薄肉構造物解析のための高次多項式内挿変位関数を用いた 完全適合型長方形平板有限要素

A COMPLETELY COMPATIBLE RECTANGULAR PLANER SHELL ELEMENT WITH HIGHER-ORDER POLYNOMIAL INTERPOLATION DISPLACEMENT FUNCTIONS FOR ANALYSIS OF THIN-WALLED STRUCTURES

上谷 宏二*, 大神 勝城**

Koji UETANI and Katsuki OHGAMI

A new exactly compatible rectangular planer shell element on the basis of Von Karman's plate theory, whose displacement fields are approximated with higher-order polynomial interpolation functions, is proposed in this paper. The compatibility conditions at any type of interelement boundary can be exactly and easily expressed by means of the boundary tangential vectors. Very good results in FEM analyses can be obtained by using the proposed elements, with smaller number of degrees of freedom compared to some other efficient and reliable elements. The efficiency of the proposed element is demonstrated by some basic example analyses.

Keywords : FEM, rectangular planer shell element, Von Karman's plate theory, compatibility condition, element boundary tangential vector

有限要素法, 長方形平面シェル要素, フォン・カルマンの板理論, 適合条件, 要素境界接線ベクトル

1. 緒言

本論文の目的は, 法線保持と平面応力の仮定に基づく Kirchhoff 平板理論が適用できる十分薄い平板で構成された建築および土木構造物を対象とし, 高次多項式内挿変位関数を用いた収束性能のよい完全適合型長方形平面シェル要素を提案することである。

一般によく用いられる低次の平面シェル要素^{1)~8)}を用いて複数部材から成る構造物の全体挙動を精度良く解析するには, 多数の要素分割数と自由度数が必要となるため現在の計算機能力をもってしても不十分な場合が多い。とりわけ, 局部座屈が生じる場合は細かい要素分割と小刻みの増分載荷ステップが要求されるので計算負荷は更に大きなものとなる。そのために, より少ない自由度数で精度の高い解析が行える平面シェル要素の提案が求められている⁹⁾。

長方形板曲げ要素に関しては, Bognerによって提案された双3次完全多項式撓み関数を持つ適合高次要素が, 低次要素に比べて良好な収束性能を示すことが一般によく知られている^{10), 11)}。このことは, 平面シェル要素に対しても完全適合型高次要素を構成できれば, 同様の良好な収束性能が得られるであろうことを示唆している。平面シェル要素は, 要素単体の初期形状が平面であり, 折れ板構造や多面体近似された曲面板などから構成される構造の解析において, 曲げ変形と面内変形の両方が生じる場合を扱う要素である。

平面シェル要素では, 任意の角度で交わる要素間の境界線上で板の面内および曲げ変位が相互に関連する適合条件を扱う必要がある。しかし, このような適合条件を過不足なく完全に満足させることが困難であることから, 完全適合型高次要素が未だ提案されておらず¹²⁾、長方形要素が適用できる形状の構造物に対しても一般に非適合低次平面シェル要素が使用されている。適合条件を満足させるための一つの試みとして, Drilling Rotationと呼ばれる中央面の法線回りの回転を表わす節点変位成分を導入するアイデア^{1), 5), 8)}が提案されている。しかし, この方法では1節点に対して1個の回転成分のみ定義されるので, 節点を共有する複数の要素境界の各々の回転角成分を一意に記述することができず, 一般に適合条件を厳密に満足させることができない。

ここに新たに提案する要素は, Kirchhoff板理論に基づく長方形平面シェル要素であり, 完全適合を満たす8節点高次要素である。変位関数は, 曲げ変位についてはBognerの要素と同じ3次の撓み関数、面内変位についても撓み関数との対応において3次関数を採用する。4隅の節点変位成分は, 節点の3方向の並進成分と、ここで新たに定義する2本の要素境界接線ベクトルの4個の独立な回転角成分、および振れ率の計8個から成り立っている。中間節点の変位成分は, 要素境界に沿う要素座標系変位成分と要素境界の法線を基

* 京都大学工学部建築学教室 教授・工博
** 日鐵プラント設計株式会社

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.
Nittetsu Plant Designing Corporation

準にして回転する面内回転角成分からなる。要素境界接線ベクトルとは、4隅の節点において要素境界線に接して埋め込まれた単位ベクトルである。要素境界接線ベクトルという概念を新たに導入したことにより、境界上の節点の変位成分を隣接要素間で一致させるだけで全ての適合条件を過不足なく満足させることができる。従来の要素では、要素境界の回転角成分を特に取り入れていなかったことが、複数の要素が複雑に交差する境界での適合条件の記述を困難にし、完全適合型平面シェル要素の実現を阻んだ理由の1つであると考えられる。

隣接要素間で面内剪断剛性が不連続に変化する場合などは、その要素間境界で面内剪断変形角に不連続が生じるため、これを表現できる変位場を設定する必要がある。つまり、曲げ変位は撓み角の連続までを満たすC1連続であるのに対し、面内変位は本来C0連続とすべきである。この要素では、過剰な連続性を課すことなく、要素境界線上における変位場の適合条件が過不足なく満足される。その結果として、面内変位および曲げ変位の両方について良好な精度の解が得られると期待される。

また、ここで提案する幾何学的非線形効果は、撓み勾配の2次項だけを取り入れたVon Karmanの大撓み板理論の非線形歪と、増分ステップの途中でも常に要素に付随して移動する要素移動座標系の組み合わせによって簡便かつ精度良く考慮できる。この方法の有効性は、梁要素を用いた骨組解析^{12), 13)}について実証されている。これに対して、増分ステップ中は移動しない座標系を用いるTotal Lagrange流やUpdated Lagrange流の定式化では、全体座屈まで含めた挙動の追跡を行うために面内変位に関する非線形項まで全て含んだ非線形歪を採用する必要がある。高次要素では積分計算負荷が一般に多大となる難点がある。一方、Von Karman理論に基づく要素ではこの負荷が大幅に軽減される。ただし、要素移動座標系の定式化については報を改めて紹介し、本報で示す解析例では要素移動座標系を考慮しない。

ここで提案する要素の有効性は、既往の論文の中で提示されている高性能な要素と精度を比較することによって検証する。

2. 板要素の定式化

2-1. 座標系の設定

図1に示す要素座標系 ($o^E - \xi \eta \zeta$) と、系座標系 ($o - x y z$) を用いる。本論文では、これらを固定座標系として扱う。

2-2. 変位関数

板要素の要素座標系は、4隅の節点のうち1点を原点にして、2辺の要素境界に ξ 軸および η 軸を設置する。板中央面上の ξ 、 η 、 ζ 方向変位をそれぞれ $u^E(\xi, \eta)$ 、 $v^E(\xi, \eta)$ 、 $w^E(\xi, \eta)$ と表示し、係

図1：座標系

図2：要素境界接線ベクトル

数の数を40個にして ξ 、 η の高次多項式で表わす。2つの面内変位関数は、面内の剪断変形を精度よく表現することができる。

$$u^E(\xi, \eta) = \sum_{i=1,12} \alpha_i \Phi_i(\xi, \eta) \\ = \left[1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi \eta \quad \xi \eta^2 \quad \xi \eta^3 \quad \xi^2 \quad \xi^2 \eta \quad \xi^2 \eta^2 \quad \xi^2 \eta^3 \right] \\ \cdot \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \dots \alpha_{12} \right]^T$$

$$v^E(\xi, \eta) = \sum_{i=13,28} \alpha_i \Phi_i(\xi, \eta) = \left[1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi \eta \quad \xi \eta^2 \quad \xi \eta^3 \quad \xi^2 \quad \xi^2 \eta \quad \xi^2 \eta^2 \quad \xi^2 \eta^3 \quad \xi^3 \quad \xi^3 \eta \quad \xi^3 \eta^2 \quad \xi^3 \eta^3 \right] \cdot \left[\alpha_{13} \quad \alpha_{14} \dots \alpha_{28} \right]^T$$

$$w^E(\xi, \eta) = \sum_{i=29,40} \alpha_i \Phi_i(\xi, \eta) \\ = \left[1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi \eta \quad \xi \eta^2 \quad \xi \eta^3 \quad \xi^2 \quad \xi^2 \eta \quad \xi^2 \eta^2 \quad \xi^2 \eta^3 \quad \xi^3 \quad \xi^3 \eta \quad \xi^3 \eta^2 \quad \xi^3 \eta^3 \right] \\ \cdot \left[\alpha_{29} \quad \alpha_{30} \dots \alpha_{40} \right]^T \quad (1)$$

図3：節点の配置

2-3. 要素境界接線ベクトルの定義

要素境界接線ベクトルとは、図2に示すように4隅の節点において要素境界の2辺の接線方向に埋め込まれた単位ベクトル e_1 、 e_3 である。要素境界辺の変形に追従して互いに独立に回転移動する。

2-4. 板要素の変位成分

要素の変位成分は図3に示す節点A-Dおよび中間節点K-Nに属する計40個の成分で構成される。

$$\left\{ \Delta_k^E \right\}^T = \left\{ \Delta_{iA}^E \quad \Delta_{iB}^E \quad \Delta_{iC}^E \quad \Delta_{iD}^E \quad \Delta_{jK}^E \quad \Delta_{jL}^E \quad \Delta_{jM}^E \quad \Delta_{jN}^E \right\}^T \quad (2) \\ (k=1,40) \quad (i=1,8 \quad j=1,2)$$

ここで、例えば 節点Aの変位成分：

$$\left\{ \Delta_{iA}^E \right\}^T = \left[u_A^E \quad v_A^E \quad w_A^E \quad v_{,\xi A}^E \quad u_{,\xi A}^E \quad v_{,\eta A}^E \quad v_{,\xi A}^E \quad w_{,\xi A}^E \right] \\ (i=1,8)$$

中間節点Mの変位成分：

$$\left\{ \Delta_{jM}^E \right\}^T = \left[u_M^E \quad u_{,\xi M}^E \right] \text{ or } \left[w_M^E \quad w_{,\xi M}^E \right] \\ (j=1,2) \quad \xi \text{ 軸上} \quad \eta \text{ 軸上}$$

ただし、 $(\cdot)_{,\xi} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}$ であり他も倣う。

また、節点Aにおける要素境界接線ベクトルは、要素座標系の基底ベクトル e_1^E 、 e_3^E と、それぞれ2個の回転角成分を用いて以下のように表わされる。

$$\left\{ \begin{matrix} e_{1A}^E \\ e_{3A}^E \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & v_{,\xi A}^E & w_{,\xi A}^E \\ u_{,\xi A}^E & v_{,\xi A}^E & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} e_1^E \\ e_3^E \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

したがって、(3) 式中の計4個の回転角は2辺の要素境界接線ベクトルに属する変位成分であると捉え、(4) 式のように区分けでき

る。そこで、(2) 式の節点の8個の変位成分を節点および接線ベクトルに属する成分にわけると(5) 式のように表せる。ただし、式中の右端の小添字1、3は接線ベクトル番号に対応する。

$$\begin{aligned} \text{①}_{1A} \text{ に対して } \{ \Lambda_{qA1}^E \}^t &= \begin{bmatrix} v_{\xi A}^E & w_{\xi A}^E \end{bmatrix}, (q=1,2) \\ \text{③}_{3A} \text{ に対して } \{ \Lambda_{qA3}^E \}^t &= \begin{bmatrix} u_{\xi A}^E & v_{\xi A}^E \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \{ \Delta_k^E \}^t &= \left\{ \Lambda_{pA}^E \Lambda_{qA1}^E \Lambda_{qA3}^E \cdots \Lambda_{pD}^E \Lambda_{qD1}^E \Lambda_{qD3}^E \cdots \Delta_{jK}^E \cdots \Delta_{jN}^E \right\}^t \\ (k=1,40) \end{aligned}$$

ただし、 $\{ \Lambda_{pA}^E \}^t = \begin{bmatrix} u_A^E & v_A^E & w_A^E & v_{\xi A}^E \end{bmatrix}, (p=1,4)$ (5)

2-5. 要素間境界における適合条件

ここでは撓みのC1連続と面内変位のC0連続を2要素間境界を例に説明する。初期状態の要素境界接線ベクトルの配置を図4に示す。なお、2個以上の要素から成る境界については、それぞれ2要素の組合せに対して同じ取り扱いができる。

[1] 変位の連続条件

(1) 式より変位分布を表す内挿関数の ξ についての最大次数は、 $u^E(\xi, \eta)$, $v^E(\xi, \eta)$, $w^E(\xi, \eta)$ に対して、それぞれ3、3および2である。したがって、 ξ 方向の撓み曲線を決定するには、それぞれ4、4および3の合計11個の条件が必要である。この要求に対して、II側の要素境界では節点A、Bにおいて次の変位成分を用いれば、要素境界の撓み曲線が記述される。図中の右添字の最後の2文字は要素番号と節点記号を示す。

$$\begin{aligned} \text{節点A} (u_{IIA}^E, u_{\xi IIA}^E, v_{IIA}^E, v_{\xi IIA}^E, w_{IIA}^E) \quad \text{中間節点M} (w_{IIM}^E) \\ \text{節点B} (u_{IIB}^E, u_{\xi IIB}^E, v_{IIB}^E, v_{\xi IIB}^E, w_{IIB}^E) \end{aligned} \quad (6)$$

同様に、I側のAB間境界の変形を記述するために11個の変位成分を用いる。要素間境界の適合条件は、これらの2つの要素の系座標系節点変位成分を互いに一致させることによって満足させられる。このことは、図5に示す系座標系原点から節点への位置ベクトル r_A , r_B と接線ベクトルを用いて表した以下の条件式が成り立つことと等価である。

$$r_A^I = r_A^{II} \quad r_B^I = r_B^{II} \quad e_{3A}^I = e_{3A}^{II} \quad e_{3B}^I = e_{3B}^{II} \quad w_{IM}^E = w_{IIM}^E \quad (7)$$

[2] 要素境界線の法線方向の撓み勾配の連続条件

撓み勾配は、変位関数 $v^E(\xi, \eta)$ を ξ で1回微分して得られ、 ξ に関して3次関数である。そこで節点A、Bの以下の撓み角と捩れ率の計4個の変位成分を用いて、II側の撓み勾配が一意に決定される。

$$\text{節点A} (v_{\xi IIA}^E, v_{\xi \xi IIA}^E) \quad \text{節点B} (v_{\xi IIB}^E, v_{\xi \xi IIB}^E) \quad (8)$$

同様にI側でも撓み勾配が得られる。撓み勾配の連続条件は、これらの4個の系座標系節点変位成分を互いに一致させれば、常に満足される。この条件は次のように書くことができる。

$$\frac{(e_{1A}^I \times e_{3A}^I)}{|e_{1A}^I \times e_{3A}^I|} \cdot \frac{(e_{1A}^{II} \times e_{3A}^{II})}{|e_{1A}^{II} \times e_{3A}^{II}|} = \text{const.}$$

$$v_{\xi \xi IIA}^E = v_{\xi \xi IIA}^E \quad \text{節点Bについても同様。} \quad (9)$$

第1式は図6に示すように2面のなす角度が不変で、撓み角が点A、Bで連続であること、また第2式は捩れ率の連続条件を表す。

[3] 面内回転角の不連続条件

面内回転角は、変位関数 $w^E(\xi, \eta)$ を ξ で1回微分して得られ、 ξ に関して2次関数である。この面内回転角は境界上で不連続にすべきであり、節点A、M、Bで互いに独立な変位成分として扱う。

2-6. 板要素の基礎方程式

要素境界上の節点 : A, M, B

図4: 2要素間境界の接線ベクトルの配置

図5: 撓みの連続条件に関する図

図6: 撓み勾配の連続に関する図

この板要素は、Von Karmanの板の大撓み理論の基本仮定に従っており、次の歪～変位関係を満足している。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_{\xi}(\xi, \eta, \zeta) = u_{,\xi}^E + \frac{1}{2}(v_{,\xi}^E)^2 - \eta \cdot v_{,\xi \xi}^E \\ \epsilon_2 &= \epsilon_{\eta}(\xi, \eta, \zeta) = w_{,\xi}^E + \frac{1}{2}(v_{,\xi}^E)^2 - \eta \cdot v_{,\xi \xi}^E \\ \epsilon_3 &= \epsilon_{\xi \xi}(\xi, \eta, \zeta) = u_{,\xi \xi}^E + w_{,\xi}^E + (v_{,\xi}^E) \cdot (v_{,\xi}^E) - 2\eta \cdot v_{,\xi \xi}^E \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式に(1) 式を代入し、これを時間で微分して速度式を導くと、次の歪速度と一般化変位速度の関係式が得られる。ただし、以下の数式において、特に指摘しない限り同じ添字に関して総和則を適用する。

$$\dot{\epsilon}_k = B_{ki} \cdot \dot{\alpha}_i \quad (k=1,3 \quad i=1,40) \quad (11)$$

応力速度と歪速度関係は、応力～歪マトリックス D_{kl} を用いて以下のように表せる。さらに、(11) 式を代入すると、応力速度と一般化変位速度関係式が得られる。

$$\dot{\sigma}_k = D_{kl} \cdot \dot{\epsilon}_l = D_{kl} \cdot B_{lj} \cdot \dot{\alpha}_j \quad (j=1,40 \quad l=1,3) \quad (12)$$

2-7. 座標変換則

要素に関する一般化変位速度～要素座標系変位速度成分関係を定数の係数マトリックスを用いて次式で表わせる。

$$\dot{\alpha}_i = H_{ij} \cdot \dot{\Delta}_j^E \quad (13)$$

要素座標系と系座標系の節点変位速度成分の関係は、以下の2項

目で定義できる。

1) 並進変位速度成分に関する変換則

要素座標系と系座標系の基底ベクトルの関係は、次式で表わせる。

$$\hat{e}_i^E = C_{ij} \cdot \hat{e}_j \quad (i=1,3 \quad j=1,3) \quad (14)$$

このとき、2つの座標系の並進変位速度成分の関係式が、次式で得られる。

$$\dot{\hat{A}}_{iA} = C_{ji} \cdot \dot{\hat{A}}_{jA}^E \quad (15)$$

$$\text{ただし、} \left\{ \dot{\hat{A}}_{iA} \right\}^t = \left[\dot{u}_A \quad \dot{v}_A \quad \dot{w}_A \right], \left\{ \dot{\hat{A}}_{iA}^E \right\}^t = \left[\dot{u}_A^E \quad \dot{v}_A^E \quad \dot{w}_A^E \right]$$

2) 回転角速度成分に関する変換則

図7に示すように、ベクトル θ の回転移動を記述する2つの回転角成分は、 z 軸回りの回転角 θ と、 $x-y$ 平面からの回転角 φ である。ベクトル θ と系座標系基底ベクトルの関係は次式で表せる。

$$\theta_i = R_{ij} \hat{e}_j \quad (16)$$

$$\text{ただし、} \begin{Bmatrix} R_{1j} \\ R_{3j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \cos \varphi_1 & \sin \theta_1 \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \cos \theta_3 \cos \varphi_3 & \sin \theta_3 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

要素座標系の基底ベクトルとの関係は、(16)式に(14)式を代入して次のように導かれる。

$$\theta_i = R_{ij} C_{kj} \hat{e}_k^E \quad (i=1 \text{ or } 3, \quad j=1,3 \quad k=1,3) \quad (17)$$

ここで、節点Aに関して(3)式と(17)式を等置して、回転角成分の関係を導くと次式が得られる。

$$\begin{aligned} u_{\zeta A}^E &= R_{3j} \cdot C_{1j}, & v_{\zeta A}^E &= R_{3j} \cdot C_{2j} \\ v_{\xi A}^E &= R_{1j} \cdot C_{2j}, & w_{\xi A}^E &= R_{1j} \cdot C_{3j} \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式を速度表示することにより、系座標系と要素座標系の回転角速度成分の間の4つの関係式が導かれる。

$$\dot{u}_{\zeta A}^E = C_{1j} \left(\frac{\partial R_{3j}}{\partial \theta_{3A}} \dot{\theta}_{3A} + \frac{\partial R_{3j}}{\partial \varphi_{3A}} \dot{\varphi}_{3A} \right) \text{以下同様} \quad (19)$$

ここでは、節点Aにおける回転角の変化は微小であると仮定して、(19)式の右辺の境界接線ベクトルの回転角速度成分の係数は、初期状態の2つの座標系の位置関係から得られる定数として扱う^{注3)}。また、振れ率速度は座標系に依存しない変数であり、(15)式と(19)式に振れ率速度の項を加えれば、系座標系と要素座標系節点変位速度成分の間の変換則が(20)式で表せる。なお、右辺の E_{jkA} は、定数マトリックスである。

図7：要素境界接線ベクトルの回転移動の定義

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}}_{jA}^E &= E_{jkA} \dot{\hat{A}}_{kA} \quad (j=1,8 \quad k=1,8) \\ \text{ここで} \quad \left\{ \dot{\hat{A}}_{jA}^E \right\}^t &= \left[\dot{u}_A^E \quad \dot{v}_A^E \quad \dot{w}_A^E \quad \dot{v}_{\xi A}^E \quad \dot{u}_{\zeta A}^E \quad \dot{v}_{\zeta A}^E \quad \dot{v}_{\xi A}^E \quad \dot{w}_{\xi A}^E \right] \\ \left\{ \dot{\hat{A}}_{jA} \right\}^t &= \left[\dot{u}_A \quad \dot{v}_A \quad \dot{w}_A \quad \dot{v}_{\xi A} \quad \dot{\theta}_{1A} \quad \dot{\varphi}_{1A} \quad \dot{\theta}_{3A} \quad \dot{\varphi}_{3A} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

要素の全節点変位成分の速度量に対する変換則は、要素を構成する他の隅節点に対して(20)式と同じ変換式を導き、さらに中間節点に属する変位速度成分には座標変換を施さずに、それらの関係式をまとめれば(21)式で表される。

$$\dot{\hat{A}}_j^E = E_{jk} \dot{\hat{A}}_k \quad (j=1,40 \quad k=1,40) \quad (21)$$

(13)式と(21)式から、一般化変位速度成分と系座標系節点変位速度成分の関係式は、以下のよう求められる。

$$\dot{\alpha}_i = H_{ij} \dot{\hat{A}}_j^E = H_{ij} E_{jk} \dot{\hat{A}}_k = L_{ik} \dot{\hat{A}}_k \quad (i=1,40 \quad j=1,40 \quad k=1,40) \quad (22)$$

3. 接線剛性方程式

系座標系に関する要素の接線剛性方程式は、仮想仕事式に基づく通常の方法により以下のように導びける。

$$K_{mn} \dot{\hat{A}}_n = \dot{f}_m \quad (m=1,40 \quad n=1,40) \quad (23)$$

$$\text{ここで、} \quad K_{mn} = L_{im} \iint \left(\frac{\partial B_{ki}}{\partial \alpha_j} \sigma_k + B_{ki} D_{kl} B_{lj} \right) dV \bigg|_{j,n} \quad (i=1,40 \quad j=1,40 \quad k=1,3 \quad l=1,3)$$

4. 数値解析による有限要素の性能の検証

4-1. 板の曲げ性能(既往の論文の計算値との比較)

既往の論文として比較に用いるのは、3件の論文であり要素の特徴は以下の通りである。

(Shmuel L.Weissman and Robert L.Taylorの要素¹⁴⁾・および A.F. Saleeb and T.Y.Changの要素¹⁵⁾)

・Mindlin-Reissner板理論による定式化 ・Hellinger-Reissner変分原理の適用 ・C0連続の4節点4辺形要素 ・内挿関数は双1次(bilinear interpolation)

(M.Ortiz and G.R.Morrisの要素¹⁶⁾)

Kirchhoff板理論による定式化 ・C0連続の高次Kirchhoff板要素 ・9節点および16節点4辺形要素(内挿関数の最大次数は、それぞれ2および3) ・節点に属する未知数の数は4個(変位成分3個の他に1個の荷重ポテンシャル)

これらの論文で、提案された有限要素の基本性能を示す図表の中に、今回提案する有限要素(NASP)による結果を示している。

図8,9は、自由度総数(DOF)と計算精度の関係を表わしている。提案する要素は、L.TaylorやT.Y.Changの要素に比べて十分高い精度を有している。なお、論文から引用したグラフのDOFの中には、要素内の仮想内力の自由度数(12個¹⁴⁾および15個¹⁵⁾)を算入している。また、図10のM.Ortizの要素との比較でも同等もしくはそれ以上の精度がある。一方、図11の振れ¹⁵⁾に関しては収束ラインから若干ずれがあるが、4要素モデルであればほとんど一致して

おり実用上は特に問題ない。

S.L. Weisman, R.L. Talor の要素との精度比較

図 8 : 等分布荷重下の周辺支持板の板曲げ

A.F. Saleeb and T.Y. Chang の要素との性能比較

図 9 : 集中荷重下の周辺支持および固定板の板曲げ

M.Ortiz and G.R.Morrisの要素との性能比較

図 10 : 等分布荷重 (U)、集中荷重 (C) 下の周辺支持 (SS) や周辺固定 (CL) された板の板曲げ

図 11 : 単一要素の振れ

4-2. 板の面内曲げ性能

(1) 片持ち短梁に関する既往の論文の計算値との比較

Adnan Ibrahimbegovic and Edward L. Wilson の要素⁸⁾の特徴は以下の通りである。

- ・板曲げ剛性は 4 節点離散化 Kirchhoff 板要素、面内剛性は Drilling rotation を考慮した平面シェル要素
- ・節点の変位成分の数は 6 個で 1 要素の自由度総数は 24。

図 12 の縦軸は、Timoshenko の弾性論¹⁷⁾の中の理論式による値を用いて自由端の中央の変位を正規化し、横軸は曲げに関する自由度数を除いて 2 次元面内問題における自由度数のみを示す。また解析では端部の剪断荷重は要素辺に沿って等しく分布させ、 $y=0$ の固定端では、 z 方向変位を拘束している。計算精度は分割が粗くても良好であり収束性も良い。

図 12 : 板の面内曲げ

(2) 面内回転を伴う変形性能の検証

要素境界上で節点の面内回転角が不連続 (C0 連続) であるタイプ 1 と、C1 連続を仮定したタイプ 2 のモデルを設定して面内変位量を比較検証する。図 13 に示すようにモデルの縦横はそれぞれ 4

分割され、長さと板厚をパラメータに設定する。解析結果は表1に示されている。両者の変形量は板厚がすべて同じであれば、ほとんど一致している。一方、板厚に段差があれば傾向的にタイプ1の方が変形が大きく、要素間の板厚差が大きいくほど両者に無視できない差異が見受けられる。したがって、面内剛性が不連続である場合に、C0連続を忠実に設定できる今回の要素は、計算精度をより向上させるうえで有効である。

図13： 面内剛性に不連続がある平面板モデル

表1： 面内変形に関する計算結果

1. パラメータ L/D (板厚一定) の場合

L/D	ν=0.0		
	CB	DCB	DCB/CB
2	0.302746	0.302747	1.00
20	191.6077	191.6077	1.00

L/D	ν=0.3		
	CB	DCB	DCB/CB
2	0.328353	0.328356	1.000009
20	188.8726	189.049	1.000933

(unit: cm)

note) type1(DCB : discontinuous boundary rotation)

type 2 (CB : continuous boundary rotation)

D=50cm, t=1.0cm, E=2100t/cm2

2. パラメータ t1/t2 (L/D=2, 板厚が不連続)

Maximum displacement at loading point

	t1/t2	1	2.5	5	10
DCB	U0d	0.328356	0.211892	0.159563	0.128629
	U1d	0.164193	0.079472	0.043986	0.02348
CB	U0c	0.328353	0.210835	0.157496	0.125883
	U1c	0.164176	0.079504	0.044011	0.023586
ratio	U0d/U0c	1.00001	1.00501	1.01312	1.02181

(unit: cm)

note) L/D=2, E=2100t/cm2, D=50cm, t2=1.0cm, ν=0.3

4-3. 一方向に均一な圧縮を受ける単純支持矩形板の座屈

座屈固有値解析によって、要素の幾何学的非線形効果の検証を行なう。計算モデルは、1/4対称モデルである。計算結果はメッシュ数をパラメータとして表2に整理されている。検討の結果、提案する要素は粗い要素分割であっても、座屈荷重を比較すると良好な精度を有していることがわかる。

4-4. 均一な軸圧縮力が作用している円筒殻の軸対称座屈

円筒殻の形状は、節点に初期変位を与えて近似的に表現する。要素分割数は6個である。計算は、図14に示すように径厚比と材軸方向の長さを一定にして周方向の幅をパラメータに行う。計算結果および座屈固有モードの例を表3、図15に示す。ただし、図中の小メッシュは要素内の変形を表すために要素領域を細分割したものである。解析結果は、比較的粗いメッシュであっても良好な解が得られている。

表2： 周辺支持矩形板の座屈荷重

N×N	1×1	2×2	3×3	4×4	Exact
NASP ratio	76.22 1.004	75.94 1.001	75.92 1.000	75.92 1.000	75.92

(unit: ton)

図14： 円筒殻の対称座屈計算モデル

表3： 円筒殻の対称座屈荷重

θ/360	1/8	1/16	1/32	1/64	Exact
Pcr ratio	8907 1.03	8693 1.006	8658 1.002	8649 1.001	8637 (m=2)

(unit: ton)

note) Exact value to be obtained by the following formula.

$$\sigma = D \left(\frac{m^2 \pi^2}{t L^2} + \frac{E}{a^2 D} \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \right) D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$P_{cr} = 2 \pi a t \sigma_{cr}$$

m: number of waves for buckling modes

図15： 対称座屈モードの例

4-5. 均一な軸圧縮力が作用しているBOX断面柱の板の座屈

32要素からなる1/2対称モデルと計算条件を図16に整理している。座屈荷重は、荷重増分解析によって得られた軸力～材軸変位曲線において接線勾配がほとんど零になるときの荷重であると仮定す

る。座屈後の変形モードの例と座屈荷重を図17に示す。柱の座屈荷重は、BOX断面の一边の長さをもつ周辺支持矩形板の座屈応力の式(表2参照)から計算した柱の座屈荷重の厳密解にほとんど一致している。

図16: 平面シェル要素で構成されるBOX断面柱
(32要素分割)

図17: 座屈後の変形モードの例

5. 結論

本論文で以下の成果を得た。

1. 薄肉構造物を解析するための完全適合型長方形高次平面シェル要素を提案した。
2. この高次平面シェル要素の要素境界に要素境界接線ベクトルを導入して、それらの回転角成分を節点変位成分に取り入れた。このことによって、要素間境界における過不足ない完全な適合条件が実現された。
3. この要素の要素境界線上における変位場は、面内変位に関してC0連続、曲げ変位に関してC1連続を満足することを示した。
4. 今回提案した要素の曲げおよび面内変形の性能は、従来の高性能な要素と比較しても同等か、もしくはそれ以上の精度を持つことを実証した。
5. この要素を使用する解析では、板の曲げ座屈に関する幾何学的非線形効果はVon Karmanの大撓み板理論に基づく撓み勾配の2次

の非線形項で表わされる。この方法の有効性は、基本的な座屈解析の例題にて十分良好な精度の解を得ることによって実証された。

注1) シェル構造を対象にした解析のなかで、有限帯板法を用いる方が効果的である場合がある。有限帯板法は、2次元の板問題において、一方向の変位分布を少数の既知の連続関数(三角関数の使用が多い)で近似し、他の方向の要素間の適合条件のみを考えて離散化して自由度を大幅に低減する方法である⁹⁾。しかし、一方向の変位分布を固定しているので汎用性がなく、有限帯板法を適用できる対象は限られる。

注2) 連続な曲面を表わすための円筒シェルや扁平シェル要素においても、要素間境界での適合条件を過不足なく満足するものはない。

注3) 大撓み問題や移動座標系を用いた場合には、これらの係数は変数である。

参考文献

- 1) Mervyn D. OLSON and Terrence W. BEARDEN: A simple flat element revisited, Inter. Journal for Numerical Method in Eng., Vol.14, pp.51-68, 1979
- 2) Sergio IDELSOHN: On the use of deep, shallow or flat shell finite elements for the analysis of thin shell structures, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 26, pp. 321-330, 1981
- 3) Nicholas CARPENTER, Henryk STOLARSKI and Ted BELYTSCHKO: A flat triangular shell element with improved membrane interpolation, Comuni. in Appl. Numer. Methods, Vol.1, pp.161-168, 1985
- 4) J.L. MEEK and H.S. TAN: Instability analysis of thin plates and arbitrary shells using a faceted shell element with loof nodes, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 57, pp. 147-170, 1986
- 5) Kuo-Mo HSIAO: Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element, Computers & Structures, Vol.25 No.5, pp.665-675, 1987
- 6) A.F. SALEEB, T.Y. CHANG and W. GRAF: A quadrilateral shell element using a mixed formulation, Computers & Structures, Vol.26 No.5, pp.787-803, 1987
- 7) Sung C. LEE and Chan H. YOO: A novel shell element including in-plane torque effect, Computers & Structures, Vol.28 No.4, pp.505-522, 1988
- 8) Adnan IBRAHIMBEGOVIC and Edward L. WILSON: A unified formulation for triangular and quadrilateral flat shell elements with six nodal degrees of freedom, Comuni. in Appl. Numerical Method, Vol.7, pp.1-9, 1991
- 9) 鷲津久一郎, 宮本 博, 山田嘉明, 山本善之: 有限要素法ハンドブック(基礎編), 培風館, pp.406-410, 1981
- 10) O.C. ツイエンキーヴィッツ著, 吉識雅夫, 山田嘉明 監訳: マトリックス有限要素法三訂版, 培風館, pp.253-256, 1985
- 11) F.K. Bogner, R.L. Fox, and L.A. Schmit: The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., AirForce Inst. of Tech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1965(October)
- 12) 西村 督, 森迫清貴, 石田修三, 上谷宏二: 増分摂動法による立体骨組の大撓み解析, 構造工学論文集 Vol.39B, pp.73-86, 1993.3
- 13) 石田修三, 森迫清貴: 増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限解析法, 日本建築学会構造系論文報告集第397号, pp.73-81, 1989.3
- 14) Shmuel L. WEISSMAN and Robert L. TAYLOR: Resultant fields for mixed plate bending elements, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 79, pp. 321-355, 1990
- 15) A.F. SALEEB and T.Y. CHANG: An efficient quadrilateral element for plate bending analysis, Intern. Journal for Numerical Method in Eng., Vol.24, pp.1123-1155, 1987
- 16) M. ORTIZ and G.R. MORRIS: C0 finite element discretization of Kirchhoff's equations of thin plate bending, Intern. Journal for Numerical Methods in Eng., Vol.26, pp.1551-1566, 1988
- 17) ティモシェンコ, グーディア著, 金多 潔監訳: 弾性論, コロナ社, pp.41-65, 1977.5

(1997年1月6日原稿受理, 1997年6月24日採用決定)