純曲げの作用する閉断面円筒シェルの円環を基準とする 3次元有限変形解析

THREE-DIMENSIONAL FINITE DEFORMATION ANALYSIS OF A CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO PURE BENDING USING TORUS COORDINATES

上村 充範*, 松岡 理**, 山田 耕司***, 松井 徹哉****
*Mitsunori KAMIMURA, Osamu MATSUOKA, Koji YAMADA
and Tetsuya MATSUI*

This paper is concerned with three-dimensional finite deformation analysis of a closed circular cylindrical shell subjected to pure bending. It is expected in this case that the element of the cylindrical shell will be deformed approximately to the torus shape. Then, in this paper, the torus coordinates are employed to indicate the deformed state of the shell. This approach using the torus coordinates makes the analysis simple. This paper also investigates whether the shell collapses by the Brazier buckling or by the plastic yielding due to local stresses. It is shown that the Brazier buckling occurs only for a very thin shell. The collapse of the moderate or thick shell is followed by the plastic yielding. This indicates the importance of investigating the local stress as well as the Brazier buckling.

Keywords : three-dimensional finite deformation analysis, cylindrical shell, pure bending
torus coordinates, Brazier buckling, plastic yielding

3次元有限変形解析, 円筒シェル, 純曲げ, 円環座標, 屈服座屈, 塑性降伏

1. 序

通常, 有限変形を考慮した解析をおこなう場合には, 変形後の状態は未定であるため, 変形前の自然状態を基準として変形後の状態を表示している。しかし, 座標系としては単純な円筒座標系を採用し純曲げを作用させても, 変形前の円筒座標を基準に採り解析をおこなうと, かなり複雑な解が得られて, 本来ならば円筒軸上で一定であるべき断面変形とモーメントが変化する結果となり, 何らかの修正が必要となる。⁸⁾

この修正法として本論文では軸方向の曲率変化に着目する。円筒シェルに純曲げが作用すると, シェルは近似的に曲率一定な円環(トーラス)形状の一要素になる。そこで, 変形前の形状を円筒座標により, 変形後の形状を円環座標と同座標系の変位成分によって表わして, 純曲げの大きさより円環軸線の曲率を, 釣合と境界条件より変位成分を決める解法が考えられる。これによると, 主要な変形は座標系で考慮されたことになり, 断面内における2つの座標パラメータのみに関する釣合式が得られ, 変形後の形状を円筒座標を基準とする解析に比べて簡潔なものとなる。

本論文では, 変形後の形状を基準に円環座標を採り, 3次元有限変形理論^{6) 13)}によって, 純曲げの作用する円筒シェルの安定問題について解析する。

純曲げによる屈服座屈, および, 純曲げによる曲げ主応力と純曲げの増大につれて円形断面が楕円化することにより生じるリング方向曲げ主応力との組み合わせによる局所的応力の降伏について述べる。極薄円筒シェルにおいては屈服座屈の先行によるシェルの破壊がみられるが, 通常のシェルでは, 変形後の応力の組み合わせによる降伏応力によって局部座屈が先行し, 円筒シェルが破壊に至るという結果を得ている。

純曲げの作用する円筒シェルの設計に際し, 断面の楕円化に伴う曲げ剛性の減少効果, すなわち Brazier 効果を考慮した曲げ座屈のみならず, 有限変形理論に基づく軸方向曲げ応力と, 円弧方向曲げ応力の組み合わせによる応力の検討が重要であることを述べている。

変形後の形状が近似的に推定できることによって本解析手法が適用できる例として, 外圧の作用する部分球形シェルの挙げることができる。

* 名古屋大学大学院工学研究科 大学院生・修士(工学)
** 中部大学工学部建築学科 教授・工博
*** 豊田工業高等専門学校 講師・博士(工学)
**** 名古屋大学大学院工学研究科 教授・工博

Graduate Student, Dept. of Architecture, Nagoya Univ., M. Eng.
Prof., Dept. of Architecture, Chubu Univ., Dr. Eng.
Lecturer, Toyota National College of Technology, Dr. Eng.
Prof., Dept. of Architecture, Nagoya Univ., Dr. Eng.

2. 本論で用いる記号

変形前の円筒座標と基準の円環座標および変形後の表示を区別するため、円環座標系の成分は $\bar{}$ 、変形後の成分は $\overline{}$ で表示する。

r, θ, ϕ	: 円筒座標, 円環座標パラメータ
$\bar{\mathbf{r}}$	: 円筒座標系位置ベクトル
$\bar{\mathbf{r}}$	: 円環座標系位置ベクトル
$\overline{\bar{\mathbf{r}}}$	: $\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{u}$
$\mathbf{u}$	: 変位ベクトル
R	: 円環中心線の曲率半径 または円筒座標軸 Z , $Z = R\phi$
$\mathbf{a}_i$	: $\bar{\mathbf{r}}$ についての共変基底ベクトル
$\overline{\mathbf{a}}_i$	: $\bar{\mathbf{r}}$ についての共変基底ベクトル
$\overline{\overline{\mathbf{a}}}_i$	: $\overline{\bar{\mathbf{r}}}$ についての共変基底ベクトル
$a_{ij}, \bar{a}_{ij}, \overline{\bar{a}}_{ij}$	: 共変計量テンソル
$a^{ij}, \bar{a}^{ij}, \overline{\bar{a}}^{ij}$	: 反変計量テンソル
σ^{ij}	: 変形前の形状に基づいて表わされた 2階反変応力テンソル
$\overline{\sigma}^{ij}$	: 変形後の状態の円環座標系における 2階反変応力テンソル
$\cdot_i$	: 座標パラメータ θ^i による偏微分
$\mathbf{X}$	: 物体力ベクトル
r_1, r_2	: シェル内外半径
r_0, t_0	: シェル平均半径, シェル厚
P, Q	: $r_1^2 + r_2^2, r_1 r_2$
A	: $\frac{Q^2}{P^2 - 4Q^2}$

3. 純曲げの作用する円筒シェルの解析

純曲げの作用する円筒シェルは、第一近似としてまず円環（トーラス）形状となることが予想される。この円環座標を基準に採り、釣合式と境界条件を満たす変位を円環座標系の成分として求めると主要な変形は座標系で考慮されることになり、円環軸方向の変位を扱うことなく円形断面における2個の未知変位成分により解析を進めることができる。変形状態の釣合式を円環座標系によって表わし、更に変形状態の応力をキルヒホフ応力によって表わせば、純曲げの作用する円筒シェルの円環座標を基準とする変形後の釣合式を放射方向と円周方向について導くことができる。また、変位成分を円周方向にフーリエ展開し、これらを用いて変形前後の計量テンソルの差より得られるひずみを物理量で表わして、応力-ひずみ関係より応力を求め釣合式に代入すると、曲げ荷重に関する次数と円周方向のフーリエ展開次数について釣合式を分離することができる。そして、各次数の釣合式を摂動法 (Perturbation Method) 的に解く。まず物体力を零とした線形釣合式を解き、これを基に非線形の釣合式に現れる低次解からくる非線形項を物体力とみなしてその釣合式を解く。この操作を順次繰り返していくことで高次の解を導く。

3.1. 座標の表示

ひずみテンソルは変形前後の計量テンソルの差によって表示されるため、ここでは各座標系における位置ベクトルの表示法と、計量テンソルを示す。変形前後において、それぞれの中心軸の長さが変わらないとして円筒座標と円環座標を表示する。

3.1.1 円筒座標

● 位置ベクトル

$$\bar{\mathbf{r}} = (R + r \cos \theta) \mathbf{i} + (r \sin \theta) \mathbf{j} + (R\phi) \mathbf{k}$$

図-1: 円筒座標

● 基底ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \mathbf{i} + r \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \phi} = R \mathbf{k}$$

$\mathbf{a}_i$ は座標 θ^i における基底ベクトルを意味する。(θ^i は i が 1, 2, 3 のとき、それぞれ r, θ, ϕ 座標に対応)

● 計量テンソル

$$a_{11} = 1$$

$$a_{22} = r^2$$

$$a_{33} = R^2$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

$$a = \det |a_{ij}| = r^2 R^2$$

3.1.2 円環（トーラス）座標

図-2: 円環座標

● 位置ベクトル

$$\bar{\mathbf{r}} = (R + r \cos \theta) \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + (R + r \cos \theta) \sin \phi \mathbf{k}$$

● 基底ベクトル

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_1 &= (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j} + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_2 &= (-r \sin \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (r \cos \theta) \mathbf{j} + (-r \sin \theta \sin \phi) \mathbf{k} \\ &= r \mathbf{e}_2 \\ \bar{\mathbf{a}}_3 &= (R + r \cos \theta)(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{k}) \\ &= (R + r \cos \theta) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は、それぞれ円環（トーラス）座標における単位ベクトルである。

● 計量テンソル

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= 1 \\ \bar{a}_{22} &= r^2 \\ \bar{a}_{33} &= (R + r \cos \theta)^2 \\ \bar{a} &= \det |\bar{a}_{ij}| = r^2 (R + r \cos \theta)^2\end{aligned}$$

3.1.3 変形後

純曲げの作用する円筒シェルの第一近似形状として円筒が円環になった状態だけでは内外の表面における応力の境界条件は満たされていない。これを満足するには補助的変位を加える必要がある。本論による有限変形解析では主変形を座標系で考慮し、円環座標系における釣合を満たすために断面内での微小変位を考える。ただし、純曲げによる圧縮帯の下縁の局所的座屈は考慮せず、トーラスの軸対称問題として解析する。

円環座標系における変位ベクトルを $\mathbf{u}$ とする。

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$$

● 変形後の位置ベクトル

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{u}$$

● 基底ベクトル

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial r} = (1 + u_{1,1}) \mathbf{e}_1 + u_{2,1} \mathbf{e}_2 \\ \bar{\mathbf{a}}_2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = (u_{1,2} - u_2) \mathbf{e}_1 + (r + u_{2,2} + u_1) \mathbf{e}_2 \\ \bar{\mathbf{a}}_3 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \phi} = (R + r \cos \theta + u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

● 計量テンソル

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= (1 + u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 \\ \bar{a}_{12} &= (1 + u_{1,1})(u_{1,2} - u_2) + u_{2,1}(r + u_1 + u_{2,2}) \\ \bar{a}_{22} &= (u_{1,2} - u_2)^2 + (r + u_1 + u_{2,2})^2 \\ \bar{a}_{33} &= (R + r \cos \theta + u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta)^2 \\ \bar{a}_{13} &= \bar{a}_{23} = 0 \\ \bar{a} &= \det |\bar{a}_{ij}| = \{\bar{a}_{11} \bar{a}_{22} - (\bar{a}_{12})^2\} \bar{a}_{33}\end{aligned}$$

3.2. 釣合式

有限変形の基礎式⁶⁾より純曲げの作用する円筒シェルの物体力を零とした変形後の釣合式が得られる。ここで、 $i = 1 \sim 3$ において θ^i は r, θ, ϕ 座標に対応する。

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} (\sqrt{\bar{a}} \bar{\sigma}^{ij} \bar{\mathbf{a}}_j) = 0 \quad (1)$$

キルヒホフ応力変換 $\sqrt{\bar{a}} \bar{\sigma}^{ij} = \sqrt{a} \sigma^{ij}$ を用いると

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} (\sqrt{a} \sigma^{ij} \bar{\mathbf{a}}_j) = 0 \quad (2)$$

ここで2階反変応力テンソル量を物理量で表わす次式を用いる。

$$\sigma^{ij} = \sqrt{\frac{a^{ii}}{a_{jj}}} \overset{(o)}{\sigma}^{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} \left\{ (\sqrt{a} \sqrt{\frac{a^{ii}}{a_{jj}}} \overset{(o)}{\sigma}^{ij}) \bar{\mathbf{a}}_j \right\} = 0 \quad (3)$$

応力の物理量 $\overset{(o)}{\sigma}^{ij}$ を改めて σ_{ij} と書き表わして次式を得る。

$$\begin{aligned}R(\sigma_{11} \bar{\mathbf{a}}_1 + \sigma_{12} \bar{\mathbf{a}}_2)_{,1} + R(\sigma_{21} \bar{\mathbf{a}}_1 + \frac{1}{r} \sigma_{22} \bar{\mathbf{a}}_2)_{,2} \\ - \frac{1}{R} (r \sigma_{33} \bar{\mathbf{a}}_3)_{,3} = 0\end{aligned} \quad (4)$$

変形後の基底ベクトル $\bar{\mathbf{a}}_i$ は円筒座標を基準に変位ベクトルをとって得られたのものでも、円環座標を介して得られたのものでもよい。ここでは、円環座標を考慮することによって主変形を含んだ基底ベクトルを代入することで、主軸方向に関する釣り合いは考慮されたことになり、次に示すようなトーラス断面内における微小変位に関する簡素化された2つの釣合式を解くことになる。

● 放射方向

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \frac{1}{r} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \frac{1}{r} \sigma_{12,2} \\ + \left\{ \sigma_{11,1} + \frac{1}{r} (\sigma_{11} + \sigma_{12,2}) \right\} u_{1,1} + \sigma_{11} u_{1,1} \\ + \frac{1}{r} (\sigma_{12,1} + \frac{1}{r} \sigma_{22,2}) (u_{1,2} - u_2) \\ + \frac{2}{r} \sigma_{12} (u_{1,12} - u_{2,1}) + \frac{1}{r^2} \sigma_{22} (u_{1,22} - 2u_{2,2} - u_1) \\ - \frac{1}{R} \sigma_{33} \cos \theta - \frac{r}{R^2} \sigma_{33} \cos^2 \theta \\ - \frac{1}{R^2} \sigma_{33} \cos \theta (u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) = 0\end{aligned} \quad (5)$$

● 円周方向

$$\begin{aligned}\sigma_{12,1} + \frac{2}{r} \sigma_{12} + \frac{1}{r} \sigma_{22,2} \\ + \left\{ \sigma_{11,1} + \frac{1}{r} (\sigma_{11} + \sigma_{12,2}) \right\} u_{2,1} + \sigma_{11} u_{2,1} \\ + \frac{1}{r} (\sigma_{12,1} + \frac{1}{r} \sigma_{22,2}) (u_{2,2} + u_1) \\ + \frac{2}{r} \sigma_{12} (u_{2,12} + u_{1,1}) + \frac{1}{r^2} \sigma_{22} (u_{2,22} + 2u_{1,2} - u_2) \\ + \frac{1}{R} \sigma_{33} \sin \theta + \frac{r}{R^2} \sigma_{33} \sin \theta \cos \theta \\ + \frac{1}{R^2} \sigma_{33} \sin \theta (u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) = 0\end{aligned} \quad (6)$$

3.3. 計量テンソルによるひずみ

数学的ひずみ $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} - a_{ij})$ より、物理的ひずみ ϵ_{ij} は次のようになる。

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= u_{1,1} + \frac{1}{2} \{ (u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 \} \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \{ u_{2,1} + \frac{1}{r} (u_{1,2} - u_2) \} \\ &\quad + \frac{1}{2r} \{ u_{1,1} (u_{1,2} - u_2) + u_{2,1} (u_{2,2} + u_1) \}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{r}(u_1 + u_{2,2}) + \frac{1}{2r^2}\{(u_{1,2} - u_2)^2 + (u_{2,2} + u_1)^2\}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} &= \frac{r}{R} \cos \theta \\ &+ \frac{1}{R}(u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) + \frac{r^2}{2R^2} \cos^2 \theta \\ &+ \frac{r}{R^2} \cos \theta (u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) \\ &+ \frac{1}{2R^2} (u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta)^2 \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0\end{aligned}$$

変位ベクトルの放射方向成分 u_1 および円周方向成分 u_2 を、円周方向にフーリエ展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned}u_1 &= U_{11} \cos \theta + U_{20} + U_{22} \cos 2\theta \\ &\quad + (U_{31} + U) \cos \theta + U_{33} \cos 3\theta \\ u_2 &= V_{11} \sin \theta + V_{22} \sin 2\theta \\ &\quad + (V_{31} - U) \sin \theta + V_{33} \sin 3\theta\end{aligned}$$

ここで、 U_{ij} および V_{ij} の i は幾何学的非線形からくるパラメータ $\alpha (= 1/R = M_0/EI)$ の次数を、 j はフーリエ展開次数を意味する。また、 U は円環の曲率半径 R の変化によるものであり、 M_0 は純曲げ荷重、 I は円形断面二次モーメントである。なお、本解析では α^3 までの解を求めることにする。

以上より、ひずみを改めて表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= U_{11} \cos \theta \\ &\quad + U_{20,1} + \frac{1}{4}\{(U_{11,1})^2 + (V_{11,1})^2\} \\ &\quad + \left[U_{22,1} + \frac{1}{4}\{(U_{11,1})^2 + (V_{11,1})^2\}\right] \cos 2\theta \\ &\quad + (U_{31,1} + U_{11,1}U_{20,1} + \frac{1}{2}U_{11,1}U_{22,1} \\ &\quad + \frac{1}{2}V_{11,1}V_{22,1}) \cos \theta \\ &\quad + (U_{33,1} + \frac{1}{2}U_{11,1}U_{22,1} - \frac{1}{2}V_{11,1}V_{22,1}) \cos 3\theta \\ &= \varepsilon_{1111} \cos \theta + \varepsilon_{1120} + \varepsilon_{1122} \cos 2\theta \\ &\quad + \varepsilon_{1131} \cos \theta + \varepsilon_{1133} \cos 3\theta \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\{V_{11,1} - \frac{1}{r}(U_{11} + V_{11})\} \sin \theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\{V_{22,1} - \frac{1}{r}(2U_{22} + V_{22})\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4r}(U_{11,1} - V_{11,1})(U_{11} + V_{11})\right] \sin 2\theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\{V_{31,1} - \frac{1}{r}(U_{31} + V_{31})\} - \frac{1}{4r}U_{11,1}(2U_{22} + V_{22}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4r}V_{11,1}(U_{22} + 2V_{22} - 2U_{20})\right] \sin \theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\{V_{33,1} - \frac{1}{r}(3U_{33} + V_{33})\} - \frac{1}{4r}U_{11,1}(2U_{22} + V_{22}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4r}V_{11,1}(U_{22} + 2V_{22}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4r}(U_{11} + V_{11})(U_{22,1} - V_{22,1})\right] \sin 3\theta \\ &= \varepsilon_{1211} \sin \theta + \varepsilon_{1222} \sin 2\theta \\ &\quad + \varepsilon_{1231} \sin \theta + \varepsilon_{1233} \sin 3\theta \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{r}(U_{11} + V_{11}) \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{1}{r}U_{20} + \frac{1}{2r^2}(U_{11} + V_{11})^2 \\ &+ \frac{1}{r}(U_{22} + 2V_{22}) \cos 2\theta \\ &+ \left\{\frac{1}{r}(U_{31} + V_{31}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2r^2}(U_{11} + V_{11})(2U_{20} + 3U_{22} + 3V_{22})\right\} \cos \theta \\ &+ \left\{\frac{1}{r}(U_{33} + 3V_{33}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2r^2}(U_{11} + V_{11})(U_{22} - V_{22})\right\} \cos 3\theta \\ &= \varepsilon_{2211} \cos \theta + \varepsilon_{2220} + \varepsilon_{2222} \cos 2\theta \\ &\quad + \varepsilon_{2231} \cos \theta + \varepsilon_{2233} \cos 3\theta \\ \varepsilon_{33} &= \frac{r}{R} \cos \theta \\ &\quad + \frac{U}{R} + \frac{r^2}{4R^2} + \frac{1}{2R}(U_{11} - V_{11}) \\ &\quad + \frac{1}{2R}\left\{\frac{r^2}{2R} + (U_{11} + V_{11})\right\} \cos 2\theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{R}\left\{U_{20} + \frac{1}{2}(U_{22} - V_{22})\right\} + \frac{r}{R^2}\left\{\frac{1}{2}(U_{11} - V_{11}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4}(U_{11} + V_{11}) + U\right\}\right] \cos \theta \\ &\quad + \frac{1}{2R}\left\{(U_{22} + V_{22}) + \frac{r}{2R}(U_{11} + V_{11})\right\} \cos 3\theta \\ &= \varepsilon_{3311} \cos \theta + \varepsilon_{3320} + \varepsilon_{3322} \cos 2\theta \\ &\quad + \varepsilon_{3331} \cos \theta + \varepsilon_{3333} \cos 3\theta\end{aligned}$$

次式は物理量で表示された応力とひずみの各成分の関係である。

$$\begin{aligned}\sigma_{ijpq} &= 2G(\varepsilon_{ijpq} + \frac{\nu}{1-2\nu}e_{pq}\delta_{ij}) \\ e_{pq} &= \varepsilon_{11pq} + \varepsilon_{22pq} + \varepsilon_{33pq}\end{aligned}$$

ここで、 p, q は、 α の次数およびフーリエ展開次数を意味する。

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{1111} \cos \theta + \sigma_{1120} + \sigma_{1122} \cos 2\theta \\ &\quad + \sigma_{1131} \cos \theta + \sigma_{1133} \cos 3\theta \\ \sigma_{12} &= \sigma_{1211} \sin \theta + \sigma_{1222} \sin 2\theta \\ &\quad + \sigma_{1231} \sin \theta + \sigma_{1233} \sin 3\theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_{2211} \cos \theta + \sigma_{2220} + \sigma_{2222} \cos 2\theta \\ &\quad + \sigma_{2231} \cos \theta + \sigma_{2233} \cos 3\theta \\ \sigma_{33} &= \sigma_{3311} \cos \theta + \sigma_{3320} + \sigma_{3322} \cos 2\theta \\ &\quad + \sigma_{3331} \cos \theta + \sigma_{3333} \cos 3\theta\end{aligned}$$

4. 解法および解

変位成分と構成方程式により変位成分表示された応力成分を式(5)(6)に代入して釣合式を α とフーリエ展開次数 n で展開し振動法的解法によって解く。得られた微分方程式を解くにあたり、シエルの内外境界面は自由面である（すなわち、 $r = r_1, r_2$ において $\sigma_{1111} = \sigma_{1211} = 0$ ）という境界条件を用いる。以下に、各次数の釣合式とその解を示す。

● $\alpha^1, n = 1$

$$\begin{aligned}U_{11,11} + \frac{1}{r}U_{11,1} - \frac{2}{r^2}(U_{11} + V_{11}) \\ + \frac{1}{1-2\nu}\left\{U_{11,1} + \frac{1}{r}(U_{11} + V_{11})\right\}_{,1} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{1}{R} = 0\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}V_{11,11} + \frac{1}{r}V_{11,1} - \frac{2}{r^2}(U_{11} + V_{11}) \\ - \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r}\left\{U_{11,1} + \frac{1}{r}(U_{11} + V_{11})\right\} - \frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{1}{R} = 0\end{aligned}\quad (8)$$

$$U_{11} = V_{11} = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{R} r^2$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{3311} \cos \theta = 2G(1+\nu) \frac{r}{R} \cos \theta$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$$

軸応力 σ_{33} によるモーメントを求めると、線形解においては初期モーメント M_0 に一致している。

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{33} r \cos \theta r d\theta dr = \frac{E}{R} I = M_0$$

(I : 円形断面二次モーメント)

● α^2 , $n=0$

線形解による非線形項を物体力として解く。

$$U_{20,11} + \frac{1}{r} U_{20,1} - \frac{1}{r^2} U_{20} - \frac{1-2\nu-4\nu^2}{2(1-2\nu)} \alpha^2 r = 0 \quad (9)$$

$$U_{20} = -\frac{3+2\nu}{16(1-\nu)} \alpha^2 r_1^2 r_2^2 r^{-1}$$

$$- \frac{(1-2\nu)(3+2\nu)}{16(1-\nu)} \alpha^2 (r_1^2 + r_2^2) r$$

$$- \nu U \alpha r + \frac{1-2\nu-4\nu^2}{16(1-\nu)} \alpha^2 r^3$$

● α^2 , $n=2$

$$U_{22,11} + \frac{1}{r} U_{22,1} - \frac{1}{r^2} (5U_{22} + 4V_{22})$$

$$+ \frac{1}{1-2\nu} \left\{ U_{22,1} + \frac{1}{r} (U_{22} + 2V_{22}) \right\}_{,1} - \alpha^2 r = 0 \quad (10)$$

$$V_{22,11} + \frac{1}{r} V_{22,1} - \frac{1}{r^2} (4U_{22} + 5V_{22})$$

$$- \frac{1}{1-2\nu} \frac{2}{r} \left\{ U_{22,1} + \frac{1}{r} (U_{22} + 2V_{22}) \right\} + \alpha^2 r = 0 \quad (11)$$

$$U_{22} = \frac{1}{2} \left[a_{221} r^{-3} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} d_{221} r^{-1} + b_{222} r \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\alpha^2}{6} - \frac{2\nu}{3(1-2\nu)} d_{222} \right\} r^3 \right]$$

$$V_{22} = \frac{1}{2} \left[a_{221} r^{-3} + d_{221} r^{-1} - b_{222} r \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{\alpha^2}{3} + \frac{3-2\nu}{3(1-2\nu)} d_{222} \right\} r^3 \right]$$

$$a_{221} = \frac{\alpha^2}{2} (1+\nu) \frac{Q^4}{P} \{1+4A\}$$

$$b_{222} = -\frac{\alpha^2}{2} (1+\nu) P \{1+3A\}$$

$$d_{221} = \alpha^2 (1-2\nu)(1+\nu) Q^2 \{1+3A\}$$

$$d_{222} = -\alpha^2 (1-2\nu) \left\{ \frac{\nu}{2} + 3(1+\nu)A \right\}$$

● α^3 , $n=1$

線形解および2次の非線形解を考慮して解く。

$$U_{31,11} + \frac{1}{r} U_{31,1} - \frac{2}{r^2} (U_{31} + V_{31})$$

$$+ \frac{1}{1-2\nu} \left\{ U_{31,1} + \frac{1}{r} (U_{31} + V_{31}) \right\}_{,1}$$

$$- \frac{2(1-2\nu-2\nu^2)U\alpha^2}{1-2\nu}$$

$$+ \frac{\alpha^3 \{ r^{-2} A_{311} + A_{312} + A_{313} r^2 \}}{8(1-2\nu)(1-\nu)(P^2-4Q^2)} = 0 \quad (12)$$

$$V_{31,11} + \frac{1}{r} V_{31,1} - \frac{2}{r^2} (U_{31} + V_{31})$$

$$- \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \left\{ U_{31,1} + \frac{1}{r} (U_{31} + V_{31}) \right\}$$

$$+ \frac{2(1-2\nu-2\nu^2)U\alpha^2}{1-2\nu}$$

$$+ \frac{\alpha^3 \{ r^{-2} A_{311} - A_{312} + A_{314} r^2 \}}{8(1-2\nu)(1-\nu)(P^2-4Q^2)} = 0 \quad (13)$$

$$A_{311} = -19\nu P^2 Q^2 + 42\nu^2 P^2 Q^2 + 24\nu^3 P^2 Q^2$$

$$- 32\nu^4 P^2 Q^2 + 28\nu Q^4 - 72\nu^2 Q^4$$

$$- 48\nu^3 Q^4 + 32\nu^4 Q^4$$

$$A_{312} = 10\nu P^3 - 24\nu^2 P^3 - 12\nu^3 P^3$$

$$+ 16\nu^4 P^3 - 28\nu P Q^2 + 48\nu^2 P Q^2$$

$$+ 36\nu^3 P Q^2 - 16\nu^4 P Q^2$$

$$A_{313} = -18P^2 + 15\nu P^2 + 88\nu^2 P^2 - 32\nu^3 P^2$$

$$- 48\nu^4 P^2 + 72Q^2 + 60\nu Q^2$$

$$- 448\nu^2 Q^2 + 8\nu^3 Q^2 + 288\nu^4 Q^2$$

$$A_{314} = 6P^2 + 3\nu P^2 - 40\nu^2 P^2 + 16\nu^4 P^2 - 24Q^2$$

$$+ 12\nu Q^2 + 64\nu^2 Q^2 - 24\nu^3 Q^2 + 32\nu^4 Q^2$$

$$U_{31} = \frac{1}{2} \left[a_{311} r^{-2} + b_{312} \log r \right.$$

$$+ \frac{\alpha^3 A_{311} - 8d_{311}(1-\nu)(P^2-4Q^2)}{16(1-2\nu)(1-\nu)^2(P^2-4Q^2)}$$

$$+ \left\{ a_{312} - \frac{\alpha^3 A_{312} + 8d_{312}(1-\nu)(P^2-4Q^2)}{16(1-2\nu)(1-\nu)(P^2-4Q^2)} \right\} r^2$$

$$+ \frac{(1-2\nu-2\nu^2)U\alpha^2}{1-2\nu} r^2$$

$$- \frac{4(1-\nu)(7A_{313} + A_{314}) - 5(3A_{313} + A_{314})\alpha^3 r^4}{1526(1-2\nu)(1-\nu)^2(P^2-4Q^2)} \alpha^3 r^4 \left. \right]$$

$$V_{31} = \frac{1}{2} \left[a_{311} r^{-2} - b_{312} \log r \right.$$

$$+ \frac{\alpha^3 A_{311} - 8d_{311}(1-\nu)(P^2-4Q^2)}{16(1-2\nu)(1-\nu)^2(P^2-4Q^2)}$$

$$+ \left\{ a_{312} + \frac{\alpha^3 A_{312} + 8d_{312}(1-\nu)(P^2-4Q^2)}{16(1-2\nu)(1-\nu)(P^2-4Q^2)} \right\} r^2$$

$$- \frac{(1-2\nu-2\nu^2)U\alpha^2}{1-2\nu} r^2$$

$$- \frac{4(1-\nu)(A_{313} + 7A_{314}) + (3A_{313} + A_{314})\alpha^3 r^4}{1526(1-2\nu)(1-\nu)^2(P^2-4Q^2)} \alpha^3 r^4 \left. \right]$$

$$U = -\frac{\alpha}{8} (3-2\nu) P$$

$$a_{311} = -\frac{\alpha^3}{96(1-\nu)} \frac{Q^4}{P} \{ (3-45\nu-4\nu^2+28\nu^3)$$

$$- 192\nu(1-\nu^2)A \}$$

$$d_{311} = \frac{(3 + \nu + 4\nu^3)\alpha^3}{16(1 - 2\nu)} Q^2$$

$$d_{312} = -\frac{\alpha^3}{24(1 - \nu)} \frac{Q^2}{P} \left\{ 2(6 - 15\nu - 8\nu^2 - 10\nu^3 + 20\nu^4) \right. \\ \left. + 3(15 - 51\nu - 18\nu^2 - 16\nu^3 + 40\nu^4) \right. \\ \left. - 144\nu(1 - \nu^2)A \right\}$$

$$a_{312} = \frac{\alpha^3 A_{312} + 8(3 - 4\nu)(1 - \nu)(P^2 - 4Q^2)d_{312}}{32(1 - 2\nu)(1 - \nu)(P^2 - 4Q^2)}$$

$$b_{312} = \frac{-\alpha^3 A_{333} + 8(3 - 4\nu)(1 - \nu)(P^2 - 4Q^2)d_{311}}{8(1 - 2\nu)(1 - \nu)(P^2 - 4Q^2)}$$

● α^3 , $n = 3$

$$U_{33,11} + \frac{1}{r}U_{33,1} - \frac{2}{r^2}(5U_{33} + 3V_{33}) \\ + \frac{1}{1 - 2\nu} \left\{ U_{33,1} + \frac{1}{r}(U_{33} + 3V_{33}) \right\}_{,1} \\ + \frac{\alpha^3 \{ r^{-4}A_{331} + r^{-2}A_{332} + A_{333}r^2 \}}{4(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)} = 0 \quad (14)$$

$$V_{33,11} + \frac{1}{r}V_{33,1} - \frac{2}{r^2}(3U_{33} + 5V_{33}) \\ - \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{3}{r} \left\{ U_{33,1} + \frac{1}{r}(U_{33} + 3V_{33}) \right\} \\ + \frac{\alpha^3 \{ r^{-4}A_{331} + r^{-2}A_{334} - A_{333}r^2 \}}{4(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)} = 0 \quad (15)$$

$$A_{331} = 6\nu P Q^4 - 18\nu^2 P Q^4 - 24\nu^3 P Q^4$$

$$A_{332} = -4\nu P^2 Q^2 + 12\nu^2 P^2 Q^2 + 16\nu^3 P^2 Q^2 \\ + 4\nu Q^4 - 12\nu^2 Q^4 - 16\nu^3 Q^4$$

$$A_{333} = -3P^2 - 3\nu P^2 - 4\nu^2 P^2 + 8\nu^3 P^2 + 12Q^2 \\ - 36\nu Q^2 + 16\nu^2 Q^2 + 16\nu^3 Q^2$$

$$A_{334} = 20\nu P^2 Q^2 + 4\nu^2 P^2 Q^2 - 16\nu^3 P^2 Q^2 \\ - 20\nu Q^4 - 4\nu^2 Q^4 + 16\nu^3 Q^4$$

$$U_{33} = \frac{1}{2} \left[a_{331}r^{-4} + b_{332}r^2 \right. \\ \left. + \left\{ b_{331} + \frac{\alpha^3 A_{331} - 12d_{331}(P^2 - 4Q^2)}{24(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)} \right\} r^{-2} \right. \\ \left. + \frac{4(1 - \nu)(5A_{332} - 3A_{334}) - (A_{332} - 3A_{334})\alpha^3}{256(1 - 2\nu)(1 - \nu)(P^2 - 4Q^2)} \right. \\ \left. + \left\{ a_{332} - \frac{\alpha^3 A_{333} + 12d_{332}(P^2 - 4Q^2)}{24(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)} \right\} r^4 \right] \\ V_{33} = \frac{1}{2} \left[a_{331}r^{-4} - b_{332}r^2 \right. \\ \left. + \left\{ -b_{331} + \frac{\alpha^3 A_{331} - 12d_{331}(P^2 - 4Q^2)}{24(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)} \right\} r^{-2} \right. \\ \left. - \frac{4(1 - \nu)(3A_{332} - 5A_{334}) - 3(A_{332} - 3A_{334})\alpha^3}{256(1 - 2\nu)(1 - \nu)(P^2 - 4Q^2)} \right. \\ \left. + \left\{ a_{332} + \frac{\alpha^3 A_{333} + 12d_{332}(P^2 - 4Q^2)}{24(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)} \right\} r^4 \right]$$

$$a_{331} = \frac{3\alpha^3}{8}(1 + \nu)(1 + 2\nu) \frac{Q^6}{P^2 + 2Q^2} \{1 + 3A\}$$

$$b_{332} = -\frac{\alpha^3}{16}(1 + \nu) \frac{PQ^4}{P^2 + 2Q^2}$$

$$\left\{ (3 + 2\nu)A^{-1} + (15 - 6\nu) + 18(1 - 2\nu)A \right\}$$

$$d_{331} = \frac{\alpha^3}{4}(1 + \nu) \frac{PQ^4}{P^2 + 2Q^2} \\ \left\{ (3 + 2\nu - 20\nu^2) + 6(1 + 2\nu - 12\nu^2)A \right\}$$

$$d_{332} = \frac{\alpha^3}{3} \frac{Q^2}{P^2 + 2Q^2} \\ \left\{ \nu(1 + 3\nu - \nu^2)A^{-1} + 18\nu(1 + \nu - \nu^2) \right. \\ \left. - 9(1 + \nu)(1 - 8\nu + 4\nu^2)A \right\}$$

$$a_{332} = \frac{\alpha^3 A_{333} + 12(3 - 4\nu)(P^2 - 4Q^2)d_{332}}{96(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)}$$

$$b_{331} = \frac{\alpha^3 A_{331} - 12(3 - 4\nu)(P^2 - 4Q^2)d_{331}}{48(1 - 2\nu)(P^2 - 4Q^2)}$$

得られた解によると、円筒シェルの内外境界面において応力の符号が変化しているものがある。これは、シェル厚内において曲げが生じていることを意味するもので注意すべき解であると思われる。

4.1. 解形状

ここで、解形状の一例を示しておく。初期形状の平均半径 r_0 を 1、シェル厚 t_0 を 0.2、円筒長さを 5 とし、ポアソン比 0.3 の鋼を想定している。図は曲げ荷重 M_0 に関するパラメータ $\alpha (= M_0/EI)$ が $0, \pi/12, \pi/6, \pi/4$ となるように曲げを作用させたものを左より示したものである。ただし、このモデルにおける座屈荷重は次節によると $\alpha \div \pi/28$ であるが、その変形量はかなり微小であるため、ここでは変形後の様子を知るために初期形状と座屈後の変形形状を示していることになる。

図－3：断面変形の様子

図－4：全体変形の様子

5. 円筒シェルの破壊

5.1. 屈服座屈について

シェルに曲げ荷重を加えていくとモーメントは増加するが、円筒シェルの断面変形に伴う剛性の低下からモーメントが臨界点に達する。ここでは幾何学的非線形解によるモーメントを求め、モーメントの臨界値お

よび座屈荷重から屈服座屈に関する考察をおこなう。

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{33}(x - x_0) r d\theta dr \quad (16)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{3311} \cos \theta + \sigma_{3320} + \sigma_{3322} \cos 2\theta \\ + \sigma_{3331} \cos \theta + \sigma_{3333} \cos 3\theta$$

図-5: 剛体変位による中立軸のずれ

x は基準の円環における中立軸からの距離であるが、円環の曲率半径の変化を考慮したことによる剛体変位成分を含んでおり、中立軸は基準の円環軸からずれる。ここでは x 方向変位の平均量 x_0 を用いることでずれを補正してモーメントを求めている。また、剛体変位で生じる円環軸方向応力からくるモーメントは $E r_0^5 t_0 \alpha^3$ を係数にもっているが、式(17)から分かるように殆ど影響がない。よって、各次数ごとに殆ど影響のない項を省略して近似的に得たモーメントを次に示す。

$$M \doteq \pi E r_0^3 t_0 \alpha - \frac{3}{2} \pi E (1 - \nu^2) \frac{r_0^7}{t_0} \alpha^3 \\ + \frac{5}{8} \pi E (1 - \nu^2)^2 \frac{r_0^{11}}{t_0^3} \alpha^5 \quad (17)$$

式(16)による厳密解に比べると近似解は高めの値を示す傾向にあるが、通常のシェルではその誤差は無視できる程度である。そこで、式(17)によるモーメントが極大値をとるとき円筒シェルは屈服座屈を引き起こすとして、モーメントの臨界値 $M_{CR} (= M_{max})$ および屈服座屈時の曲げ荷重によるパラメータ $\alpha (= M_0/EI)$ を次に示す。

$$M_{CR} = \frac{23 + 3\sqrt{31}}{625} \sqrt{\frac{8(9 - \sqrt{31})}{1 - \nu^2}} \pi E r_0 t_0^2 \quad (18)$$

$$\alpha = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2(9 - \sqrt{31})}{1 - \nu^2}} \frac{t_0}{r_0^2} \quad (19)$$

さらに座屈点を知るだけならば、簡易的に用いることができるという点においても α^3 の項までを考慮すればよい。このような考えのもとに、 α^3 までについて求めた場合は次のようになり、その座屈荷重は式(17)によるものより若干低くなる。

$$M \doteq \pi E r_0^3 t_0 \alpha - \frac{3}{4} \pi E (1 - \nu^2) \frac{r_0^7}{t_0} \alpha^3 \quad (20)$$

$$M_{CR} = \frac{4}{9\sqrt{1 - \nu^2}} \pi E r_0 t_0^2 \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{2}{3\sqrt{1 - \nu^2}} \frac{t_0}{r_0^2} \quad (22)$$

これより順曲げの作用する円筒シェルの屈服座屈荷重は初期形状および材料特性から直ちに得られ、全体破壊の判定に用いることができると同時に座屈時の変形状態も前節による変位解より知る事ができる。また近似解においては、シェル理論による座屈荷重⁴⁾とほぼ一致している。

図-6: 応力 σ_{22} , σ_{33}

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} \{(\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{33}^2 + \sigma_{22}^2\}} \quad (23)$$

5.2. 局所的応力の降伏について

ここでは、局所的な応力の降伏による円筒シェルの破壊について Mises の降伏条件⁵⁾を用いて考察している。具体的には、円筒シェルの屈服座屈時¹⁾の応力状態で材料の塑性化が発生する場合のシェル厚と断面半径との関係について検討している。ここで、内外境界面は自由面であり境界面における応力 σ_{11}, σ_{12} は零となるため、シェルの厚さ内においてもそれらの応力はほぼ零と考えられる。したがって、主要な応力は σ_{22} と σ_{33} であるとして Mises の降伏応力を図-6のように表わす。

断面内において降伏応力が最大となるのは伸び側 ($\theta = 0$) の外側表面 ($r = r_2$) であり、軸方向において引張り ($\sigma_{33} > 0$) リング方向に圧縮 ($\sigma_{22} < 0$) が顕著に現れている。

ここで、普通鋼 (ヤング率: $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, ポアソン比: 0.3) において、外側表面の応力分布を図-7に示しておく。ここでは、円周方向 $\theta (0 \sim 2\pi)$ とシェル厚・平均半径比 $t_0/r_0 (0 \sim 1/1000)$ をパラメータにとり、上から順に α のみを考慮、 α^2 までを考慮、及び α^3 までを考慮した主応力を用いて Mises の降伏応力分布を表示している。これによると、線形解では σ_{33} のみ存在するため上下の縁で同等の応力状態になるが、幾何学的非線形項を考慮した場合には σ_{22} の影響、すなわち楕円化による応力状態への影響がみられる。

図-7: $Y - t_0/r_0$

また、シェルが厚くなるに従って Mises 応力はほぼ線形的に増加していくことがわかるため、最も応力の卓越している $\theta = 0$ に限定して Mises の降伏応力 Y とシェル厚・平均半径比 t_0/r_0 との関係を図-7

¹⁾ 式(17)による屈服座屈時としている

に示し、円筒シェルの破壊が屈服座屈の先行によるものか、局所的応力の降伏によるものかを明らかにしている。

例として平均半径 1 に対してシェル厚が 1.82×10^{-3} (F 値: 2400 kgf/cm^2), 3.11×10^{-3} (F 値: 4100 kgf/cm^2) より厚くなると、局部において応力が弾性限界を越え塑性流動しシェルが破壊に至ることになる。その境界値は F 値を用いて次式より近似的に得られる。

$$\frac{t_0}{r_0} \div 7.6 \times 10^{-7} F \quad (24)$$

以上の結果より、通常の厚さの円筒シェルでも応力の降伏により材料が塑性化しシェルが破壊することが考えられるため、曲げの作用する円筒シェルでは屈服座屈のみならず局所的な応力の降伏についても検討する必要がある。

図-8: Mises 応力分布

6. 結語

本論文では純曲げの作用する閉断面円筒シェルの例に、3次元弾性論によるシェルの有限変形解析をおこない、シェルの座屈につき検討した。その結果とまとめを次に示す。

1. 有限変形解析をおこなう場合、近似的に考えられる形状を基準として解析をおこなうことが有効である。本論文においては、純曲げの作用する円筒シェルに対して近似形状である円環を基準座標に採り、その妥当性を示した。

以上から、本論文で提案した方法により3次元有限変形解析における理論解を簡潔に得ることができるといえる。

2. 極薄円筒シェルにおいてのみ屈服座屈の先行によるシェルの破壊がみられ、通常の円筒シェルでは純曲げによる軸応力と円形断面の楕円化に伴う曲げ応力の組み合わせにより降伏応力に至ることが先行することでシェルが破壊するという結果を得た。

したがって、極薄シェルにおいては屈服座屈の検討はシェル理論によって行えば充分である(もちろん本解析で得られた解によっても検討可能である)。しかし、通常のシェルや厚肉シェルにおいては材料の塑性化によるシェルの破壊が考えられることから、3次元解析などによる局所的な応力の検討が必要である。

ここで得られた解は限定的な変形に対する理論解ではあるが、有限要素法などの数値解析法における解の比較対象として用いることや、要素の決定などに関するめやすにすることが考えられる。

参考文献

- 1) Fung, Y.C. 大橋 義夫 訳: 固体の力学/理論, 倍風館, 1970
- 2) Flügge, W. 後藤 学 訳: テンソル解析と連続体力学, ブレイン図書(丸善), 1979
- 3) 多谷 虎男: 力学におけるテンソルと変形解析[上], 学会出版センター, 1980
- 4) 長柱研究委員会(林 毅): 弾性安定要覧(第5編 殻), コロナ社, 1951
- 5) 山田 嘉昭: 塑性力学, 日刊工業新聞社, 1965
- 6) 松岡 理: シェルの三次元解析(空間構造 第一巻), 坪井善勝 記念講演会実行委員会, 1993
- 7) 松岡 理 山田 耕司 松井 徹哉 大森 博司: 円筒シェルの軸対称曲げ応力問題の三次元理論解析(日本建築学会構造系論文集 第460号, 83-91, 1994年6月)
- 8) 山田 耕司 松岡 理 松井 徹哉 大森 博司: 純曲げの作用する閉断面円筒シェルの三次元有限変形解析(日本建築学会構造系論文集 第468号, 81-89, 1995年2月)
- 9) 山田 耕司 松岡 理 松井 徹哉 大森 博司: 円筒シェルの非軸対称曲げ応力問題の三次元理論解析(日本建築学会構造系論文集 第474号, 127-136, 1995年8月)
- 10) 松岡 理 山田 耕司 上村 充範: 三次元有限変形解析とキルヒホフ応力(日本建築学会大会学術講演梗概集 1993)
- 11) 松岡 理 山田 耕司 上村 充範: 純曲げの作用する縦型円筒シェルの有限変形解析(日本建築学会大会学術講演梗概集 1993)
- 12) 松岡 理 上村 充範 山田 耕司: 純曲げの作用する円筒シェルの円環を基準形状とする三次元有限変形解析(日本建築学会大会学術講演梗概集 1994)
- 13) Matsuoka, O. Yamada, K.: Three Dimensional Non-Linear Elastic Analysis of a Circular Cylindrical Shell Subjected to Pure Bending, Proceedings of the Seiken-IASS Symposium, 1993, pp.45-52
- 14) 松岡 理 上村 充範 山田 耕司: 純曲げの作用する円筒シェルの変形後の円環形状を基準とする3次元有限変形解析(第13回 海洋工学シンポジウム 1995年7月)

(1996年9月10日原稿受理, 1997年3月28日採用決定)