vol.6, 322-325, 1970.

[4] H. Miyata, H. Kajitani, N. Suzuki and C. Matsukawa, Numerical and experimental analysis of nonlinear bow and stern waves of a two-dimensional body (First report), J. Society Nav. Arch. of Japan, Vol.154, 1983.

[5] J. Fenton, A ninth-order solution for the solitary wave, J. Fluid Mech., Vol.53, 257-271, 1972.

[6] B. Ramaswamy, M. Kawahara, Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow, I. J. for Num. Methods in Fluids, Vol.7, 1053-1075, 1987.

[7] E. V. Laitone, The second approximation to cnoidal and solitary waves, J. Fluid Mech., Vol.9, 430-444, 1960.

[8] R. Grimshaw, The solitary wave of variable depth. Part 2, J. Fluid Mech., Vol.46, Part 3, 611-622, 1971.

[9] Camfield F. E. and R. L. Street, An investigation of the deformation and breaking of solitary waves, Dept. of Civil Engineering Technical Report, 81, Stanford Univ., 1967.

[10] M. Nallasamy and K. K. Prasad, On cavity flow at high Reynolds numbers, J. Fluid Mech., Vol.79, part2, 391-414, 1977.

[11] U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and a multigrid method, J. of Comp. Physics., 48, 387-411, 1982.

[12] 岩津玲磨, 玄在民, 桑原邦郎, 自由表面のあるキャビティ内の流れ, 第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 373-376, 1991年.

[13] N. Kondo, N. Tosaka and T. Nishimura, Computation of incompressible viscous flows by the third-order upwind finite element method, Internat. J. Numer. Meths. Fluids, Vol.15, 1013-1024, 1992.

[14] N. Kondo, N. Tosaka and T. Nishimura, Third-order upwind finite element formulations for incompressible viscous flow problems, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.93, 169-187, 1993.

[15] P. B. Leonard, A survey of finite differences with upwinding for numerical modeling of the incompressible convective diffusion equation, AIAA-paper, AIAA-84-0340, Vol.19.

[16] J. Donea, S. Giuliani, H. Laval and L. Quartapelle, Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 30, 53-73, 1982.

[17] 武本行正, 田中雅史, 中村佳朗, 自由表面をもつTrench内流れと水中減勢工流れの数値解析, 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1990年.

[18] 武本行正, 田中雅史, 中村佳郎, 一般化座標Staggered Grid系での自由境界問題解析について, 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 381-384, 1992年.

[19] 滝沢昭彦, 近藤駿介, 物理成分BFC法による自由液面の解析, 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 553-556, 1990年.

[20] 三輪俊彦, 川原睦人, 波の挙動に関する非定常有限要素解析, 第4回流れの有限要素解析シンポジウム論文集, 129-136, 1983年.

[21] 高木周, 松本洋一郎, 反変速度による3次元自由表面流れの数値計算手法, 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 641-644, 1993年.

[22] 千葉賢, 桑原邦郎, 鉛直円柱回りの自由表面波の解析, 第3回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 295-298, 1989年.

[23] 滝沢昭彦, 近藤駿介, 容器内自由液面流揺動発生条件, 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 399-402, 1992年.

[24] 秋元博路, 杉原正記, 宮田秀明, 波の中を進行する水平円柱の渦運動と流体力, 日本造船学会論文集, 第170号, 253-263, 1993年.

[25] B. Ramaswamy, 川原睦人, ラグランジュ・オイラー混合型有限要素法による自由表面問題の解析, 第7回流体力学における数値解析法シンポジウム講演論文集, 275-282, 1986年.

[26] 秋本博路, 宮田秀明, 朱明, 移動境界問題のシミュレーション, 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 385-388, 1992年.

[27] 近藤典夫, 西村敏雄, 加納充浩, 非圧縮粘性流れの3次元上流有限要素シミュレーション, 日本建築学会構造系論文集, 第458号, 153-161, 1994年.

[28] 西村敏雄, テンソルとシュール理論, 彰国社, 1977年.

(1995年12月28日原稿受理, 1996年8月22日採用決定)