面内振りを受ける円形張力膜のしわ

—有限要素法による分岐解析と実験の比較—

WRINKLING ON STRETCHED CIRCULAR MEMBRANES UNDER
INPLANE TORSION

—Comparison between bifurcation analyses and experiments—

宮村 倫司*, 半谷 裕彦**

Tomoshi MIYAMURA and Yasuhiko HANGAI

In this paper finite element analyses of wrinkling on membranes are carried out, and the results are compared with the results of our experiments. An illustrative example is stretched circular membrane under inplane torsion, which is a classical problem in the study of wrinkling. Wrinkling is considered as a bifurcation phenomenon. It is analyzed by using four-node membrane finite elements considering geometrical nonlinearity. Both isotropic and orthotropic membranes are treated. Membranes are assumed to be elastic. Formulation of the element, a method of introducing initial stresses and a method of bifurcation analysis are shown. First computations for several kinds of shear modulus are carried out and shapes of wrinkles and stress fields are compared. Second computations corresponding to the experiments are carried out. Principal stresses in wrinkling fields and shapes of wrinkles obtained by the analyses and the experiments show good agreement. However, details of the shapes are a little different, since in the analyses the fineness of a finite element mesh is not sufficient.

Keywords : *wrinkling, circular stretched membrane, torsion, orthotropic membrane, bifurcation analysis, finite element method, experiment*

しわ、円形張力膜、振り、直交異方性、分岐解析、有限要素法、実験

1 はじめに

曲げ剛性の小さい膜構造ではしわの問題は無視できない。2節に示す面内振りを受ける円形張力膜の問題は、しわの研究における標準的な例題でありしばしば取り上げられる。円形膜の振りではせん断応力場となるが、回転対称であるため矩形膜の単純せん断に比べると境界条件が単純であるともいえる。

しわの解析の方法は分岐理論と張力場理論に大別される。以下では両者に関して既往の研究の中で、面内振りを受ける円形張力膜の例題を扱っているものを紹介する。なお、本論文は分岐理論によっている。

分岐理論による解析では、幾何学的非線形性を考慮し、しわを分岐座屈による変形として扱う。幾何学的非線形性を考慮した等方性弾性円板の支配方程式は、1910年に von Kármán によって導かれた。Dean(1924)¹⁾はこの微分方程式の解を正弦と余弦を両方含むフーリエ級数で仮定し、面内振りを受ける円板の分岐荷重と分岐モードを近似的に求めた。1980年代には各種の境界条件、弾塑性や極座標系に沿った弾性対称軸を持つ直交異方性等を考慮した Kármán 式に基づく差分による数値解析が多く行われた^{10) 13) 16)}。鈴木等(1988)¹⁵⁾は曲げ剛性のかわりに初期張力による幾何剛性を考慮してレーリー・リッツ法により解析を行い、

曲げ剛性のみを考慮した場合と比較した。

Cheng 等(1991)¹⁷⁾は分岐後の挙動についても差分法により解析した。また、Cheng 等は周方向に位相のずれた無数の分岐モードの存在も理論的に示した。更に、Cheng 等は有限変形を考慮した Reissner の式により、中央円盤を大回転させた場合の分岐経路を求め、Kármán の式による結果と比較した¹⁹⁾。

一方、張力場理論では圧縮応力が存在し得ないという条件を曲げ剛性を省略した膜の基礎式に付加する。円形膜の振りは例題として古くから取り上げられている。最初は初期張力がない場合、すなわち膜面全体が張力場になる場合が解析された^{2) 3) 4)}。Stein 等(1961)⁵⁾は部分的に張力場となる場合も扱える理論を示し、初期張力を導入した円形膜の解析を行った。ここでは、外側の境界は無限遠としていたが、Mikulas(1964)⁶⁾は外側境界の影響も考慮した解を求め実験と比較した。Mansfield(1977)⁸⁾は異方性、材料非線形性を考慮した基礎式を示した。異方性についての例題はないが、領域の一部分が切断された円形膜の例題が示されている。1970年代より張力場理論を有限要素法に組み込んだ例が多くみられ、ほとんどの研究で円形膜の例題が解かれている^{7) 11) 12)}。

張力場理論はその後も改良されている。Wu(1981)⁹⁾は特別な変形勾配によりしわ歪を定義し、等方性超弾性体の円形膜の中央

本論文の一部は既に文献26)～31)において発表している。

* 東京大学生産技術研究所 2 部 助手・博士(工学)

** 東京大学生産技術研究所 5 部 教授・工博

Res. Assoc., Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Dr. Eng.
Prof., Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Dr. Eng.

円盤を大回転させた場合の解を求めた。Roddeман等(1987)¹⁴⁾は同様な変形勾配を導入し、Wuの理論をより一般化して有限要素法に組み込み、幾何学的非線形性、異方性材料、材料非線形性をすべて考慮できる解析法を提案した。解析例のひとつとして、直交異方性弾性円形膜の振りが取り上げられ、良好な結果が得られている¹⁸⁾。Roddeман等の理論は現在最も有力な張力場解析手法であると考えられる。この他にも、Li等(1993)²⁰⁾は緩和された歪エネルギーを用いて張力場を解析しており、その解析例として中央円盤の有限回転を考慮した円形張力膜の振りを取り上げた。ただし、この理論は等方性弾性体のみを対象としている。

本論文では面内振りを受ける円形張力膜のしわの四辺形膜要素を用いた非線形有限要素法による分岐解析を行う。等方性および直交異方性弾性膜を対象とする。解析の一部は既に発表しているが^{26) 27) 30)}、本論文では可能な限り著者等の実験に近い条件で計算を行い、結果を比較することに重点を置く。なお、実験については文献²⁸⁾において報告している。

等方性弾性膜については各種の要素による解析結果の比較を既報²⁹⁾において行っており、本論文ではそこで用いたのと同じ四辺形膜要素を使用した。この要素による分岐解析では、しわの発生によりほぼ完全な張力場が得られることがわかっている。また、直交異方性の構成式を組み込み易いという利点もある。これらの理由により本論文ではこの要素を採用した。なお、文献²⁹⁾ではこの四辺形膜要素の基礎式および初期張力導入のための基礎式を示していないため、本論文の第3節に記す。

2 面内振りを受ける円形張力膜

図1のように円形膜の中央に剛体の円盤を取り付けた後に、外側境界を半径方向外向きに一樣変位させて初期張力を導入する。なお、先に初期張力を導入してから、円盤を取り付ければ等張力となるがここでは扱わない。初期張力導入後に外側境界は固定し、中央円盤を面内に回転させる。

図1: 面内振りを受ける円形張力膜

3 解析法

3.1 概要

建築では一般に直交異方性膜が用いられるが、既往のしわの研究の中で直交異方性を考慮したものは張力場理論に基づく解析法を示した文献が数編^{8) 14)}あるだけで、解析例を示したものはRoddeман等の理論¹⁴⁾に基づく計算例¹⁸⁾のみである。本節では幾何学的非線形性を考慮した四節点膜要素により、等方性および直交異方性弾性膜の分岐解析を行う。曲げ剛性を考慮していない

ため理論的には無数のしわが発生するはずであるが、実際にはしわの本数は要素分割の細かさに依存するので有限となる。しかし、この本数に物理的な意味はない。現実にはしわの本数は曲げ剛性により決まるはずである。

本要素は野口等(1993)²¹⁾の埋め込み座標系による定式化を採用しており、そこに示されている四節点シェル要素の曲げの項を省略したものである。なお、既報²⁹⁾において用いた四辺形膜要素も同じものである。

3.2 四節点アイソパラメトリック膜要素の基礎式

要素の基礎式を形状関数を中心に明らかにしておく。記号は文献^{21) 23) 24)}等になるべく従う。添字は総和規約に従う。ベクトルやテンソルの成分では上付きの添字は反変成分を、下付きの添字は共変成分を示す。Total Lagrange法を採用している。

形状関数は双一次関数とし、次の行列

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta + \xi\eta & 1 + \xi - \eta - \xi\eta \\ 1 + \xi + \eta + \xi\eta & 1 - \xi + \eta - \xi\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^1 & N^2 & N^3 & N^4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

と、四つの節点の座標と変位 $x^k, y^k, z^k, u^k, v^k, w^k, (k=1 \sim 4)$ 、により、任意の点の形状と変位を

$$x(\xi, \eta) = N^k x^k \quad (2)$$

$$u(\xi, \eta) = N^k u^k \quad (3)$$

のように表す(y, z, v, w も同様)。

変形は初期状態を基準配置としたGreen-Lagrange歪テンソルにより表す。これを埋め込み座標系の変形前の基底ベクトルで分解し、ディアディック表示すると

$${}^t\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (4)$$

となる。ここに、 t は変形後の時刻、 $\mathbf{G}_i (i=1 \sim 3)$ は変形前の埋込座標系の基底ベクトル、 $\mathbf{G}^i$ は $\mathbf{G}_i$ の反変基底ベクトル、 ${}^t\mathbf{g}_i (i=1 \sim 3)$ は変形後の時刻 t における埋込座標系の基底ベクトルである。各基底ベクトルは式(2)、(3)により次式となる。

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^k}{\partial r^i} x^k & \frac{\partial N^k}{\partial r^i} y^k & \frac{\partial N^k}{\partial r^i} z^k \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

$${}^t\mathbf{g}_i = \frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial r^i} = \mathbf{G}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial N^k}{\partial r^i} u^k & \frac{\partial N^k}{\partial r^i} v^k & \frac{\partial N^k}{\partial r^i} w^k \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

応力は初期形状を基準配置とした第二Piola-Kirchhoff応力テンソルにより表す。弾性体の構成式を成分表示すると、

$${}^t_0 S^{mn} = C^{mnpq} {}^t_0 E_{pq} \quad (7)$$

となる。ただし、応力テンソルは反変成分で表示している。ところで、直交異方性の弾性体の構成式は、弾性対称軸(繊維)に沿った直交座標系の基底ベクトルで分解した成分($\bar{C}_{ijkl}$ で表す)により次式のように表示できる。

$$\bar{C}_{ijkl} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{1112} \\ \bar{C}_{2211} & \bar{C}_{2222} & \bar{C}_{2212} \\ \bar{C}_{1211} & \bar{C}_{1222} & \bar{C}_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{21}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$(\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2)$$

ただし、膜なので平面応力としている。繊維に沿った座標系の基底ベクトルを $\mathbf{e}_i (i=1 \sim 2)$ とすれば、埋込座標系の基底ベクトルの成分である式 (7) の C^{mnpq} は

$$C^{mnpq} = \bar{C}_{ijkl}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G}^m)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{G}^n)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{G}^p)(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{G}^q) \quad (9)$$

となる。膜は二次元なので総和は 1, 2 についてとる。

以上の諸量を増分分解した仮想仕事式に代入することにより、離散化された釣合式が得られる。

3.3 初期張力の導入法および分岐解析法

初期張力は強制変位を与えることにより導入する。しかし、曲げを省略した膜の場合、初期状態において構造物は不安定である。つまり、増分型の釣合式の接線剛性行列を、弾性剛性行列と幾何剛性行列に分けて

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G)\mathbf{u} = \lambda \mathbf{p} \quad (10)$$

と表した時、 $\mathbf{K}_E$ のみでは特異であり、初期張力が導入されていない状態では $\mathbf{K}_G$ は零行列であるので、両者を足し合わせた接線剛性行列も特異となる。正定値の $\mathbf{K}_G$ が付加されて初めてこの系は安定となる。

$\mathbf{K}_G$ が零行列であっても $\mathbf{K}_E$ のムーア-ペンローズ型一般逆行列 $\mathbf{K}_E^+$ により次式のような特解が得られる。

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{K}_E^+ \mathbf{p} \quad (11)$$

しかし、大規模な問題に対して効率良く一般逆行列を求めるのは困難である。そこで、最初の増分ステップでは適当な付加項（ペナルティー項） $\mathbf{I}_s$ により擬似的に安定化させる。すなわち、

$$\mathbf{u} = \lambda (\mathbf{K}_E + \mathbf{I}_s)^{-1} \mathbf{p} \quad (12)$$

となる。本論文の円形膜の場合は初期形状が平面であり、更に、荷重も面内方向の荷重のみであるため、 $\mathbf{I}_s$ として面外変位の自由度の位置に適当な値を持ち、他は零であるような対角行列を用いる。

分岐点は最小固有値を増分ステップごとに逆反復法により求め、これが零となる点とする。線形化された増分区間上で中点法により分岐点を特定し、これに対応する固有ベクトルにより分岐経路へ切り換える。経路の追跡においては Newton-Raphson 法を併用し、これが収束しない時には自動的に増分幅を小さくする操作を段階的に何回か行う。それでも収束しない場合には、そのまま修正荷重増分法的に次ステップに繰り越す。

4 各種のせん断剛性係数に対する解析

4.1 本解析の目的

直交異方性の膜の特徴は、1) 縦方向と横方向の剛性が異なる、2) せん断剛性が相対的に低い、の二点である。特に後者はしわの形状に大きく影響することが著者等の実験から分かったため、本節ではせん断剛性をパラメーターとして計算を行う。

4.2 解析条件

弾性体を仮定し、せん断剛性係数 G は等方性の G に係数 α を掛けて

$$G = \alpha \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (13)$$

とする。 $\alpha = 1.0$ の時には等方性弾性体となる。コーティングされた繊維でできた膜等では、 α は 1 よりも小さい。ヤング率とポアソン比は二方向共に表 1 に示す値とする。

初期張力は中央円盤を取り付けた状態で外側境界を半径方向外向きに一樣に強制変位させて導入する。全ての計算において半径方向外向きに 0.011cm の変位を与える。等方性ならば外側境界において半径方向合応力 N_r が 0.525Kgf/cm となる。直交異方性の場合には一樣に荷重を与える時と張力の分布が異なっている。一方、振りは内側境界を接線方向に一樣に変位させて近似的に導入する。

表 1: 解析パラメーター

外側境界の半径方向変位 (cm)	0.0108
等方性の時の外側境界の N_r (Kgf/cm)	0.525
せん断剛性に掛ける係数 α	1.0, 0.1, 0.05, 0.0
ヤング率×厚さ $E_1 t (= E_2 t)$ (Kgf/cm)	1022
ポアソン比 $\nu_{12} (= \nu_{21})$	0.267

図 2: 要素分割図 (3120 要素、9048 自由度)

4.3 解析結果

図 3~6 に式 (13) の α を 1.0, 0.1, 0.05, 0.0 とした時の主応力図、等高線図、鳥瞰図を示す。主応力図と等高線図では水平方向および垂直方向が弾性対称軸すなわち繊維の方向である。主応力図では第二 Piola-Kirchhoff 応力を変形前のモデル上に描いている。面外変位 $w = +0.0067\text{cm}$ の等高線も重ねて描く。等高線図では面外変位 $w = -0.04, -0.02, -0.0067, 0.0067, 0.02, 0.04(\text{cm})$ の等高線を描く。点線は負の変位を示す。鳥瞰図では面外変位を三倍に拡大している。

張力場理論によれば引張主応力線は直線となることが示される。本解析においても α の値にかかわらず、主応力が同じ方向となる点の軌跡（張力線）はほぼ直線となっている。しかし、しわはこの直線に沿って発生しておらず少しずれがある。実験においても必ずしも直線ではなかった。

せん断剛性が小さくなるにつれて主応力の向きが繊維の向きに近づく。同時にしわの方向も繊維方向に近いものとなる。ただし、 α が 0.1 以下では主応力、形状の特徴はそれ程異ならない。

直交異方性では弾性対称軸を座標軸とした座標系の四個の象限に分かれて発生している。 $\alpha=0.1$ (図 4) の場合、第一象限のある点を 90 度ずつ反時計周りに回転させその点の面外変位の符号をみると、例えば正負正負となっている。これに対して $\alpha=0.05$ (図 5) の場合には順に正、負、負、正、 $\alpha=0.0$ (図 6) の場合は正、正、正、正となる。対称性を考えると $\alpha=0.05$ のような符号の変化はやや不自然であり、また、この場合、形状自体も対称性の崩れたものになっている。この例では Newton-Raphson 法による収束計算も非常に収束しにくかった。ここには示していないが $\alpha=0.05$ であっても初期張力の大きさを変化させるとうまく収束し、対称性のある形状となることもある。従って、パラメーターによっては図 2 の要

図 3: 主応力図、等高線図 (文献 29) 図 22)、鳥瞰図 (x3) (文献 29) 図 25)、 $\alpha = 1.0$ 、振りモーメント = 1149Kgf · cm、回転角 = 0.92 度

図 4: 主応力図、等高線図、鳥瞰図 (x3)、 $\alpha = 0.1$ 、振りモーメント = 490.8Kgf · cm、回転角 = 0.92 度

図 5: 主応力図、等高線図、鳥瞰図 (x3)、 $\alpha = 0.05$ 、振りモーメント = 383.5Kgf · cm、回転角 = 0.92 度

図 6: 主応力図、等高線図、鳥瞰図 (x3)、 $\alpha = 0.0$ 、振りモーメント = 217.4Kgf · cm、回転角 = 0.92 度

素分割では表しにくい形状となり、計算が収束しにくくなるのだと考えられる。第5節に示す実験との比較のための計算においてもこのような現象がみられる。なお、本論文の全ての計算例はたとえ形状が非対称となっても対称分岐であることは明らかである。

図7に振りモーメント-回転角曲線を示す。 α が小さい程柔らかくなっている。ここでは計算が収束していない点のデータは取り除いている。なお、計算時間はSun社のSparc Station 10に最適化コンパイラ Apogee Fortran (通常の数倍の速度となる)を組合せた時に、ひとつの例題で一週間程度かかった。

図7: 各種せん断剛性係数に対する振りモーメント-回転角曲線

5 実験結果との比較

5.1 実験の概要²⁸⁾

本節では、著者等が行った実験と有限要素法による解析の結果を比較する。実験と解析は完全に独立しており、以下の比較では振りモーメントのみを一致させて比較している。実験で取り扱った膜は等方性のポリエステルフィルムと直交異方性のC種膜である。C種膜は小規模な空間建築に用いられる。膜の外周は8個のチャックにより固定し、これを錘で引っ張ることにより初期張力を導入した。中央部は二枚の円盤で挟んで固定し、この円盤に取り付けた軸を軸受けで固定する。この軸に取り付けた棒を錘で引っ張って振りを導入する。実験では歪ゲージ、接着剤および膜の総合的な材料定数を評価しておき、これにより応力を求めた。更に、発生したしわの形状を観察した。なお、この実験については文献²⁸⁾に詳しく説明している。

5.2 解析条件

ポリエステルフィルムとC種膜の実験に対応する解析を行う。要素分割は図2と同じとする。材料定数は表2に示す実測値を用いる。ポリエステルフィルムはほぼ完全な等方性弾性体である。そこでヤング率とポアソン比は一軸引張試験により測定し、せん断剛性は等方性弾性体の公式により求めた。一方、C種膜は材料非線形性が強く弾性体とはいえない。そこで、瀬川等の文献²²⁾より、応力比1:1で応力が3.5kgf/cm程度の時にクリープを除いて評価されたヤング率とポアソン比を引用した。せん断剛性は膜構造協会試験法標準²⁵⁾に従った材料試験により求めた。なお、実測値は $\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$ を満たしていないためこれを満たすように修正した。二方向のヤング率とポアソン比をそれぞれ平均し、式(13)に代入すると $\alpha = 0.108$ となる。

4.2節と同様に、初期張力と振りは周方向に一樣な強制変位により導入する。4.2節にも述べたように、直交異方性の場合は回転対称ではないため、外側境界を一樣に変位させる場合と一樣に力を

かける場合では初期張力のモードが異なる。実験では錘で荷重をかけたため様に荷重をかける場合に近い。一方、解析ではヤング率が E_1 、ポアソン比が ν_{12} の等方性の膜に錘で荷重をかけた場合に相当する変位を全てのモデルに対して与えた。従って、直交異方性の時には初期張力のモードが実験と解析で異なる。実験のチャックあたり18Kgfの錘による荷重の約8割が、膜に伝わっていることが確認できた。そこで、錘の重さに0.8を掛けてこれをチャックの幅で割ったもの(0.626Kgf/cm)を幅あたりの荷重とし、対応する等方性膜にかけた時の変位量を計算では与える。ここではこれ以外の初期張力についての結果は示さないが、実験と解析共に初期張力が大きい程しわが細かく、また、しわ発生荷重が高くなった。

表5. 解析で用いた材料定数
(ヤング率 $\times t$ と Gt の単位: kgf/cm)

	$E_1 t$	ν_{12}	$E_2 t$	ν_{21}	Gt
ポリエステルフィルム	1022	0.267	-	-	404
C種膜 (測定値)	391	0.0	194	0.36	11
C種膜 (解析用)	390	0.49	190	0.36	11

5.3 解析結果

5.3.1 振りモーメント-回転角曲線

振りモーメント-回転角曲線を図8、9に示す。ただし、これに関しては解析結果のみを示している。図8はポリエステルフィルムの場合であり分岐後の経路が不連続となっている。図10の分岐モードは図11の最終的なモードに比べしわの本数ははるかに多い。図2の要素分割では外側ほど要素分割が粗いこともあり、分岐モードのような細かい変形が進展していく様子をうまく表現できなかったために、途中でモードの飛び移りが起きたといえる。飛び移りが起きた点では収束計算は収束しにくく、自動的に増分幅を小さくしたところ別の経路上に収束してしまった。なお、図中の全ての点で計算は収束している。

図9のC種膜の場合は計算が収束しない点があった。この場合自動的に増分幅を小さくしても収束せず、そのまま次の増分を与

図8: 振りモーメント-回転角曲線 (ポリエステルフィルム)

図9: 振りモーメント-回転角曲線 (C種膜)

えていったところ一度発散した後、近くの別の経路へ飛び移った。飛び移り後の経路は問題なく追跡できた。図12に示す等高線では対称性がやや失われている。解析モデルには弾性対称軸についての対称性があるため、変形にも対称性があるのが自然であるが、4.3節の図5や本節のポリエステルフィルムの計算と同様に要素分割の関係でちょうど納まりの良い形状が表現できないために、最初の経路の続きを追跡することができなかったと考えられる。なお、実際の膜においても曲げ剛性や初期張力の加減により、対称性が崩れた形に納まることもあると考えられる。

5.3.2 形状の比較

膜要素では曲げ剛性を考慮していないので、しわの本数は要素分割の細かさに依存する。従って、実験と解析のしわの本数まで比較することは無意味であるので、定性的な比較のみを行う。

等方性のポリエステルフィルムは透明であり写真に写りにくい

図10: 主応力と等高線 (ポリエステルフィルム)
分岐点、振りモーメント=219.1 Kgf cm

図11: 主応力と等高線 (ポリエステルフィルム)
振りモーメント=401.2 Kgf cm

図12: 主応力と等高線図 (C種膜)
振りモーメント=399.4 Kgf cm

図13: 鳥瞰図 (ポリエステルフィルム計算、写真とは対応していないが等方性)
振りモーメント=401.2 Kgf cm、面外変位は3倍に拡大

図14: 鳥瞰図 (C種膜計算、写真6に対応)
振りモーメント=399.4 Kgf cm、面外変位は拡大していない

写真1: テフロンフィルム (等方性)

写真2: C種膜 振りモーメント=400 Kgf cm

ため、ここでは同じ等方性のテフロンフィルムの実験の結果を写真1に示し、ポリエステルフィルムに対応した計算の結果を図13に示す (実験と解析の条件は異なる)。どちらも、中央円盤の周辺に均質にしわが発生している。一方、写真2、図14はC種膜についての形状の比較である。繊維方向に沿ってしわが発生する様子は似ている。ただし、計算結果では前節に述べたように形の対称性がやや失われている。曲げ剛性を無視しているのにどちらの膜の計算結果もしわの本数が実験よりも少なくその意味では要素分割は不十分である。更に細かい要素分割による結果と比較すべきであるが、これは行っていない。

5.3.3 主応力の比較

図15~20に主応力図を示す。応力はすべて合応力である。実験では内側と外側の点の応力はそれぞれ別の試験体により測定し、ひとつの図に重ねて示している。実験結果 (aで表す) と解

図 15-a: 主応力図 (ポリエステルフィルム実験)
振りモーメント=0 Kgf cm、
合応力最大値=0.7821 Kgf/cm

図 16-a: 主応力図 (ポリエステルフィルム実験)
振りモーメント=160 Kgf cm、
合応力最大値=1.313 Kgf/cm

図 17-a: 主応力図 (ポリエステルフィルム実験)
振りモーメント=400 Kgf cm、
合応力最大値=3.036 Kgf/cm

図 15-b: 主応力図 (図 15-a に対応する解析)
振りモーメント=0 Kgf cm、
合応力最大値=0.8099 Kgf/cm

図 16-b: 主応力図 (図 16-a に対応する解析)
振りモーメント=161.9 Kgf cm、
合応力最大値=1.200 Kgf/cm、しわ発生前

図 17-b: 主応力図 (図 17-a に対応する解析)
振りモーメント=401.2 Kgf cm、
合応力最大値=2.506 Kgf/cm

図 18-a: 主応力図 (C種膜実験)
振りモーメント=0 Kgf cm、
合応力最大値=0.9006 Kgf/cm

図 19-a: 主応力図 (C種膜実験)
振りモーメント=80 Kgf cm、
合応力最大値=1.301 Kgf/cm

図 20-a: 主応力図 (C種膜実験)
振りモーメント=400 Kgf cm、
合応力最大値=4.871 Kgf/cm

図 18-b: 主応力図 (図 18-a に対応する解析)
振りモーメント=0 Kgf cm、
合応力最大値=0.5185 Kgf/cm

図 19-b: 主応力図 (図 19-a に対応する解析)
振りモーメント=81.6 Kgf cm、
合応力最大値=1.165 Kgf/cm

図 20-b: 主応力図 (図 20-a に対応する解析)
振りモーメント=399.4 Kgf cm、
合応力最大値=5.491 Kgf/cm

析結果 (b で表す) を上下に並べている。解析の図の応力は第二 Piola-Kirchhoff 応力を初期配置に重ねて示している。一方、実験結果は求めた主応力を初期形状のゲージ位置に示したので、Cauchy 応力テンソルを膜面が回転した分だけ逆回転させてから初期配置に重ねて示したとみなせる。従って、伸び変形が小さければ両者を比較してもよい。主応力のスケールは実験と解析で同一とした。

C 種膜では 5.2 節に述べたように初期張力導入の条件が異なるため、振りモーメントが小さい時には結果がかなり異なる。しかし、振りモーメントが大きくなるにつれて初期張力の影響が相対的に小さくなるため、主応力の大きさや方向は良く一致するようになる。C 種膜では中央円盤の接線方向と縦糸方向 (図の水平方向) が一致する点の主応力が大きくなるのがわかる。縦糸方向の応力は横糸方向よりもかなり大きい。各図には求めた中での最大主応力値も示す。実験と解析で大体同じ大きさの振りモーメントをかけているのでこの値はほぼ一致している。圧縮応力の解放という意味では、計算で得られたしわによる変形は実験結果を良く表しているといえる。

6 結論

- (1) 四辺形膜要素によるしわの分岐解析を行った。
- (2) 非弾性膜であっても実験と解析で得られた応力は良く一致した。力は釣合っているので応力に着目すれば弾性解析でもそれ程精度は悪くない。逆に、実験で測定された応力の精度も検証された。
- (3) 引張主応力が同じ方向の点の軌跡 (張力線) はほぼ直線になり、張力場理論の結果と同様となる。
- (4) おおむね主応力の向きに沿ってしわは発生し、しわ発生領域では圧縮応力はほぼ零となることが、解析によっても確認された。
- (5) 直交異方性膜ではせん断剛性が相対的に小さいために主応力としわの向きはほぼ繊維に沿っている。せん断剛性は重要なパラメーターであるといえる。
- (6) しわの形状についても定性的には実験と解析は合う。しかし、有限要素法ではかなり細かく要素分割をしなければ細かいしわは表現できない。図 2 の要素分割では、曲げ剛性がないにもかかわらず得られるしわの本数は実験よりも少ない。従って、この要素分割では曲げ剛性を付加してもその影響を調べられない。
- (7) 分岐経路を追跡すると途中で近くの別の経路へ飛び移ることがある。このような飛び移りは、計算に用いた要素分割では力学的に自然な形状をうまく表せない時に起こるようである。飛び移りの結果、しわの形状は対称性のやや崩れたものとなる。

謝辞

本研究の一部は文部省科学研究費補助金 (特別研究員奨励費) によって行った。ここに感謝致します。

参考文献

- 1) W. R. Dean: The Elastic Stability of an Annular Plate, Proc. Roy. Soc. Lond. A.106, pp. 268-284, 1924
- 2) 近藤一夫: 平面張力場の一般解、日本航空学会誌、第 5 巻 41 号、pp. 285-299、昭和 13 年 9 月
- 3) E. Reissner: On Tension Field Theory, Proc. of the 5th Int. Congr. for Applied Mechanics Harvard Univ. & M.I.T., pp. 88-92, 1938
- 4) 井合毅: 極大エネルギーの定理による弾性問題の解法、日本航空学会誌、第 10 巻 96 号、pp. 158-180、昭和 18 年 4 月
- 5) M. Stein, J. H. Hedgepeth: Analysis of Partly Wrinkled Membrane, NASA TN D-813, 1961.7
- 6) M. M. Mikulas, Jr.: Behavior of a Flat Stretched Membrane Wrinkled by the Rotation of an Attached Hub, NASA TN D-2456, 1964.9
- 7) K. Moriya, M. Uemura: An Analysis of the Tension Field after Wrinkling in Flat Membrane Structures, Proc. IASS Pacific Symposium Part 2 on TENSION STRUCTURES and SPACE FRAMES, Tokyo and Kyoto, pp. 189-198, 1971
- 8) E. H. Mansfield: Analysis of wrinkled membranes with anisotropic and nonlinear elastic properties, Proc. Roy. Soc. Lond., A.353, pp.475-498, 1977
- 9) C. H. Wu and T. R. Canfield: Wrinkling in Finite Plane-Stress Theory, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 39, No. 2, pp. 179-199, 1981
- 10) D. Durban and Y. Stavsky: Elastic buckling of polar-orthotropic annular plates in shear, Int. J. Solids and Structures, Vol. 18, No. 1, pp. 51-58, 1982
- 11) R. K. Miller, J. M. Hedgepeth et al.: Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes, Computers & Structures, Vol.20, No.1-3, pp.631-639, 1985
- 12) 西村敏雄、登坂宜好、本間俊雄: 有限要素法による張力場解析手法について、日本建築学会構造系論文報告集、第 351 号、pp.76-83、昭和 60 年 5 月
- 13) M. Hamada and T. Harima: In-plane Torsional Buckling of an Annular Plate, Bulletin of JSME, Vol. 29, No. 250, pp. 1089-1095, 1986
- 14) D. G. Roddeman et al.: The Wrinkling of Thin Membranes: Part I-Theory, Part II-Numerical Analysis, Transactions of the ASME, Vol.54, pp.884-892, 1987
- 15) T. Suzuki, T. Ogawa, S. Motoyui, T. Sueoka: Investigation on Wrinkling Problem of Membrane Structure, Proc. of IASS-MSU Symposium on Domes from Antiquity to the Present, Istanbul, pp.695-702, 1988
- 16) E. Ore and D. Durban: Elastoplastic buckling of annular plates in pure shear, J. Appl. Mech., V. 56, N. 3, pp. 644-651, Sep. 1989
- 17) C. Cheng and X. Lui: Buckling and post-buckling of annular plates in shearing. Part I: Buckling, Part II: Post-buckling, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 92, No. 2, pp. 157-191, Nov. 1991
- 18) D. G. Roddeman: Finite Element Analysis of Wrinkling Membranes, Commun. Applied Numerical Methods, Vol. 7, No. 4, pp. 299-307, 1991
- 19) C. Cheng and X. Shang: The effect of large rotation on post-buckling of annular plates, Acta. Mech. Solida. Sinica., Vol. 5, No. 3, pp. 277-284, Jul. 1992
- 20) X. Li and D. J. Steigmann: Finite plane twist of an annular membrane, Quart J. Mech. Appl. Math., Vol. 46, No. 4, pp. 601-625, Nov. 1993
- 21) 野口裕久、久田俊明: 幾何学的非線形問題における total/updated Lagrange 統合形有限要素法定式化、日本機械学会論文集 (A 編)、59 巻 559 号、pp. 828-834、1993
- 22) 瀬川信哉、三井康司、笹川明: 膜材の応力-ひずみ曲線からクリープを分離した材料定数評価に関する実験的研究、構造工学論文集、Vol. 41B, pp. 259-269、1995
- 23) K. J. Bathe: Finite element procedures in engineering analysis, Prentice Hall, 1982
- 24) 久田俊明: 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎、丸善、1992
- 25) 日本膜構造協会試験法標準: 膜材料面内せん断剛性試験法 (MSAJ/M-01-1993)、日本膜構造協会、1993
- 26) 宮村倫司、半谷裕彦: 面内振りを受ける円形張力膜に発生するしわの実験および解析、膜構造研究論文集'94、第 8 巻、pp. 1-10、1994 年 12 月
- 27) T. Miyamura and Y. Hangai: Wrinkling on Isotropic and Orthotropic Elastic Circular Membranes under In-plane Torsion, IASS-Symposium 1995(Milano, Italy), Vol.2, pp.851-858, 1995.6
- 28) 宮村倫司、半谷裕彦: 面内振りを受ける直交異方性円形張力膜のしわ発生時の応力測定、膜構造研究論文集'95、pp. 37-44、平成 7 年 12 月
- 29) 宮村倫司、半谷裕彦: 回転対称膜構造物に発生するしわの有限要素法による解析、日本建築学会構造系論文集、第 481 号、pp. 63-70、1996 年 3 月
- 30) 宮村倫司、半谷裕彦: 面内振りを受ける円形張力膜のしわの実験と解析の比較、日本建築学会大会学術講演梗概集 B1 (近畿)、pp. 889-890、平成 8 年 9 月
- 31) 宮村倫司: 張力膜におけるしわの分岐解析および実験、東京大学博士論文、平成 7 年 12 月

(1996年10月9日原稿受理、1996年12月12日採用決定)