Maxwell 型の粘性ダンパーを有するせん断型構造物の
地震時指定層間変位に対する剛性設計解列STIFFNESS DESIGN SEQUENCE OF A SHEAR BUILDING WITH
MAXWELL TYPE VISCOUS DAMPERS
FOR SPECIFIED SEISMIC DRIFTS

辻 聖晃*, 中村 恒善**

Masaaki TSUJI and Tsuneyoshi NAKAMURA

A new method seismic stiffness design is developed for a shear building with Maxwell type viscous dampers. A sequence of stiffness designs is generated with respect to a sequence of flexibility of spring elements in Maxwell type viscous dampers such that each mean maximum interstory drift would coincide with the specified value subject to a set of spectrum-compatible design earthquakes. With the use of the predominance of the fundamental participation component, proposed is an approximation formula to evaluate the upper bound for maximum interstory drifts in case that some viscous dampers does not function. Several design examples are presented to demonstrate the usefulness of the proposed design method. The results of time-history response analysis demonstrate the accuracy of this method and the proposed approximation formula.

Keywords: response constrained design, viscous dampers, stiffness design sequence,
Maxwell element, shear building, singular perturbation

応答制約設計、粘性ダンパー、剛性設計解列、マックスウェル要素、せん断型構造物、特異摂動

1. 序

粘性流体や極低降伏点鋼等の高いエネルギー吸収能力を用いた受動的制振機構は、高層建築物の地震や風による動的応答を抑制する手段として数多くの高層建築物に設置されてきた実績を有する¹⁾。なかでも粘性ダンパーや粘弾性ダンパー（以下両者をまとめて単に粘性ダンパーと呼ぶ）²⁾は、小振幅から大振幅まで安定したエネルギー吸収能力を発揮するので、建築物に頻繁に作用する微小な外乱から、使用年限において一度経験するかしないかのような大きな外乱まで、極めて広範囲にわたる応答抑制効果が期待できる。

粘性ダンパー自身の機械的特性は、減衰材として使用される材料によりかなり異なる³⁾。しかしながら、実地震波を用いた大スケールの振動台実験での観測結果と、ダンパーに使用される材料に応じた適切なダンパー—構造物系のモデル化に基づく数値シミュレーション結果は良い精度で一致することが報告されている⁴⁾。従って、ダンパー—構造物系の適切なモデル化に基づいて展開された、ダンパーの最適配置理論やダンパーを有する建築物の耐震設計理論は、実際上の意義を有しているといえる。

粘性ダンパーの最適配置法やダンパーを有する建築物の耐震設計法に関する既往の研究^{5)~10)}のほとんどでは、ダッシュポット要素あるいはダッシュポット要素とバネ要素を並列に連結したVoigt要素と

してモデル化したダンパーを、せん断型構造物の各層間に挿入した構造物モデルが用いられている。このような構造物モデルを本論文ではSBVDモデル(Shear Building with Viscous Dampers)と呼ぶことにする。SBVDモデルのような単純なモデル化に基づく理論展開は、構造物の特性（剛性や減衰）設計法の基本的なストーリーを構成したり、設計解の基本的な特徴を明らかにするうえでは極めて有効である。しかしながら、SBVDモデルでは、ダンパーを主骨組に取付けるためのブレースやプレキャスト版などの部材（以下ではこれらを単に「ブレース」と呼ぶことにする）の柔性がダンパーによる応答抑制効率に与える影響を考慮することは、ダッシュポット要素の減衰係数をブレースの柔性に応じて低減させるなどの特別な工夫を用いない限り、不可能である。

本論文の目的は、粘性ダンパーを有する建築物に対して、ブレース柔性を考慮した主骨組の剛性設計理論を構成し、ブレース柔性が剛性設計解にどのような影響を与えるのかを明らかにすることにある。なお、本論文における「剛性設計」とは、「設計用応答スペクトルに適合する設計用地震動群に対する平均最大層間変位分布が、設計者が指定した分布に一致するように、主骨組の剛性分布を見いだすこと」を指す。本論文では、平面せん断型構造物にモデル化した主骨組の各層間に、ダッシュポット要素とバネ要素を直列に連結

* 京都工芸繊維大学工学部造形工学科 助手・工修

** 京都大学工学部建築学第二学科 教授・Ph.D., 工博

Research Assoc., Dept. of Architecture and Design, Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, M. Eng.
Prof., Dept. of Architectural Engineering, Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Ph.D., Dr. Eng.

したMaxwell要素にモデル化したダンパー—ブレース系を挿入した構造物モデル（Shear Building with Maxwell type Viscous Dampers, SBMVDモデル）を、粘性ダンパーを有する建築物の、ブレース柔性を考慮できる最も単純なモデルとして採用する。

丹羽ら¹³⁾は、SBMVDモデルにおいて、粘性ダンパーの減衰係数分布を変化させずにその大きさのみを相似的に変化させた場合に、複素固有値解析によって得られる構造物の固有周期と減衰比が、減衰係数に関して非線形に変化する様子を示し、一次減衰比を最大にする減衰係数が存在することを明らかにした。このことは、大きな減衰性能を有する粘性ダンパーを組み込んだ構造物の応答評価の際には、ブレース柔性を考慮しない方法では減衰比を過大評価し、結果的に応答値を過小評価する可能性があることを示している。

近年では、一次減衰比が20%にも達するような高減衰性能を粘性ダンパーによって付加した建築物も施工されている¹⁷⁾。粘性ダンパーに限らず、履歴ダンパー¹⁸⁾や摩擦ダンパー¹⁹⁾などの受動的制振機構を有する建築物においては、外乱作用時の入力エネルギーをダンパーで吸収させる割合が大きくなるほど、ブレース柔性が応答に与える影響も大きくなると予想される。従って、各種ダンパーの導入によって外乱作用時の応答を格段に低減させた建築物を設計する際には、ブレース柔性を考慮することが不可欠であるといえる。

本論文で提示する剛性設計理論は以下の特徴を有している。SBMVDモデルは、ブレース柔性がゼロ（剛性が無限大）の場合には、SBVDモデルと等価である。本論文ではこの点に着目し、SBVDモデルの剛性設計解¹⁹⁾を初期解として、一つのパラメタの関数として表現されるブレース柔性の列に対応する層剛性設計解の列を、区分的テイラー展開手法^{20,21)}により連続的に見いだす。この際、ゼロ柔性をブレース柔性列の起点とすることに起因する特異性²²⁾を排除するために、適切な変数変換を実施する。本提案手法による剛性設計解列生成過程においては、固有値解析や従来の設計感度解析の手順を一切必要としない。

制振機構を建築物に導入する動機は以下のように整理される。(1) 通常より格段に厳しい構造設計目標（例えば設計用強震時最大層間変形角が1/400以下）を満足する建築物を、通常の構造設計目標（例えば設計用強震時最大層間変形角が1/200以下）を満足する建築物の構造コストから実務上対応できるコスト増で設計したい。(2) 通常と同じかあるいはそれよりもやや厳しい構造設計目標を満足する建築物を、通常よりも少ない構造コストで設計したい。(3) 主骨組の部材断面変更だけでは構造設計目標を満足する設計を見いだすことが不可能あるいは困難である。本研究では、(1)の動機に基づいた構造設計目標を想定している。このとき、指定する構造設計目標のレベルを調整することにより、設計時に想定した強度レベルの地震動に対してダンパーが想定した減衰性能を発揮しなかったとしても、通常レベルの構造設計目標を十分満足するように建築物を設計することも可能である。この意味で、ダンパーの減衰係数分布が最初に指定され^{注1)}、その後主骨組の剛性分布が構造設計目標を満足するように決定されるという、本研究で提案する設計手順は、実際の構造設計に対して有用であるといえる。

制振機構を有する建築物に対しては、主骨組を設計した後に制震機構のみを（最適）設計する方法^{9,11)}、制震機構の特性を一つのパラ

メタを残して与えて主骨組の剛性をそのパラメタの関数として求める方法¹⁵⁾、主骨組と制震機構を同時に（最適）設計する方法^{14,16)}など、さまざまな立場での設計理論が提案されており、それぞれ実際上有意義であるといえる。本論文で提示する設計手法は、ブレース柔性を制震機構の特性と考えるならば第二番目の立場に属する。

本論文では、粘性ダンパーを有する構造物の、ブレース柔性を考慮した剛性設計理論の最も基本的なストーリーを提示するために、ダンパー自身は減衰係数が振幅や振動数に無関係な一個のダッシュポット要素によって表現する。一個のダッシュポット要素では表現できないようなダンパー（例えば粘弾性ダンパー）を有する建築物に対しては、ダンパーを有限個のパネ要素とダッシュポット要素の組み合わせで表現することにより、特別な工夫を要することなく、本研究の方法を適用して剛性設計解を見いだすことが可能である。

2. 設計用モデルと設計用地震動

2.1 設計用モデル

Fig.1(a),(b)に示すような、粘性ダンパー（以下単にダンパー）を有する建築物の基本モデルとして、ダンパーとその取付け部材は弾性パネ要素とダッシュポット要素を直列に連結したMaxwell要素で、梁と柱から構成される主骨組は、各層を弾性パネ要素とダッシュポット要素を並列に連結したVoigt要素で表現した構造物モデルを採用し、これを「SBMVDモデル」と呼ぶことにする（Fig.2(a)）。また、ダンパー取付け部材は、単に「ブレース」と呼ぶことにする。SBMVDモデルにおいて、第 j 層床面集中質量、構造減衰係数及び層剛性をそれぞれ、 m_{sj} 、 c_{sj} 及び k_{sj} で表し、第 j 層のダンパーとブレースに関わる付加質量、ダンパー減衰係数及びブレース剛性をそれぞれ、 m_{vj} 、 c_{vj} 及び k_{vj} で表す。ブレースに関する構造減衰は、構造物全体の挙動に与える影響が小さいものとみなして省略する。また、 m_{vj} は m_{sj} に比べて十分小さいものとする。第 j 層床と第 j 層付加質点の地表面に対する相対水平変位をそれぞれ、 y_{sj} と y_{vj} で表し、第 j 層床と第 $j-1$ 層床の相対変位 $y_{sj} - y_{s(j-1)}$ を δ_{sj} で表す（Fig.2(b)）。SBMVDモデルにおいて、ブレース剛性を無限大としたモデルを特に、SBVDモデルと呼ぶことにする。なお以下では、ある変数 x_j の集合 $\{x_1, \dots, x_n\}$ を、ベクトル $\mathbf{x}$ を用いて表す。

Fig. 1. Two types of viscous (visco-elastic) dampers

Fig. 2. SBMVD model

一般化変位ベクトル $\mathbf{y} = \{y_s^T y_v^T\}^T$ を次式で定義する。

$$\mathbf{y} = \{y_{s1} \dots y_{sf} y_{v1} \dots y_{vf}\}^T \quad (1)$$

ここで、上添字 T は転置を表す。SBMVDモデルに水平地動加速度 $\ddot{y}_g$ が作用するときの運動方程式は以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_s \\ \ddot{\mathbf{y}}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_{v11} & \mathbf{C}_{v12} \\ \mathbf{C}_{v12}^T & \mathbf{C}_{v22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_s \\ \dot{\mathbf{y}}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_v & -\mathbf{K}_v \\ -\mathbf{K}_v & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_s \\ \mathbf{y}_v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \ddot{y}_g \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{M}_s$ 、 $\mathbf{C}_s$ 及び $\mathbf{K}_s$ はそれぞれ、主骨組に関する質量、構造減衰及び剛性行列であり、 $\mathbf{M}_v$ 、 $\mathbf{C}_{v11}$ 、 $\mathbf{C}_{v12}$ 、 $\mathbf{C}_{v22}$ 及び $\mathbf{K}_v$ は、付加質量、ダンパー減衰係数及びブレース剛性に関する行列である。(2)式における行列とベクトルの中身は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s &= \text{diag}[m_{s1} \dots m_{sf}], \mathbf{M}_v = \text{diag}[m_{v1} \dots m_{vf}], \mathbf{C}_{v11} = \text{diag}[c_{v1} \dots c_{vf}] \\ \mathbf{C}_{v22} &= \text{diag}[c_{v1} \dots c_{vf}], \mathbf{K}_v = \text{diag}[k_{v1} \dots k_{vf}], \mathbf{1} = \{1 \dots 1\}^T \\ \mathbf{C}_s &= \sum_{j=1}^f c_{sj} \mathbf{E}_j, \mathbf{K}_s = \sum_{j=1}^f k_{sj} \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_j = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ & \ddots \\ & j-1 & j \end{bmatrix} \dots j-1 \\ \mathbf{C}_{v12} &= \begin{bmatrix} 0 & -c_{v2} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -c_{vf} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3a-j)$$

ただし、 $\mathbf{E}_j$ 及び $\mathbf{C}_{v12}$ において明示的に書かれていない成分は0である。SBMVDモデルの構造減衰特性は、 $\mathbf{K}_s$ に比例して $\mathbf{C}_s$ が与えられる剛性比例型とする。このとき、構造減衰による一次減衰比を h_s 、非減衰一次固有振動数を $\tilde{\omega}^{(1)}$ で表すと、 $\mathbf{C}_s$ は次のように書ける。

$$\mathbf{C}_s = 2h_s \tilde{\omega}^{(1)-1} \mathbf{K}_s \quad (4)$$

2.2 設計用地震動

本論文では、(2)式において $\ddot{y}_g$ で表現した設計用入力地震動として、強震レベルの地震動群を考え、これを、地震動の加速度、速度及び変位の最大値が適切に評価された設計用応答スペクトルに適合する人工地震動群で定義する。設計用応答スペクトルとしては、Newmark and HallによるDesign Spectrum²³⁾を簡略化したものを採用する。減衰比を h 、固有振動数を ω で表すと、設計用変位応答スペクトル $S_D(\omega; h)$ は、 ω の値に応じて次式の内のどれかで表される。

$$\begin{aligned} S_D^A(\omega; h) &= \ddot{u}_{gmax} \{3.21 - 0.68 \ln(100h)\} \omega^{-2} \quad (\omega_U \leq \omega) \\ S_D^V(\omega; h) &= \dot{u}_{gmax} \{2.31 - 0.41 \ln(100h)\} \omega^{-1} \quad (\omega_L \leq \omega \leq \omega_U) \\ S_D^D(\omega; h) &= u_{gmax} \{1.82 - 0.27 \ln(100h)\} \quad (\omega \leq \omega_L) \end{aligned} \quad (5a-c)$$

ここで、 $\ddot{u}_{gmax}$ 、 $\dot{u}_{gmax}$ 及び u_{gmax} はそれぞれ、地震動の最大加速度、最大速度、最大変位を表し、本論文では、強震レベルに対応する値として、それぞれ201(cm/s²)、25(cm/s)及び18.75(cm)の値を採用する。 ω_U と ω_L は次式より求める。

$$S_D^A(\omega_U; h) = S_D^V(\omega_U; h), S_D^V(\omega_L; h) = S_D^D(\omega_L; h) \quad (6a,b)$$

なお、本論文で提示する剛性設計法は、固有振動数に関して単調減少型で減衰比に関して単調増加型の変位応答スペクトルを有する設計用地震動であれば適用可能である。

3. 設計用地震動に対する剛性設計問題

3.1 応答評価式

SBMVDモデルはMaxwell要素を含んだ構造物モデルであるために明らかに非比例減衰となる。非比例減衰構造物に対して、SRSS法やCQC法²⁴⁾等の従来の応答スペクトル法を、運動方程式が古典のモード分解によって非連成化されるとする近似（非連成近似²⁵⁾）に基づ

適用すると、最大応答を精度良く評価できない場合がある²⁶⁾。特にSBMVDモデルに対して非連成近似を適用することは、Maxwell要素のバネ剛性を無限大とすることに相当するため（Appendix1）、本論文の目的に対しては適切ではない。

そこで本論文では、複素固有値解析を用いた厳密なモード分解法²⁷⁾に基づく地震時最大応答評価式²⁸⁻²⁹⁾を採用する（Appendix2）。(2)式に対応する複素固有値問題における第 r 次の固有値を $\lambda^{(r)}$ 、第 r 次の固有ベクトルを $\mathbf{u}^{(r)} = \{\mathbf{u}_s^{(r)T} \mathbf{u}_v^{(r)T}\}^T$ で表し、 $\mathbf{u}_s^{(r)}$ と $\mathbf{u}_v^{(r)}$ の第 j 成分をそれぞれ $u_{sj}^{(r)}$ と $u_{vj}^{(r)}$ と表すと、設計用地震動に対するSBMVDモデルの第 j 層平均最大層間変位 δ_{sjmax} の二乗量は次式で評価できる。

$$\delta_{sjmax}^2 = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N S_D^{(r)} S_D^{(s)} \left\{ \rho_{ss}^{(r,s)} a_j^{(r)} a_j^{(s)} + 2\rho_{sc}^{(r,s)} a_j^{(r)} b_j^{(s)} + \rho_{cc}^{(r,s)} b_j^{(r)} b_j^{(s)} \right\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } a_j^{(r)} &= \text{Re} \left[v^{(r)} (u_{sj}^{(r)} - u_{sj}^{(j-1)}) \right], b_j^{(r)} = \text{Im} \left[v^{(r)} (u_{sj}^{(r)} - u_{sj}^{(j-1)}) \right] \\ S_D^{(r)} &= S_D(\omega^{(r)}; h^{(r)}) \end{aligned} \quad (8a-c)$$

ここで、 $\omega^{(r)}$ 、 $h^{(r)}$ 及び $v^{(r)}$ はそれぞれ、第 r 次固有振動数、減衰比及び複素刺激係数を表し、 N は採用次数を表す。 $\rho_{ss}^{(r,s)}$ 、 $\rho_{sc}^{(r,s)}$ 及び $\rho_{cc}^{(r,s)}$ は異なるモード間の相関係数である（Appendix2）。 $\omega^{(r)}$ と $h^{(r)}$ は比例減衰の場合に対応するように、 $\lambda^{(r)}$ と次式で関係付けられる。

$$\omega^{(r)} = |\lambda^{(r)}|, h^{(r)} = -\text{Re}[\lambda^{(r)}] / \omega^{(r)} \quad (9a,b)$$

なお、Maxwell要素を、一次固有振動でのエネルギー的等価性に基づいてVoigt要素に置換して⁷⁾地震時最大応答を評価することも可能ではあるが、「(Maxwellモデルによる応答は、それと等価な) Voigtモデルによる応答を上回る傾向にある³⁰⁾」ので、本研究では採用を見送った。

3.2 設計用地震動に対する剛性設計問題

強震レベルの設計用地震動に対して、SBMVDモデルが満たすべき構造設計目標の一例は、「最大層間変位、ダンパーに生じる最大変形及びブレースに生じる最大変形が、それぞれに対して指定された許容値をいずれも下回り、かつブレースは座屈しないこと」と表現できる。これまでに実用化されている各種ダンパーの許容変形量は、通常の階高を有する建築物において許容される層間変形量よりも一般に大きい。SBMVDモデルにおいては、ダンパーには主骨組の層間変形以下の変形しか生じないので、主骨組に対する構造設計目標が満足される場合には、ダンパーの変形量に関する構造設計目標は自動的に満足されているといえる。さらに本論文では、SBMVDモデルに対する剛性設計法の最も基本的なストーリーを示すために、SBMVDモデルに対する応答制約条件としては主骨組に生じる j 個の層間変形に関するものだけを採用することにし、ブレースが構造設計目標は満たしているかどうかは設計終了後に必要に応じて検証されるものとする。

一方、SBMVDモデルにおいて設計者が選択可能な構造特性量は、主骨組の層剛性集合 $\mathbf{k}_s$ 、ダンパーの減衰係数集合 $\mathbf{c}_v$ 及びブレースの剛性集合 $\mathbf{k}_v$ の合計 $3f$ 個である。このうち、 $\mathbf{c}_v$ と $\mathbf{k}_v$ については、個々の係数を全て独立な設計変数として取り扱うよりも、ある合理的な判断基準（例えばSBVDモデルに対する最適ダンパー配置方針^{16,18)21)}に基づいて $\mathbf{c}_v$ と $\mathbf{k}_v$ の分布を与えるのがより現実的であり、かつ、このように定められた $\mathbf{c}_v$ と $\mathbf{k}_v$ に対して、構造設計目標を満足するように $\mathbf{k}_s$ を見いだすことは、ダンパーを有する建築物の剛性設計法とし

注2)指定層間変位が大きい方から数えて全層数の半分までにある層のみに対して、与えられたダンパー減衰係数の総和の範囲内でダンパーの減衰係数を分配する。ダンパーを分配する層の減衰係数分布は指定層間変位分布と比例させる(要旨)。

で十分合理的であるといえる。従って本論文では、 c_v と k_v は指定量として取り扱い、 k_s を独立な設計変数として取り扱うことにする。

設計者が指定する設計用第 j 層層間変位を $\bar{\delta}_{sj}$ で表すと、本論文で取り扱う地震時応答制約設計問題(Problem of finding an Earthquake-Response Constrained Design)は、次のように述べられる。

Problem ERCD : SBMVDモデルにおいて、主骨組の床面集中質量集合 m 、付加質量集合 m_v 、ダンパーの減衰係数集合 c_v 及びブレース剛性集合 k_v が与えられたとき、制約条件

$$\delta_{sjmax} = \bar{\delta}_{sj} \quad (j = 1, 2, \dots, f) \quad (10)$$

を満足するように、主骨組の層剛性集合 k_s を決定せよ。

振る舞い解析の問題では、 k_s が与えられて δ_{smax} を見いだすのに対して、本問題では、 $\delta_{smax} = \bar{\delta}_s$ が与えられて k_s を見いだす。この意味で、本問題は振る舞い解析問題とは逆の問題構造を有している。なお以下では、「剛性設計解」とは、制約条件(10)を満足する層剛性集合 k_s を指し、「設計解」とは、剛性設計解とそれに属するすべての量(例えば固有ベクトル)の組を指すものとする。

4. 設計解列生成法

4.1 剛性設計解列

問題ERCDの剛性設計解 k_s は、一組の c_v と k_v ごとに決まるので、各 k_{sj} は、 c_v と k_v の関数とみなすことができる。設計者にとっては、一組の c_v と k_v に対してただ一組の k_s が示されるよりも、あるスケールファクターを含んだ一連の c_v と(あるいは) k_v に対して一連の k_s が示されたほうが、(10)式で表される同じ応答制約条件を満足する候補設計解のなかから設計者の主観に基づいて望ましい設計を選択できる、という意味で好都合である。

本論文著者は、SBVDモデルに対し、 c_v がひとつのスケールパラメタの関数として与えられたときに、制約条件(10)を満足する k_s をパラメタのレベルに応じて見いだす剛性設計理論を展開し、SBVDモデルの剛性設計解が有する基本的特徴を明らかにした¹⁹⁾。しかしながら、SBVDモデルの剛性設計解の特徴が、SBMVDモデルにおいてもあてはまるのかどうかは明らかではないし、ブレース剛性を考慮することによって生じる、剛性設計解の新たな特徴もこれまでに明らかにはされていない。

Fig. 3. Correspondence of $\{k_v\}^S$, $\bar{\delta}_s$, and c_v to $\{k_s\}^S$

そこで本論文では、 c_v は予め与え、 k_v をひとつのスケールパラメタの関数として指定して、このパラメタの変化に関する k_s の変化を見いだす問題を取り扱うことにする。ここで α を0から1の値をとる

パラメタとし、 k_v は α の値ごとに一つの集合が与えられるものとする。従って、 k_v と問題ERCDの解 k_s は α の関数とみなすことができ、これをそれぞれ $\hat{k}_v(\alpha)$ と $\hat{k}_s(\alpha)$ と書くことにする。あるひとつの α に対する $\hat{k}_v(\alpha)$ と $\hat{k}_s(\alpha)$ はそれぞれ、設計条件空間内のひとつの点と設計変数空間内のひとつの点に対応しており、 α の列に対応する点列 $\{k_v\}^S = \{\hat{k}_v(\alpha) | \alpha \in [0, 1]\}$ と $\{k_s\}^S = \{\hat{k}_s(\alpha) | \alpha \in [0, 1]\}$ はそれぞれ、設計条件空間内の点列と設計変数空間内の点列に対応している (Fig.3)。 $\{k_v\}^S$ と $\{k_s\}^S$ はそれぞれ、「ブレース剛性列」と「剛性設計解列」と呼ぶことができ、 $\{k_v\}^S$ に対して $\{k_s\}^S$ を見いだす問題は、「剛性設計解列生成問題」と呼ぶことができる^{20,21)}。

SBMVDモデルは、 k_v の全要素が無限大の場合にはSBVDモデルと等価であり、 k_v の全要素がゼロの場合には単純なせん断型構造物モデルと等価である。この両モデルについては、逆問題型定式化に基づいて(10)式を満足する層剛性分布を見いだす方法がすでに提示されている^{15,31)}。 $\hat{k}_v(\alpha)$ の変化に伴う $\hat{k}_s(\alpha)$ の変化を追跡する場合に、既知の剛性設計解を初期剛性設計解 $\hat{k}_s(0)$ として採用することは、初期設計解を見いだすための特別な手順が不必要であるという意味でも、(初期設計解の特徴が十分に明らかにされているならば)初期設計解からの変化の様子そのものが剛性設計問題の基本的な特徴を表現しているという意味でも、好都合である。SBMVDモデルの剛性設計解列生成問題においては、以上に述べた二つの初期設計解候補が存在している。ここで、ブレースの剛性は、ダンパーの効率をなるべく損なわないようにできるだけ十分なものが選択されるのが一般的であることを考慮すると、 k_v の全要素が無限大の場合の剛性設計解を初期解として採用し、 k_v の各要素がある有限な値に達するまでの設計解の経路を追跡する方がより合理的であるように思われる。従って、本論文では、 $\alpha=0$ においてブレース剛性が無限大になるように、ブレース剛性を次式で与える。

$$\hat{k}_v(\alpha) = \frac{1}{\alpha} k_v^d \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (11)$$

ここで、 $k_v^d = \{k_{v1}^d \dots k_{vn}^d\}^T$ は形状パラメタであり、既知の値として与えられるものとする。具体的には、 $\alpha=1$ におけるブレース剛性の終端値を表している。

4.2 剛性設計解列生成法

本論文では、剛性設計解列 $\{k_s\}^S$ を見いだす方法として、区分的テイラー展開手法を用いた設計解列生成法^{20,21)}を採用する。区分的テイラー展開手法においては、あるパラメタレベルにおける設計解が既知であり、かつ、設計問題の支配式における全変数の、スケールパラメタに関する微係数が有限値である必要がある。問題ERCDにおいては、(11)式で定義される関数ベクトル $\hat{k}_v(\alpha)$ が支配式に陽に含まれていると、 $\hat{k}_{vj}(0)$ が無限大となるために $\alpha=0$ における他の変数の微係数を決定することができず、設計解列生成が開始できないという困難点が生じる²²⁾。そこで、本論文では、ブレース剛性の逆数

$$\hat{s}_v(\alpha) \equiv \hat{k}_v(\alpha)^{-1} = \alpha s_v^d \quad (s_{vj}^d \equiv k_{vj}^{d-1}) \quad (12)$$

を導入し、さらに支配式に対して適当な変数変換を施すことによって、この困難点を克服する。 $\hat{s}_v(\alpha)$ を以下では「ブレース柔性」と呼び、点列 $\{s_v\}^S = \{\hat{s}_v(\alpha) | \alpha \in [0, 1]\}$ を「ブレース柔性列」と呼ぶ。

設計解列生成開始点における特異性を除去は、以下のようにしてできる。(2)式に対応する複素固有値問題の支配式において、新たな変数 $\hat{r}^{(r)}(\alpha)$ を導入して

$$\hat{r}^{(r)}(\alpha) = \hat{K}_v(\alpha) \hat{u}_v^{(r)}(\alpha) - \hat{u}_v^{(r)}(\alpha) \quad (13)$$

と変数変換する。ここで、 $\hat{\mathbf{K}}_v(\alpha)$ は第 j 行第 j 列成分が $\hat{k}_{vj}(\alpha)$ の対角行列であるので、 $\hat{\mathbf{K}}_v(\alpha)^{-1}$ は第 j 行第 j 列成分が $\hat{s}_{vj}(\alpha)$ の対角行列となる。これを $\hat{\mathbf{S}}_v(\alpha)$ と書くことにする。(13)式の両辺に $\hat{\mathbf{K}}_v(\alpha)^{-1} = \hat{\mathbf{S}}_v(\alpha)$ を掛ければ、この式も含んだ全支配式から $\hat{k}_{vj}(\alpha)$ を完全に排除することができる。ただし、設計解列生成開始点 ($\alpha=0$) においては、 $\hat{\mathbf{S}}_v(0)$ はゼロ行列であり、かつ $\hat{\mathbf{u}}_s^{(r)}(0) = \hat{\mathbf{u}}_v^{(r)}(0)$ は明らかであるので、(13)式の両辺に $\hat{\mathbf{S}}_v(\alpha)$ を掛けた式からは $\hat{\mathbf{f}}^{(r)}(0)$ の値を決定できない。しかしながら、複素固有値問題の支配式の下半分に(13)式の変数変換を施した式より、 $\alpha=0$ では

$$\hat{\mathbf{f}}^{(r)}(0) = \hat{\lambda}^{(r)}(0) \left\{ \hat{\lambda}^{(r)}(0) \mathbf{M}_v + \mathbf{C}_{v22} + \mathbf{C}_{v12}^T \right\} \hat{\mathbf{u}}_s^{(r)}(0) \quad (14)$$

となる。初期設計解が得られていれば(14)式の右辺は全て既知量であるので、この式より $\hat{\mathbf{f}}^{(r)}(0)$ を決定できる。

設計変数 $\mathbf{k}_s$ が α の関数であるために、 $\mathbf{k}_s$ に対応する固有値や固有ベクトルもまた α の関数となる。従って、それらから得られる最大層間変位の評価値 δ_{sjmax} もまた α の関数であるから、これを $\hat{\delta}_{sjmax}(\alpha)$ と書くことにする。制約条件(10)を α で微分し(12)式を考慮すると次式を得る。

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha)}{\partial k_{si}} \hat{k}_{si}'(\alpha) + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha)}{\partial s_{vi}} s_{vi}'(\alpha) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, f) \quad (15)$$

ここで、プライム(')は α に関する微分を表す。(15)式における $\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha) / \partial k_i$ と $\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha) / \partial s_{vi}$ は、応答評価式(7)に関わる全ての支配式を α で微分し、全変数の微係数を $\hat{k}_{sj}'(\alpha)$ と $s_{vj}'(\alpha)$ を用いて表現するための適当な数学的操作をすることにより得られる。ただし、この操作とそれにより得られる偏導関数の表現は極めて複雑であるので、本論文ではこれらを具体的に示すことは省略する。数式演算処理プログラム(例えばREDUCE³²⁾)を用いることによって、この操作に必要な労力を大幅に削減できる。

α のあるひとつの値 α_1 における全変数が既知であるならば、 $\alpha = \alpha_1$ における $\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha_1) / \partial k_i$ と $\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha_1) / \partial s_{vi}$ はやはり既知の値となる。従って(15)式は、 $\alpha = \alpha_1$ における剛性解の微係数ベクトル $\hat{\mathbf{k}}_s'(\alpha_1)$ についての以下のような連立一次方程式とみなせる。

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha_1) \hat{\mathbf{k}}_s'(\alpha_1) = -\hat{\mathbf{B}}(\alpha_1) \mathbf{s} \quad (16)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{A}}(\alpha_1)$ と $\hat{\mathbf{B}}(\alpha_1)$ はそれぞれ、 $\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha_1) / \partial k_i$ と $\partial \hat{\delta}_{sjmax}(\alpha_1) / \partial s_{vi}$ を第 j 行第 i 列成分として有する f 次元の正方行列である。(16)式を $\hat{\mathbf{k}}_s'(\alpha_1)$ について解けば、 $\alpha = \alpha_1$ の近傍における剛性設計解を次式のテイラー展開式で表すことができる。

$$\hat{\mathbf{k}}_s(\alpha) = \hat{\mathbf{k}}_s(\alpha_1) + (\alpha - \alpha_1) \hat{\mathbf{k}}_s'(\alpha_1) \quad (17)$$

他の変数についても、(17)式と同様の式によって、 $\alpha = \alpha_1$ の近傍における値を得る。 $\alpha=0$ における初期設計解を出発点として、 α の適当な刻みごとにこの操作を繰り返し適用すれば、複素固有値解析や従来の設計感度解析を全く実行することなく、剛性設計解列 $\{\mathbf{k}_s\}^s$ を連続的に生成できる。

5. ダンパー非機能時の最大応答の概算式

ダンパーを有する構造物では、地震時にダンパーが設計時の想定通りに機能しなかった場合の耐震安全性の検討が必要となる。しかしながら、故障するダンパーの位置や程度は不確定であり、従って、想定されるダンパーの故障率に応じた最大応答の上限を知ることができれば、実際上は十分であるといえる。なお、ダンパーの故障には、非可動となることにより減衰係数が見掛け上無限大になる場合

と、オイル漏れや粘弾性体の破断により減衰係数がゼロになる場合の両者が考えられるが、ここでは後者の場合についてのみ考察する。

ダンパーが機能しなくなることによる影響は、(1)応答スペクトルの変化と、(2)ダンパーによる付加剛性効果(Appendix3)の消失による当該層の刺激ベクトル(刺激係数と固有ベクトルの積)の変化、の二点に最も顕著に表れる。このことに着目して、一部のダンパーが機能しない場合の設計用地震動に対する最大応答の上限値の近似式を導く。なお、以下では、一部ダンパーが機能しない場合の各種応答量にはアスタリスクを付けて表すことにする。

まず次の仮定と近似を導入する：[仮定1] 全ダンパーが機能しないとしても主骨組は弾性範囲内に留まる；[仮定2] SBMVDモデルの地震時最大応答においては、一部のダンパーが機能しない場合でも一次固有振動成分が大きく卓越する；[仮定3] 一部のダンパーが機能しなかった場合の一次減衰比 $h^{(1)*}$ が、想定するダンパーの故障率に応じて与えられる；[近似1] $\omega^{(r)} \approx \omega^{(r)*}$ である；[近似2] 応答量 $p_j \equiv \delta_{sjmax} / S_D^{(1)} = \bar{\delta}_{sj} / S_D^{(1)}$ 、 $p_j^* \equiv \delta_{sjmax}^* / S_D^{(1)}$ を定義したとき、 p_j と p_j^* の関係は次式に従う(Appendix3)。

$$\text{ダンパー非機能層} : \frac{p_j^*}{p_j} = \frac{1 + (\omega^{(1)} c_{vj} / k_{vj})^2 (1 + k_{vj} / k_{sj})}{1 + (\omega^{(1)} c_{vj} / k_{vj})^2}$$

$$\text{ダンパー機能層、無ダンパー層} : p_j^* / p_j = 1 \quad (18a, b)$$

以上の仮定と近似に基づく、 δ_{sjmax}^* は次式で表せる。

$$\delta_{sjmax}^* \approx \left\{ S_D^{(1)*} p_j^* / S_D^{(1)} p_j \right\} \bar{\delta}_{sj} \leq \delta_{sjmax}^{UB} \quad (19)$$

$$\text{ただし } \delta_{sjmax}^{UB} = \frac{S_D(\omega^{(1)}; h^{(1)*}) \left\{ 1 + (\omega^{(1)} c_{vj} / k_{vj})^2 (1 + k_{vj} / k_{sj}) \right\}}{S_D(\omega^{(1)}; h^{(1)}) \left\{ 1 + (\omega^{(1)} c_{vj} / k_{vj})^2 \right\}} \bar{\delta}_{sj} \quad (20)$$

(19)式中の不等式は、 $p_j^* / p_j \geq 1$ であることから導かれる。 δ_{sjmax}^{UB} は設計用地震動に対する最大応答の近似上限値を表している。(19)式より、 $h^{(1)*}$ に応じて δ_{sjmax}^* の「近似包絡線」を用意することができる。

(19)式より次のことが言える：(1)全数の数分の一程度のダンパーが機能しなかった場合、一次減衰比の低下度 $1 - h^{(1)*} / h^{(1)}$ も高々数分の一程度と考えられる。このような場合、設計用変位応答スペクトルの性格を考えると、 $S_D^{(1)*} / S_D^{(1)}$ の値は1をほんの少し上回る程度であるから、ダンパーが機能する層やダンパーを有しない層では、 δ_{sjmax}^* は $\bar{\delta}_{sj}$ をやや上回る程度に留まる。(2)一方、ダンパーが機能しない層では、 p_j^* / p_j のために、他層に比べれば応答の増加率はやや大きくなる。ただし、 p_j^* / p_j の値は、現実的なオーダーのダンパーとブレースの組み合わせでは、1.3程度が上限である。(3) p_j^* / p_j の効果を無視すれば、ダンパーが設計時の想定通りに機能しなかった場合の最大層間変位分布は、機能しなくなったダンパーの位置には関わらず、設計時に指定した層間変位分布とはほぼ相似的である。

6. 設計例題

問題ERCDCに対する設計例を以下に示す。簡単のため、ブレース柔性は全層で同じ関数で表されるものとし、以下では単に $\hat{s}_v(\alpha)$ と書く。ダンパーの減衰係数 c_{vj} は以下の通りである。

- ・10層モデル SBMVD10-1a : $c_{vj} = 30(\text{tonfs/cm})$ for all j
SBMVD10-1b : $c_{vj} = 50(\text{tonfs/cm})$ for $j = 3, \dots, 8$
SBMVD10-2a : $c_{vj} = 45(\text{tonfs/cm})$ for all j
SBMVD10-2b : $c_{vj} = 75(\text{tonfs/cm})$ for $j = 3, \dots, 8$
- ・20層モデル SBMVD20-1 : $c_{vj} = 90(\text{tonfs/cm})$ for $j = 6, \dots, 15$

SBMVD20-2: $c_{vj} = 150(\text{tonfs/cm})$ for $j = 6, \dots, 15$

両モデルとも指定層間変位 δ_{sj} は中間層で1.0(cm)の台形分布とした(詳細をFig.7に示す)。その他、各モデルで共通する諸量は次の通りである： $m_{sj} = 1000(\text{ton})$ for all j , $m_{vj} = 1.0(\text{ton})$ for all j , $h_s = 2\%$, $N = 5$ 。各設計に対する c_v は、一様分布のSBMVD10-1aモデルとSBMVD10-2aモデルを除き、SBVDモデルに対する最適ダンパー配置方針¹⁶⁾に基づいて、初期設計解における一次減衰比が10%程度と20%程度になるように決定した。従って、本設計例で与えた c_v がどのブレース柔性レベルにおいても最適減衰係数分布になっているという保証は全くない。SBMVD10-1aモデルとSBMVD10-1bモデル、SBMVD10-2aモデルとSBMVD10-2bモデルのダンパーの減衰係数の総和は同じにしてある。初期設計解は文献15に従って求めた。

Fig.5に、ブレース柔性の変化に対応する各層剛性の変化を、ダンパーを有する層では実線で、有しない層では破線で示し、各図右端には層番号を示した。20層モデルについては層番号7から11は省略した。各初期設計解における一次固有周期と減衰比をTable 1に示した。Fig.5の横軸には、主骨組に対するブレースの相対的な柔性が明らかにわかるように、次式で定義される無次元化量を用いた。

$$\text{ブレース柔性比(brace flexibility ratio)}: R_B = \hat{s}_v(\alpha) \sum_{j=1}^f \frac{\hat{k}_{sj}(0)}{f} \quad (21)$$

R_B は初期設計の平均的な層柔性に対するブレース柔性の比を表しており、 R_B が0の場合はブレース剛性が無限大であることを意味する。

Fig. 5. Variations of story stiffnesses with respect to R_B

Table 1. Fundamental eigenperiod and fundamental damping ratio of each initial design

	10-1a	10-1b	10-2a	10-2b	20-1	20-2
Fundamental eigenperiod (s)	1.07	1.14	1.21	1.29	1.99	2.29
Fundamental damping ratio (%)	8.7	11.9	13.7	20.5	9.2	18.0

Fig.5より、以下のことが観察される：(1)指定層間変位分布が同じ場合、ブレース柔性比 R_B に関する層剛性の変化率は、初期設計解の一次減衰比が大きいほど大きい。(2)ダンパーを有する層では、層剛性は R_B に関して二次関数的に増加するのに対して、ダンパーを有しない層では、 R_B に関してほぼ線形に増加してゆく。(3)それぞれの設計例においては、ダンパーを有しない層の各層剛性の変化の様子はほぼ相似であり、ダンパーを有する層の各層剛性の変化の様子もほぼ相似であるといえる。ただし、ダンパーを有しない層と有する層では(2)で述べたように層剛性の変化の様子はやや異なっている。

層剛性は、主骨組に関する構造コストの一つの代表量であるといえる。そこで、各モデルにおける層剛性の総和の変化を、横軸にブレース柔性比 R_B をとって比較したのがFig.6である。Fig.6より、 R_B が小さい範囲では、ダンパー減衰係数の総和が大きなモデルの方が剛性設計解における剛性総和が小さいのに対して、 R_B がある大きさに達すると、ダンパーの減衰係数の総和が小さなモデルの方が剛性総和が小さくなるのがわかる。このことは、ブレースに十分な剛性を確保できない場合には、減衰性能の大きなダンパーを設置したとしても少ない剛性で主骨組を設計できるとは限らないことを意味する。

Fig. 6. Variations of total story stiffnesses with respect to R_B

7. 時刻歴解析による検証

本設計法の妥当性と精度を検証するために、設計用応答スペクトルに適合するようにSIMQKEプログラム³³⁾によって作成した人工地震動10波に対する時刻歴弾性応答解析を実行した。ただし、SIMQKEプログラムを用いた場合、一つの減衰比に対する変位応答スペクトルに適合するように作成された人工地震動群は、別の減衰比に対する変位応答スペクトルへの適合度が良くないので、本論文では、2%から20%の間の2%ごとの減衰比に対する変位応答スペクトルに適合するような人工地震動群の組を作成し、時刻歴解析に際しては、検証の対象となる設計例の一次減衰比に最も近い減衰比に対する変位応答スペクトルに適合する人工地震動群を用いた。検証の対象としたのは、設計例SBMVD10-2bとSBMVD20-2で、 R_B が2.0の場合である。数値積分はNewmark- β 法を用い($\beta = 0.25$)、時刻刻みは0.02秒とした。

Fig.7には、時刻歴応答解析による層間変位の平均最大値(○)と平均最大値±標準偏差値(一点鎖線)を、指定層間変位(実線)とともに示す。図より、平均最大値分布はほぼ±10%以内の精度で指

定分布と一致するといえる。

Fig. 7. Mean maximum interstory drifts due to 10 artificial strong earthquakes (circle: all dampers do function; filled triangle: only odd dampers do function; filled circle: no damper functions; dotted lines: predicted by eqn. (19))

ダンパーが機能しなかった場合の影響を調べるために、設計法の検証に用いたものと同じモデルに対して、全てのダンパーが機能しなかった場合(●、平均最大値)、と、偶数階のダンパーが機能しなかった場合(▲、同)の、設計用地震動に対する時刻歴弾性応答解析を実行した。Fig.7にその結果を示す。時刻歴解析に用いた人工地震動は、先に用いたものと同じものである。Fig.7より、本設計例のように通常より格段に厳しい構造設計目標に対して剛性設計を行った場合には、たとえ全ダンパーが機能しなかったとしても、健全な最大応答分布を示すといえる。

全ダンパーが機能しなかった場合の δ_{sjmax}^* を(19)式に従って概算したものを、Fig.7中に破線で示した。全ダンパーが機能しないので、 $h^{(1)*} = h_s$ とした。(19)式による概算値 $\pm 10\%$ 程度の精度で応答を評価できており、概算式としては十分な精度を有しているといえる。

8. 結論

粘性ダンパー（以下「ダンパー」）を有する建築物に対して、ダンパー取付け部材（以下「ブレース」）の柔性を考慮した主骨組の強震時層間変位指定剛性設計解を、ブレース柔性をゼロとした場合の主骨組の剛性設計解を初期解として、ブレース柔性に応じて連続的に見だす設計解列生成法を提示した。さらに、ダンパーが設計時の想定通りに機能しなかった場合の地震時最大層間変位の上限値を設計用層間変位を用いて表す近似式を、地震時最大応答において一次固有振動成分が卓越するという仮定に基づいて誘導した。

本論文で提示した剛性設計法に基づき設計されたモデルについて、設計に用いた応答スペクトルに適合する人工地震動10波に対する時刻歴応答解析を実施した結果、本設計法による設計例題においては、10%以内の精度で応答制約条件が満たされることを例証した。

本研究により、以下のことが明らかとなった。

- (1)ブレース柔性を考慮するためには、Maxwell要素を含んだ複雑な非比例減衰構造物としての取り扱いが必要となる。このような構造物モデルにおいては、初期設計解での特異性を除去する工夫を導入した区分的テイラー展開手法に基づく設計解列生成法により、複素固有値解析や設計感度解析を用いることなく効率的にブレース柔性に応じた剛性設計解列を生成することができる。
- (2)ブレース柔性が増加するにつれて、層剛性は初期設計解とはほぼ相似的に増加する。ただし、ダンパーを有する層と有しない層では、増加の傾向がやや異なる。ダンパーを有する層では初期設

計解からわずかに減少する場合もある。

(3)ダンパーによって付加される一次減衰比が大きいほど、剛性設計解にブレース柔性が与える影響は大きい。従って、大きな減衰特性を有するダンパーを設置した建築物を設計する場合には、ブレース柔性を十分に考慮する必要がある。

(4)通常よりも厳しい構造設計目標に対して主骨組の剛性が決定された場合、一部のダンパーが機能しなかったとしても主骨組は健全な地震時最大応答を呈する。この場合の最大層間変位の上限値は、本論文で提示した近似式によって概ね評価できる。

以上の成果に基づき次のように結論付けることができる。これまでの粘性ダンパーなどの付加減衰機構を有する建築構造物の設計は、主骨組の剛性が先に与えられ、主骨組だけでは満足できないような厳しい構造設計目標を満足できるように、ダンパーの容量が後から決定される、いわば間接的な設計法であったのに対し、本理論を用いることにより、与えられたダンパーに対して構造設計目標を的確に満足する主骨組の剛性を、設計感度解析などの繰返し手法に頼らずに、より直接的に見いだすことが可能となった。

謝辞

本研究の遂行に際して、京都大学助教授竹脇出博士から貴重な御教示を頂いた。ここに記して感謝の意を表する。

Appendix 1 SBMVDモデルに対する非連性近似

SBMVDモデルに対する非減衰固有振動方程式は以下のように書ける。

$$\left(-\tilde{\omega}^{(n)2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_v & -\mathbf{K}_v \\ -\mathbf{K}_v & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_v^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A1-1})$$

ここで、ティルダ(～)は非減衰固有振動方程式に関する量であることを表す。モデル設定時の仮定により、ここでは $\mathbf{M}_v$ を $\mathbf{M}_s$ に比べて無視し、 $\mathbf{M}_v = \mathbf{0}$ とする。このとき、(A1-1)式の下半分より $\tilde{\mathbf{u}}_v^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)} = \mathbf{0}$ となる。このことは、次の三つのことを意味している。(1) $\tilde{\mathbf{u}}_v^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)}$ の第 j 成分は、第 j 層のブレースにおける第 r 次固有振動における変形成分を表している。したがって、非減衰固有振動においては、ブレースに変形が生じないということになる。(2) $\tilde{\mathbf{u}}_v^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)} = \mathbf{0}$ であるなら、(A1-1)式の上半分は

$$-\tilde{\omega}^{(n)2} \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)} + \mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)} = \mathbf{0} \quad (\text{A1-2})$$

となる。この式から決定される非減衰固有振動数と非減衰固有ベクトルは、SBVDモデルのそれらと一致する。(3)非連成近似下で評価された減衰比は $\tilde{h}^{(n)} = \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)T} (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_{v11} + \mathbf{C}_{v11}^T + \mathbf{C}_{v22}) \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)} (2\tilde{\omega}^{(n)2} \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)T} \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{u}}_s^{(n)})^{-1}$ となり、非連成近似下で評価されたSBVDモデルの減衰比と一致する。

以上の点から、SMBVDモデルにおいて非連性近似を適用することは、ブレース剛性を無限大とみなすことに相当することがわかる。

Appendix 2 非比例減衰系に対するモード分解と相関係数

非比例減衰系の運動方程式(2)は、次のようにしてモード分解することができる²⁷⁾。2次元の運動方程式(2)を次のような4次元の状態方程式に変換する。

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{z} = -\mathbf{A}\mathbf{r}\ddot{\mathbf{y}}_g \quad (\text{A2-1})$$

$$\text{ただし } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-2})$$

ここで、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 及び $\mathbf{K}$ はそれぞれ、(2)式における質量、減衰及び剛性行列を表している。(A2-1)式に対応する固有値問題の支配式は次のように書ける。

$$[\lambda^{(n)} \mathbf{A} + \mathbf{B}] \mathbf{w}^{(n)} = \mathbf{0} \quad (\text{A2-3})$$

ここで $\mathbf{w}^{(n)} = \{\lambda^{(n)} \mathbf{u}^{(n)T} \mathbf{u}^{(n)T}\}^T$ である。行列 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}^{(1)} \dots \mathbf{w}^{(4f)}]$ と一般化座標ベクトル $\mathbf{q} = \{q^{(1)} \dots q^{(4f)}\}^T$ を用いて座標変換 $\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{q}^{(n)}$ を定義し、これを(A2-1)式に代入してさらに $\mathbf{W}^T$ を左乗し、固有ベクトル $\mathbf{w}^{(n)}$ の直交性を考慮すると、次のように非連成化された4個の式を得る。

$$\dot{q}^{(n)} - \lambda^{(n)} q^{(n)} = -\mathbf{w}^{(n)T} \mathbf{A} \mathbf{r} (\mathbf{w}^{(n)T} \mathbf{A} \mathbf{w}^{(n)})^{-1} \ddot{\mathbf{y}}_g \quad (r = 1, 2, \dots, 4f) \quad (\text{A2-4})$$

これに対する解はDuhamel積分を用いて容易に求めることができる。

過減衰モード（実固有値モード）がないとすると、4f組の固有値と固有ベクトル

ルは、2組ずつの共役複素対に分けることができる。 $\lambda^{(i)}$ と $\lambda^{(i+2)}$ 、 $\mathbf{w}^{(i)}$ と $\mathbf{w}^{(i+2)}$ が共役複素対をなしているようにモードの番号付けをおこなうと、 $\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{q}^{(i)}$ の下半分より $\mathbf{y}$ に関する次の実数表現を得る。

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{2f} \{ \text{Re}[v^{(i)}u^{(i)}]S^{(i)}(t) + \text{Im}[v^{(i)}u^{(i)}]C^{(i)}(t) \} \quad (\text{A2-5})$$

ここで $v^{(i)}$ は複素刺激係数であり、

$$v^{(i)} = 2\text{Im}[\lambda^{(i)}] \mathbf{w}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{r} (\mathbf{w}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{w}^{(i)})^{-1} \mathbf{i} \quad (i = 1, \dots, f) \quad (\text{A2-6})$$

と書かれる。 $S^{(i)}(t)$ は、地動加速度入力 $\ddot{y}_g$ を受ける、固有振動数 $\omega^{(i)}$ 、減衰比 $h^{(i)}$ の一自由度系の変位応答関数であり、 $C^{(i)}(t)$ は $S^{(i)}(t)$ に含まれるサイン関数をコサイン関数に置き換えたものである。

$\mathbf{y}$ の各成分の最大値は、 $S^{(i)}(t)$ と $C^{(i)}(t)$ の最大値 $S_{max}^{(i)}$ と $C_{max}^{(i)}$ の適当な組み合わせによって評価することができる。 $S_{max}^{(i)}$ は $S_D(\omega^{(i)}; h^{(i)})$ そのものである。 $C_{max}^{(i)}$ は通常の建築構造物における低次固有振動の範囲ではほぼ $S_{max}^{(i)}$ と等しい。この近似を用いて最大応答を評価したのが(7)式である。相関係数は次のように書かれる^{24,29)}。

$$\begin{aligned} \rho_{SS}^{(r,s)} &= 8a^{(r,s)}c^{(r,s)}\omega^{(r)}\omega^{(s)}d^{(r,s)-1}, \quad \rho_{SC}^{(r,s)} = 4a^{(r,s)}\omega^{(r)}\{b^{(r,s)} - 2\omega_D^{(s)2}\sqrt{d^{(r,s)}(1+h^{(s)2})}\}^{-1} \\ \rho_{CC}^{(r,s)} &= 4a^{(r,s)}b^{(r,s)}c^{(r,s)}\{d^{(r,s)}\sqrt{1+h^{(r)2}}(1+h^{(s)2})\}^{-1} \\ a^{(r,s)} &= \sqrt{h^{(r)}h^{(s)}\omega^{(r)}\omega^{(s)}}, \quad b^{(r,s)} = \omega^{(r)2} + \omega^{(s)2} + 2h^{(r)}h^{(s)}\omega^{(r)}\omega^{(s)}, \\ c^{(r,s)} &= h^{(r)}\omega^{(r)} + h^{(s)}\omega^{(s)}, \quad d^{(r,s)} = b^{(r,s)2} - 4\omega_D^{(r)2}\omega_D^{(s)2}, \quad \omega_D^{(r)} = \omega^{(r)}\sqrt{1-h^{(r)2}} \end{aligned} \quad (\text{A2-7})$$

Appendix 3 付加剛性効果消失による刺激ベクトル変化

定常外力により振動数 ω で定常振動する、剛性定数 k_s のバネ要素と、剛性定数 k_v 、減衰係数 c_v のMaxwell要素が並列に連結された三要素モデルに対して、一サイクル当りの消費エネルギーと最大ひずみエネルギーにおける等価性から導かれる等価Voigtモデルの減衰係数 c_{eq} と剛性定数 k_{eq} は次式で表される⁷⁾。

$$k_{eq} = k_s + \gamma(1 + \gamma)^{-1}k_v, \quad c_{eq} = (1 + \gamma)^{-1}c_v, \quad \gamma = (\omega c_v/k_v)^2 \quad (\text{A3-1a-c})$$

この関係式をSBMVDモデルに対しても適用できるものと仮定し、さらに一次固有振動が卓越すると仮定して、SBMVDモデルに対して等価なSBVDモデルの第 j 層剛性 k_{eqj} を次式で表す。

$$k_{eqj} = k_{sj} + \gamma(1 + \gamma)^{-1}k_{vj}, \quad \gamma = (\omega^{(1)}c_{vj}/k_{vj})^2 \quad (\text{A3-2a,b})$$

k_{eqj} の第二項が「ダンパーによる付加剛性効果」である。等価SBVDモデルの非減衰一次固有振動数を $\tilde{\omega}^{(1)}$ 、非減衰一次固有ベクトルの第 j 層成分を $\tilde{u}_{sj}$ で表すと、等価SBVDモデルの非減衰固有振動方程式より、

$$k_{eqj}(\tilde{u}_{sj} - \tilde{u}_{sj-1}) = \tilde{\omega}^{(1)2} \sum_{i=1}^f m_{si} \tilde{u}_{si} \quad (\text{A3-3})$$

を導くことができる。ここで、通常の減衰レベルでは $\tilde{\omega}^{(1)}$ と $\omega^{(1)}$ はほとんど等しいので、 $\tilde{\omega}^{(1)}$ を $\omega^{(1)}$ に置き換える。(A3-3)式左辺と右辺はそれぞれ、非減衰固有振動における第 j 層せん断力と第 j 層より上の質点に作用する慣性力に相当する。いま、ダンパーが機能する場合としない場合とで(A3-3)式右辺の値、つまり慣性力是不変であると近似する。この時、次式が成り立つ。

$$\text{ダンパーが非機能層} : \frac{(\tilde{u}_{sj} - \tilde{u}_{sj-1})}{\tilde{u}_{sj} - \tilde{u}_{sj-1}} \approx \frac{1 + (\omega^{(1)}c_{vj}/k_{vj})^2(1 + k_v/k_s)}{1 + (\omega^{(1)}c_{vj}/k_{vj})^2}$$

$$\text{ダンパー機能層、無ダンパー層} : \frac{(\tilde{u}_{sj} - \tilde{u}_{sj-1})}{\tilde{u}_{sj} - \tilde{u}_{sj-1}} \approx 1 \quad (\text{A3-4a,b})$$

ここで、刺激係数も不変であると近似する($\tilde{v}^{(i)} = v^{(i)*}$)と、非減衰一次刺激ベクトルの第 j 層間成分 $\tilde{p}_j^*$ と $\tilde{p}_j$ に関して、次の近似式が書ける。

$$\tilde{p}_j^*/\tilde{p}_j \approx (\tilde{u}_{sj} - \tilde{u}_{sj-1})^*/(\tilde{u}_{sj} - \tilde{u}_{sj-1}) \quad (\text{A3-5})$$

さらに、一次固有振動の卓越性を考慮すれば、 $p_j^* \equiv \delta_{sjmax}/S_D^{(1)}$ 及び $p_j \equiv \delta_{sjmax}/S_D^{(1)}$ は、それぞれ等価Voigtモデルにおける一次刺激ベクトル $\tilde{p}_j^*$ 及び $\tilde{p}_j$ と近似的に等しいといえる。この近似に基づけば、(18a,b)式を得る。

参考文献

- 1) 和泉正哲, 寺本隆幸, 北村春幸, 白沢吉衛: 日本の制振構造を視る, 建築技術, 9月号, pp.144-159, 1993
- 2) Mahmoodi, P.: Structural Dampers, *J. Struct. Div. ASCE*, Vol.95, pp.1661-1672, 1969
- 3) 有馬文昭, 宮崎光生, 小森清司, 高橋和男: 建築構造物の応答制御設計法に関する研究—その1 制振壁の粘性減衰特性に関する調査研究—, 構造工学論文集, Vol.35B, pp.29-42, 1989
- 4) Lin, R. C., Liang, Z., Soong, T. T., Zhang, R. H. and Mahmoodi, P.: An Experimental Study on Seismic Behavior of Viscoelastically Damped Structures, *Engrg. Struct.*, Vol.13, pp.75-84, 1991
- 5) Bergman, D. M., and Hanson, R. D.: Viscoelastic Mechanical Damping Devices

- Tested at Real Earthquake Displacements, *Earthquake Spectra*, Vol.9, pp.389-417, 1993
- 6) Lee, H. H. and Tsai, C. S.: Analytical model of viscoelastic dampers for seismic mitigation of structures, *Comput. Struct.*, Vol.50, pp.111-121, 1994
- 7) 曾田五月也, 和田純一, 平田裕一, 山中久幸: 繰返加力実験に基づく粘弾性ダンパーの力学モデルの構築, 日本建築学会構造系論文報告集, 第457号, pp.29-36, 1994
- 8) 例えば, Lai, M. L., Chang, K. C., Soong, T. T., Hao, D. S., and Yeh, Y. C.: Full-Scale Viscoelastically Damped Steel Frame, *J. Struct. Engrg. ASCE*, Vol.121, pp.1443-1447, 1995
- 9) Constantinou, M. C., and Tadjbakhsh, I. G.: Optimum Design of a First Story Damping System, *Comput. Struct.*, Vol.17, pp.305-310, 1983
- 10) Aiken, I. D., Kelly, J. M., and Mahmoodi, P.: The Application of Viscoelastic Dampers to Seismically Resistant Structures, *Proc. 4th US Conf. Earthquake Eng.*, Palm Springs, California, Vol.III, pp.459-468, 1990
- 11) Zhang, R. H., and Soong, T. T.: Seismic Design of Viscoelastic Dampers for Structural Applications, *J. Struct. Engrg. ASCE*, Vol.118, pp.1375-1392, 1992
- 12) Hahn, G. D. and Sathiyaveeswaran, K. R.: Effects of Added-Damper Distribution on the Seismic Response of Buildings, *Comput. Struct.*, Vol.43, pp.941-950, 1992
- 13) 丹羽直幹, 小堀錫二, 高橋元一, 倉田成人, 畑田朋彦, 栗野治彦: 高減衰構造による制振に関する研究, 構造工学論文集, Vol.38B, pp.223-233, 1992
- 14) Kasai, K., and Fu, Y. M.: Seismic Analysis and Design Using Viscoelastic Dampers, シンポジウム「耐震設計の一つの新しい方向」, 東京, pp.113-140, 1995
- 15) Nakamura, Tsuneyoshi, and Tsuji, M.: Inverse Damping Perturbation for Stiffness Design of Shear Buildings, *J. Struct. Engrg. ASCE*, Vol.122, pp.617-625, 1996
- 16) Tsuji, M., and Nakamura, Tsuneyoshi: Optimum Viscous Dampers for Stiffness Design of Shear Buildings, *Structural Design of Tall Buildings*, 1996 (印刷中)
- 17) Arima, F., Miyazaki, M., Tanaka, H. and Yamazaki, Y.: A Study on Buildings with Large Damping Using Viscous Damping Walls, *Proc. 9WCEE*, Tokyo-Kyoto, Japan, Vol.V, pp.821-826, 1988
- 18) Skinner, R. I., Kelly, J. M., and Heine, A. J.: Hysteretic Dampers for Earthquake-Resistant Structures, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol.3, pp.287-296, 1975
- 19) Scholl, R. E.: Brace Dampers: An Alternative Structural System for Improving the Earthquake Performance of Buildings, *Proc. 8WCEE*, San Francisco, USA, Vol.V, pp.1015-1022, 1984
- 20) Nakamura, Tsuneyoshi, and Ohsaki, M.: Sequential Optimal Truss Generator for Frequency Ranges, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.67, pp.189-209, 1988
- 21) Nakamura, Tsuneyoshi, and Ohsaki, M.: Sequential Generator of Earthquake-Response Constrained Trusses for Design Strain Ranges, *Comput. Struct.*, Vol.33, pp.1403-1416, 1989
- 22) 中村恒善, 朝川剛: 高い剛性の地下階を有する2軸共通せん断型構造物の地震時応答制約設計, 構造工学論文集, Vol. 38B, pp.163-175, 1992
- 23) Newmark, N. M., and Hall, W. J.: Earthquake Spectra and Design, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA., 1982
- 24) Wilson, E. L., Der Kiureghian, A., and Bayo, E. P.: A Replacement for SRSS Method in Seismic Analysis, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol.9, pp.187-194, 1981
- 25) Thomson, W. T., Calkins, T. and Caravani, P.: A Numerical Study of Damping, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol.3, pp.97-103, 1974
- 26) Warburton, G. B. and Soni, S. R.: Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol.5, pp.365-376, 1977
- 27) Foss, K. A.: Coordinates which Uncouples the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol.25, pp.361-364, 1958
- 28) Igusa, T., Der Kiureghian, A. and Sackman, J. L.: Modal Decomposition Method for Stationary Response of Non-Classically Damped Systems, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol.12, pp.121-136, 1984
- 29) Yang, J. N., Sarkani, S. and Long, F. X.: A Response Spectrum Approach for Seismic Analysis of Nonclassically Damped Structures, *Eng. Struct.*, Vol.12, pp.173-184, 1990
- 30) 曾田五月也: 粘弾性ダンパーの振動数依存性を考慮した建物の地震応答解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸), 構造I, pp.1027-1028, 1992
- 31) Nakamura, Tsuneyoshi and Yamane, T.: Optimum Design and Earthquake-Response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol.14, pp.798-815, 1986
- 32) A. C. Hearn, REDUCE USER'S MANUAL Version 3.3, The RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1987
- 33) Gasparini, D. A., and Vanmarcke, E. H.: Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra-SIMQKE, NISEE/Computer Applications, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1976

英文要約(Summary)

1. Introduction In most studies concerned with seismic or optimum design of a building with viscous dampers⁹⁻¹⁶⁾, a structural model used is such that each viscous damper is expressed by a Voigt element and is installed directly in a story of a shear building. This very simple model, however, needs to be modified for the effect of flexibility of attachment members, such as braces, which connect dampers to the building.

The purpose of this paper is to develop a new method seismic stiffness design of a shear building with Maxwell type viscous dampers, and to disclose basic characteristics of the effect of flexibility of spring elements in Maxwell type viscous dampers on the stiffness design.

2. Structural model and design earthquake for design problem Consider an f -story planar elastic shear building with Maxwell type viscous dampers (Fig.2). This structural model is called here an *SBMVD model*, and a spring element in a Maxwell type damper is simply called a *brace*. A model with braces of null flexibility is called an *SBVD model*.

A set of ground motions compatible with a design spectrum is defined as the design moderate earthquake. A simplified version of the spectrum due to Newmark and Hall²³⁾ is employed as the design spectrum and 201 cm/s², 25.0 cm/sec, and 18.75 cm are employed here for the maximum ground acceleration, velocity, and displacement, respectively, of the design moderate earthquake.

3. Stiffness design problem to design moderate earthquake Since an SBMVD model is a non-proportionally damped structure, complex eigenvalue analysis and a combination rule presented by eq.(7) for non-proportional damped structure²⁸⁻²⁹⁾ are employed here for evaluating the maximum interstory drift $\delta_{j\max}$ of the $(j - 1)$ st with respect to the j th floors of a shear building subject to the design moderate earthquake. Then, the stiffness design problem for the SBMVD model may be formulated as follows:

[Problem ERCD] Given specified set $\mathbf{c}_v$ of damping coefficient of dampers and set $\mathbf{k}_v$ of stiffness of braces with respect to interstory drift, find the set of story stiffnesses $\mathbf{k}_s$ of an SBMVD model such that $\delta_{j\max} = \bar{\delta}_{sj}$ for all j where $\bar{\delta}_{sj}$ denotes a specified design interstory drift.

4. Stiffness design sequence with respect to brace flexibility sequence The solution $\mathbf{k}_s$ to problem ERCD will be found for one set of $\mathbf{c}_v$ and $\mathbf{k}_v$. If one level parameter representing $\mathbf{c}_v$ and/or $\mathbf{k}_v$ is introduced, then a sequence of $\mathbf{k}_s$ s with respect to that parameter may be conceived and may be called a *stiffness design sequence*²⁰⁻²¹⁾. A method of generating the design sequence with respect to parameter α representing the flexibility, i.e., inverse of stiffness, of braces is developed here for specified $\mathbf{c}_v$ by means of piecewise Taylor series expansion. This procedure is initiated with the stiffness design of the corresponding SBVD model¹⁵⁾. Singularity due to null flexibility at starting point is removed by appropriate variable transformation.

5. Approximation formula for upperbound of maximum response In practice it will be necessary to take into consideration the case where some viscous dampers do not function ('do not function' means that a damping coefficient becomes zero). Approximation formula (19) for upperbound of each maximum interstory drift when is derived with the use of the predominancy of the fundamental participation component.

6. Design examples Six stiffness design sequences for ten and twenty story SBMVD models have been generated by the represented procedure. All the flexibilities of braces have been presented by one and the same function in terms of α . Figs.5(a-f) show variations of story stiffnesses in the examples with respect to *brace flexibility ratio* defined by eqn.(21).

7. Verification by time-history response analysis In order to verify the accuracy of the proposed method of stiffness design and proposed approximation formula (19), time-history response analysis has been performed on the four design examples with brace flexibility ratio 2.0. A set of ten artificial ground motions has been generated by SIMQKE program³⁷⁾ so as to be compatible with the design response spectrum. Figs.7(a-d) show the distributions of mean maximum interstory drifts and $\pm$ one standard deviation lines in the four shear buildings with those stiffness designs when all the dampers do function and show that of the same stiffness designs when only odd dampers or no damper functions. It can be observed from Figs.7(a-d) that the mean maximum interstory drift in all the shear buildings with those designs are within $\pm 10\%$ lines of the specified values, and that if no damper functions, all the drifts are within $\pm 10\%$ lines of the values predicted by approximation formula (19).

8. Conclusions The following results have been obtained in this paper:

- (1) Stiffness design sequence of a shear building with Maxwell type viscous dampers has been effectively generated by piecewise Taylor series expansion with respect to a level parameter representing the flexibility of spring elements in such dampers.
- (2) Almost all the story stiffnesses increase from those in the corresponding SBVD model as flexibility of braces increase. Distribution of story stiffnesses is approximately proportion to that in the corresponding SBVD model.
- (3) The effect of flexibility of braces on the stiffness design is greater in an SBMVD model with viscous dampers of larger damping coefficients.
- (4) With the use of the predominancy of the fundamental participation component, an approximation formula has been derived which is useful to evaluate the upper bound of maximum interstory drift when some dampers do not function.

(1996年6月10日原稿受理, 1996年8月22日採用決定)