反復計算法による構造物の形態解析と最適化

SHAPE ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF STRUCTURE USING AN ITERATIVE CALCULATION METHOD

本間 俊雄*, 登坂 宣好**

Toshio HONMA and Nobuyoshi TOSAKA

In this paper, a numerical calculation method in order to perform effectively shape analysis and optimization of structure is proposed. The procedure is based on an iterative calculation process known as the Cross method for indeterminate rigid-framed structural analysis or the relaxation method for pin-jointed frameworks. First of all, a given area in analysis is divided into partial regions and an elemental coefficient matrix is derived with the conventional finite element technique. Instead of solving the finite element equation of the overall structural system, the finite element equation in some neighborhood at the nodal point is only required. The procedure consists of a calculation for converting mechanical behavior on one node in the neighborhood into the influential forces on the adjacent node and repeats this manipulation in all the area.

To make sure of availability and efficiency, this method is applied to forward analyses, both optimizations and a shape analysis of truss structure. All results are good in any case. The proposed method can be applied to any model of which a finite element method can be applicable.

Key Words: Structural Shape Analysis, Structural Optimization, Iterative Calculation Procedure, Cross Method, Finite Element Method, Autonomous Decentralized System
構造形態解析, 構造最適化, 繰返し計算解法, クロス法, 有限要素法, 自律分散系

1. はじめに

構造物等の設計における形態解析問題や最適化問題は今まで多くの研究がなされ、種々の数理的手法が考えだされてきている。しかし、設計に対する要求の多様化は設計パラメータの増加を意味し、数理的定式化を困難にさせている。たとえ要求に沿った定式化が可能になったとしても、解を得ることができない場合が多い。ここに、新しい発想でその困難さを解消する理論や厳密な解ではないが実用上問題が生じない解を得るという方向性が現れてきた。今日のコンピュータ技術の進歩は、これらの研究領域をさらに広げる原動力になっている。

形態解析問題や最適化問題の有益な解を与える最近の方法には、一般化逆行列を用いた解析¹⁾、あるいはAIやファジィ手法の応用から始まり、遺伝的アルゴリズムや人工生命等に代表される生命の情報機構からの発想、物理現象のアナロジーを発展させた考え方が種々ある^{2),3)}。これらの方法は、対象とする問題により適用範囲が異なり、各解法の特徴を把握した上で利用する必要性が生じる。

本論文は、構造物等の形態解析問題や最適化問題に対象を絞り、古典的な反復構造解析手法を見直すことで、新しい実用的な方法を提案する。特に、取り上げる構造解析法には不静定ラーメン構造で用いられていた方法などに着目する。まず、古典的な構造解析にお

ける数値解析法の特徴を記述し、現在一般的に多用されている有限要素法との関係を考察する。この考察から、有限要素法で定式化できる問題の順解析(forward analysis)において、古典的な反復構造解析手法がそのまま応用でき、同じレベルの近似解が得られることを示す。次に構造形態や最適化のパラメータ導入と計算手法を述べ、これらの問題の解析手法となり得る可能性を明らかにする。解析例としてはトラス構造モデルを採用する。最初に順解析をおこない、有限要素法による反復計算解法の有効性を示す。次に最小重量最適化問題、変位モード指定の形態解析およびアクチュエータの最適配置問題を提示する。最後に、問題点と課題を述べると共に今後の提案手法に関する方向性をまとめる。なお、本論文で対象とする構造解析では線形弾性範囲で考える。

ここで、従来の数値解析法と本手法との位置づけについては次のように考えている。システム全体の挙動を把握するには、各要素のシステム方程式から全体系を構成し、与えられた境界条件や荷重条件の基で解くというこれまでの有限要素法の考え方は有効である。一方、本論で対象とする構造物の形態解析や最適化では、必ずしも系全体のシステム方程式を構成する必要がなく、反復計算法を通して局所系から自律分散的に全体系を構築し、解を把握しようとする一つの試みである。

* ㈱フジタ技術研究所 主任研究員・工博

** 日本大学生産工学部数理工学科 教授・工博

Senior Research Engineer, Technical Research Institute, Fujita Corporation, Dr. Eng.
Prof., Dept. of Mathematical Engineering, College of Industrial Technology, Nihon Univ., Dr. Eng.

2. 古典的構造解析における数値解法の特徴^{4)~11)}

有限要素法等の今日のようなコンピュータによる組織的数値解析法が一般に普及する以前、古典的な不静定ラーメン構造等の実用的な構造解析方法は種々存在し、各々独自の工夫が凝らされていた。これらの解法には大別して変形法と応力法がある。内容の違いは未知量を変形量とするか応力量にするかにある。いずれの方法も解を得るためには、最終的に i) 多元連立一次方程式を直接解く手法 (直接法: direct method) か ii) 構造形態を通して繰返し計算により漸近的に正しい解に収束させる手法 (漸近法あるいは反復法: method of successive approximation, iterative method) かの選択をする。直接法がよく知られた方法には、Cramer の公式を用いた方法や消去法がある。Gauss の消去法系統の解法は、計算機の発達に伴い劇的に利用されるようになった。ただし、系全体の Stiffness 行列あるいは Flexibility 行列を直接的に構成しなければならない。一方、反復計算を続けて収束解を得るという代表的な方法は、1930 年米国の Cross によって発表された固定モーメント法 (モーメント分配法) がある。この方法は単に実用解法の提案としてではなく、ラーメンの力学性状を把握する上にも、他の反復解法を誘導する上にも基本的な考え方が盛り込まれている。固定モーメント法の考え方を発展させ、1936 年英国の Southwell が pin-jointed frameworks の問題で組織的な反復計算解法 (緩和法) を示し、これを基に一般の構造解析や微分方程式の数値計算にも展開されている。これらの反復計算法は、全体に関する行列の構成はしなくてすむものの、逐次繰返ししながら正解に近づけていくため、厳密な解を得るためにはかなりの数の反復計算が必要である。反復計算法の考え方は、緩和法 (relaxation method) 系の解法と捉えられ、数学的には多元連立一次方程式の反復解法である Jacobi 反復法、Gauss-Seidel 法あるいは逐次過緩和法 (SOR) 等に属する数値計算法である。

これら i) と ii) の解法上の違いは、次のようにまとめることができる。それは系全体の行列を構成し、その行列を解くことにより解を得る手順と部分の力学的挙動を隣接部分に伝搬させながら解が収束するまで繰返す手順の違いである。系全体の行列を構成することは、最初に部分と系全体の位置関係を決定づけることで、かなり厳しい条件を導入したことになる。部分から出発した反復計算法は、計算途中で系全体の位置関係と境界条件や外力条件を逐次考慮してゆくという特徴を有する。

3. 有限要素法と古典的構造解析法との対応

従来の順解析を中心とした有限要素法では、上述した i) に対応する種々の技法を導入した直接法 (陰的解法) や数学的側面の反復法 (陽的解法) あるいは反復法と直接法を組み合わせた準陽的解法等^{12), 13)} を用いて多元連立一次方程式を解いている。形式としては構造系全体の行列を構成し、その行列を解くことに帰着する。全体系のシステム方程式を対象に解くことは、解を一義的に決定することができる便利な方法である。しかし、手計算で解を求めるには系の大きさにより限界が生じる。コンピュータの発達と解法のテクニック (ソフト) はその限界をとり払った。今日に見られるような有限要素法の普及にはこのような時代の流れに沿った手法として定着し、技術的進歩に大きく貢献している¹⁶⁾。ii) に対応した反復計算による構造解析では、実務的なレベルで一部使用されているものの、一般的には緩和法系の解法として数学的な多元連立一次方程式の計算技法へと進んだ。これは部分から全体を構成する方法が i) に比べ確定的な方法にはなり得ない、あるいは効率的な近似解を求める方法にはなり得ないと思われたためである。しかし、固定モーメント

法の考え方で述べられているように力学的性状を把握する上で便利な考え方であることから、要素の係数行列の構成より出発し、構造解析一般の方法にも従来の有限要素法のように反復計算法が応用できるものと考えられる。また、反復計算法の特徴である逐次条件を導入する操作は、形態解析や最適化のパラメータ設定に適している。なお、最近ではコンピュータのベクトル化や並列化に伴い反復計算法が見直され、共役勾配法 (conjugate gradient method: CG 法) や EBE 法 (element-by-element method) などの反復計算法が利用されるようになってきた^{13)~15)}。

4. 既往の研究

古典的な反復計算法の構造解析への展開は、上述したように Cross や Southwell の考察から始まった。最近その方法が見直され、新しい視点で構造解析への試みが、トラス構造を対象に研究がなされている^{17), 18)}。しかし、有限要素的な発想には至っていない。論文の主旨がオブジェクト指向に重点を置き、部分行列 (近傍行列) も有限要素法における要素行列からの展開ではない方法で構成されている。はりの変形解析においても、上述の考え方を行わず、たわみ式の積分定数決定へと進んでしまった¹⁹⁾。ただし、このオブジェクト指向の考え方はトラス構造の形態解析問題と最適化問題への応用とし、知的自律要素法なる概念を提出して、アクチュエータ配置の形態解析、断面最適化決定解析等に応用した自律分散系 (Autonomous Decentralized System) の先見性は重要な意味を持つ^{20)~22)}。本論文もこの流れにある。

5. 有限要素法による反復計算法

5.1 基本アルゴリズム

ここでは反復計算法の基礎となる固定モーメント法や緩和法の考え方を、慣用の有限要素法に沿って導入することを試みる。先ず、Fig.1 に示すような平面モデルでアルゴリズムを説明する。同様にトラスやはり、あるいはソリッドなど他の種々のモデルにも適用が可能であると考えている。

通常、Fig.1(a) の平面問題に対し、有限要素法では Fig.1(b) に示すような適当なメッシュモデルを定める。図中の記号 Γ_d 、 Γ_n は各々第一種境界条件 (Dirichlet 条件)、第二種境界条件 (Neumann 条件) である。 P 、 q は各々集中力と分布力を意味する。いま、メッシュ分割モデルにおける代表的な節点 i を選び、その節点に関わる要素を Fig.2 のように取り出す。取り出した部分領域を節点 i 近傍 (neighborhood) と呼ぶことにする。各節点の自由度は平面問題であるため 2 である。

固定モーメント法の考え方により、 i 以外の節点は 2 つの自由度に対し全て固定とすると、節点 i に関し 2 行 2 列の節点剛性行列が構成される。 i 節点に外力が作用されていれば変位が得られる。この変位量は本来の変位量の修正値として処理する。取り出した要素には内力が働き、固定端に反力が生じる。Fig.1(b) に戻り、 i 節点を隣接点に移動して設定外力と先に求めた反力を同時に考慮し、新しい節点近傍内で同様な計算をおこなう。この計算を全ての領域 (節点) に対して繰返し実行する。繰返し計算の終了は本来反力が発生してはいけない節点反力が零もしくは各節点の変位が一定値に収束したときとする。これらの計算手順の流れ図は Fig.3 のようになる。なお、境界条件が i 節点に課せられるとき反復計算過程においてその都度その条件を繰返し導入する。また、計算の出発点では、外力が働く節点を中心に i 節点の選択順番を考慮しあらかじめ決

定しておく必要がある。

5.2 有限要素による定式化と計算手順

変位法を利用した場合を考える。要素内の変位状態を表わす変位関数を次式のように与える。

$$u = Ca \quad (1)$$

ここで、 u , C , a は各々変位ベクトル、形状関数行列、一般化変位ベクトル(未定係数)である。

代表的要素 e において構成される変位ベクトル u_e と一般化変位ベクトル a_e の関係は次式のように得られる。

$$u_e = A_e a_e \quad (2)$$

式(1)よりひずみが与えられ、式(2)から要素内のひずみ ϵ_e が節点変位 u_e により次式の形式で求まる。

$$\epsilon_e = B_e u_e \quad (3)$$

次に、構成関係行列 D_e を与えることで応力 σ_e とひずみ ϵ_e の関係が次のように与えられる。

$$\sigma_e = D_e \epsilon_e \quad (4)$$

これらの準備の基に、節点近傍内の節点力と変位の関係を仮想仕事の原理より求める。

要素内における仮想節点変位 δu_e に対してなす仕事は内力のなす仕事に等しいことを考慮し、式(3),(4)を用いると次式が得られる。

$$\delta u_e^T R_e = \int_{\Omega_e} \delta \epsilon_e^T \sigma_e d\Omega = \int_{\Omega_e} B_e^T D_e B_e d\Omega u_e \quad (5)$$

ここで、 R_e は外力に相当するベクトルである。最終的に座標変換を考慮した一要素のシステム方程式は、次のように得られる。

$$R_e^* = K_e^* u_e^* \quad (6)$$

ただし、 K_e^* は剛性行列であり、記号 $()^*$ は系全体に座標変換を考慮した量であることを意味する。

いま、代表節点 i の近傍を取り出す。節点近傍内の要素数を ℓ_i とする。節点近傍内の剛性行列 ${}_i K^*$ は次のように得られる(Fig.3 [A])。

$${}_i K^* = \sum_{e=1}^{\ell_i} K_e^{*+} \quad (7)$$

ただし、記号 $()^+$ はローカルエリアの総自由度数の大きさに拡大させた行列で、拡大させた行列の要素部には零を配置させたものである。

ここに、固定モーメント法による i 節点以外の全ての自由度を固定させると行列が縮約され、次式が導かれる(Fig.3 [B])。

$$\begin{matrix} (j \times 1) & (j \times j) & (j \times 1) \\ {}_i R^* & = {}_i K^* & {}_i u^* \end{matrix} \quad (8)$$

ここで $(m \times n)$ は行列の大きさを表わし、 j は一節点の自由度数である。 ${}_i R^*$ は i 節点の換算外力ベクトルである(Fig.3 [C])。式(8)より i 節点の変形修正量ベクトル ${}_i u^*$ が求まる。この操作を全領域で繰り返す。境界条件は式(8)の段階で逐次導入する(Fig.3 [D])。これらの反復計算をおこなう上で注意する点は、固定端の反力を次の近傍内の i 節点の外力に変換する方法である。新 i 節点は旧 i 節点の隣接点とするため、新 i 節点は旧 i 節点の近傍内では固定端である。固定端の反力は旧近傍内からの作用力に対するものであるため、新近傍内ではその反力値を用いてはならない。旧近傍内

Fig.1 Analysis model

Fig. 2 Neighborhood of i -th nodal point

Fig.3 Flow diagram for iterative calculation procedure

からの作用力をそのまま利用する必要がある。従って得られた反力値の逆符号を用いる。また、新 i 節点は複数の旧近傍からの作用力を受ける。それらの作用力は全て加え合わせたものを用いる必要がある。釣り合いの状態にあれば、拘束自由度以外の点において各近傍からの作用力とその点における外力は打ち消される。なお、これらのアルゴリズムを実際問題に適応させるために開発したソフトには FORTRAN 言語を採用した。

5.3 パラメータの導入と計算技法

本解析法では、形態解析や最適化問題における設計変数の導入を以下に示すように非常に簡単な操作で扱うことができる。各計算ステップ毎および各節点近傍の計算毎に、境界条件を導入する手順と同じく逐次条件設定を繰り返す (Fig.3 [D])。

この手順によると斉次 Dirichlet 条件の順解析では問題なく解が求められる。しかし、強制変位である非斉次 Dirichlet 条件を与えると擬似解を得る。この擬似解の性質を見極め、解を得るための計算技法を考える必要がある。ここに、次式に示す式(6)の形式である境界条件処理をおこなった系全体の荷重変位関係を用い、技法を必要とする理由を示す。

$$R = K(x)U \quad (9)$$

各記号の意味は式(6)に準ずる。 x は指定する形態を表わすパラメータや最適化パラメータとする。式(9)より $r(x)$ を次式で定義する。

$$r(x) = R - K(x)U \quad (10)$$

本来、変数ベクトル $r(x)$ は次の条件を満足しなければならない。

$$r(x) = 0 \quad (11)$$

反復計算法では、 $r(x)$ が計算途中の節点反力となる。釣り合い状態 (収束した解) になれば、式(11)が満たされる。この事実から次式を収束判定とする (Fig.3 [E])。

$$\|r(x)\| < \varepsilon \quad (12)$$

ただし、 ε は収束判定に用いる微小量である。

指定した条件パラメータ x を逐次反復計算の各ステップで導入すると $r(x)$ は式(11)を満足せず、一定値に確定することがある。このときの解が擬似解である。擬似解の発生は次のように考えられる。

非斉次 Dirichlet 条件を与えたとき、系全体の荷重変位関係から出発するならば、強制変位影響分を強制変位を与えた節点以外の節点に外力として配分され、式(9)の形式を得る。しかし、反復計算法では節点近傍内で強制変位を逐次導入するため、外力に換算することができない。その結果、収束したとしても反力 $r(x)$ が発生し、擬似解が得られる。そこで解を求めるために、条件パラメータ x を段階的に与え、 $r(x)$ の値を順次追跡しながら式(11)を満足する状態を探し出す。設定条件により求められる構造形態は初期状態に最も近い形状が自然であると考えられるため、パラメータ x の変動による $r(x)$ とその増分を調べることで、式(11)を満足する状態が比較的たやすく探索できる。

6. トラス構造への適用

有限要素法による反復計算法を平面トラス構造問題の順解析、最小重量最適化問題、変位モード指定形態解析およびアクチュエータ最適配置問題に関する例題を示す。取り上げた問題は、最近の研究で提示されたモデルである。順解析では、各々の形態解析と最適化問題に用いたトラス構造モデルを、固定条件で計算させた。最小重量最適化では、軸力状態でトラスの断面積を変化させる問題に変

換させた固定条件の解析であり、基本的に擬似解が発生する問題ではない。変位モード指定形態解析では、強制変位 (非斉次 Dirichlet 条件) を結果的に与えるため、 $r(x)$ を解消させる収束計算を実行させる。最後に、アクチュエータ最適配置解析では、擬似解を最適配置の情報とする計算手順を示す。これらの内容により、形態解析と最適化問題への提案手法の可能性を探索。なお、判定は式(12)を用い、 $\varepsilon = 10 \times 10^{-10}$ とした。計算は倍精度でおこなっている。解析結果のトラス形状図では、説明がない限り、点線が変形前、実線が変形後を示す。節点位置の数値は鉛直変位、要素位置の数値は軸力を意味する。

6.1 順解析

Fig.4~6 に示す 3 つのトラス構造モデル (Model-A, -B, -C) を用いて順解析をおこなった。Model-A は要素数 11, 節点数 6, Model-B は要素数 13, 節点数 8, Model-C は要素数 27, 節点数 15 である。材料の諸元は次のように設定した。Model-A, -B, -C に対して、弾性係数 $E = 2100 \text{ tf/cm}^2$, 断面積 $A = 10 \text{ cm}^2$ とする。各モデルは文献 21), 23), 24) で提示されたあるいは類似のものであり、最小重量最適化問題の解析、変位モード指定形態解析およびアクチュエータ最適配置問題に扱われている。解析結果は Fig.7, 8, 9 に示す。反復計算回数は、Model-A (a) Case-1 水平載荷, (b) Case-2 水平 + 垂直載荷で共に 310 であり、Model-B で 263, Model-C (a) Case-1 対称載荷 と (b) Case-2 偏心載荷で各々 4766, 6323 である。各解析モデル共に同じ有限要素モデルを用いて計算すると反復計算法と有限要素法による解とは一致した。Model-C の解は共に文献 24) の結果とも一致している。Model-C (a), (b) の計算過程 $\|r(x)\|$ の収束状況を Fig.10 に示す。横軸が反復回数、縦軸が $\log(\|r(x)\|)$ である。なお、近傍の順番を決める i 節点の取り方により反復回数は変化する。ここでは最大の外力値が作用した節点から節点の指定を開始し、その節点を中心に同心円状に隣接節点順番を決めるルールを指定した。

6.2 最小重量最適化問題

文献 21) で取り上げている問題である。同質材料で構成されている Model-A のトラス構造に対し、Fig.4(a), (b) に示す外力条件を与えたとき、最小重量 (体積) とする構造形態を求める解析である。いま、問題を簡単にするため次の仮定を与える。

- ① 部材断面は円形形状とする。
- ② 一要素の部材において断面の大きさは一定とする。

この仮定により、要素 e の部材長さ ℓ_e , 体積 V_e , 断面積 A_e と置くと、体積と断面積の関係は次のように与えられ、各部材の断面積の大きさにより部材重量を見積もることができる。

$$V_e = A_e \cdot \ell_e \quad (13)$$

ここで、最小重量を決定するローカルルールを以下のように設定する。なお、式中添字記号 (k) は k ステップ目の繰返し計算時の値である。

○引張強度が与えられた場合：

$$A_e^{(k+1)} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{\sigma_e^{(k)}}{\sigma^t} \right) A_e^{(k)} \quad (14)$$

◎圧縮強度が与えられた場合：

$$A_e^{(k+1)} = \left(1 - \beta + \beta \frac{\sigma_e^{(k)}}{\sigma^c} \right) A_e^{(k)} \quad (15)$$

Fig.4 Analysis model-1 (Model-A)

Fig.5 Analysis model-2 (Model-B)

Fig.6 Analysis model-3 (Model-C)

Fig.7 Present solutions for Model-A (deformed configuration)

Fig.8 Present solutions for Model-B (deformed configuration)

●座屈条件が与えられている場合：

$$A_e^{(k+1)} = \left(1 - \gamma + \gamma \frac{P_e^{(k)}}{P_{e:cr}^{(k)*}} \right) A_e^{(k)} \quad (16)$$

ここで、各記号は次の通りである。

σ^t : 最大引張応力	σ^c : 最大圧縮応力
$P_e^{(k)}$: 部材軸力	$P_{e:cr}^{(k)}$: Euler 座屈値
$P_{e:cr}^{(k)*} = \lambda \cdot P_{e:cr}^{(k)}$	
α : 加速緩和係数 ($0 < \alpha \leq 1$)	β : 加速緩和係数 ($0 < \beta \leq 1$)
γ : 加速緩和係数 ($0 < \gamma \leq 1$)	λ : 座屈限界係数 ($0 < \lambda \leq 1$)

最大引張応力と最大圧縮応力を与え、Euler 座屈値により部材断面積を条件式(14)～(16)によって逐次変化させる。全ての部材断面積が変化しなくなったならば収束したと判定する。解析結果を

Fig.9 Present solutions for Model-C (deformed configuration)

Fig.10 History of $\|r(x)\|$ during the iterative processes for Model-C

Fig.11～13に示す。Fig.11は各載荷条件に対する本計算で得られた最適部材断面分布図である。各部材の断面積に比例させて表示した。各載荷条件の最大断面積は、Case-1の場合、部材番号4、 $A_e = 45.97 \text{ cm}^2$ 、載荷条件Case-2の場合、部材番号9、 $A_e = 38.58 \text{ cm}^2$ である。この図における点線部は要素が必要ないと判断した部材である。ただし、計算上では断面積を微量($A_e = 0.01 \text{ cm}^2$)与えている。

Fig.12は反復回数に応じた体積変化状況を示すグラフである。横軸に断面状態変化回数、縦軸に体積を採っている。Fig.13にはCase-1における主な部材断面の変化状況を示す。横軸に断面状態変化回数、縦軸に断面積を示している。体積変化の収束条件は各断面積の変化が 10×10^{-3} 以下とした。この場合、Case-1の収束回数は42断面状態、トータル3169、Case-2では、152断面状態、トータル74849である。収束判定を 1.0×10^{-5} とすると、Case-1の場合、79断面状態、トータル3768、Case-2の場合、974断面状態、トータル295783となっている。なお、各計算に用いた係数は、 $\alpha = \beta = \gamma = 0.8$ 、 $\lambda = 0.9$ とした。 α, β, γ は規定された範囲であれば、収束回数は変わるが同じ結果を得る。各係数は0.7から0.95の範囲を採ればよい。 $\alpha = \beta = \gamma = 1.0$ のとなると収束しない場合がある。 λ は判定基準をEuler座屈値($\lambda = 1.0$)とするか安全側の値を採る($\lambda < 1.0$)かの設定である。

6.3 変位モード指定形態解析

Model-Bに対し、文献23)の変位モード指定による構造形態解析をおこなう。例題は、上弦節点(節点1,2,3)の水平位置が変形前後で等しくなるように節点4,5,6の変形前の鉛直座標を決めることである(Fig.5参照)。ここで与えたローカルルールは、節点1,2,3の鉛直座標を各々 $Y(1), Y(2), Y(3)$ として、次式に示す条件である。

$$Y(3)^{(k+1)} = \frac{Y(1)^{(k)} + Y(2)^{(k)} + Y(3)^{(k)}}{3} \quad (17)$$

$$Y(1)^{(k+1)} = Y(2)^{(k+1)} = Y(3)^{(k+1)} \quad (18)$$

式中添字記号 (k) は k ステップ目の繰返し計算時の値である。

節点4,5,6の鉛直座標を各々 $Y(4), Y(5), Y(6)$ とおく。節点1,2,3の集中鉛直下向き荷重の総和は 2.1 kgf とする。各節点の採りうる鉛直座標の範囲は $-100 \leq Y(4) = Y(6) \leq 100, -100 \leq Y(5) < 100$ として順解析をおこなった。1cm単位で調べた。解析結果とし、 $\|r(x)\|$ と $Y(4) = Y(6)$ 、 $Y(5)$ の関係をFig.14に示す。その内容は非常に複雑な曲面になることが分かる。曲面上の曲線は $\|r(x)\|$ の等高線である。この図は文献23)の結果とほぼ一致している。Fig.15に、 $\|r(x)\|$ の等高線図を示す。等高線は共に0.0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2の値で描いている。 $\|r(x)\| = 0$ を満足する曲線上の点が解形態を与える。文献23)の結果と細部で若干異なることが認められる。

詳細に解の違いを検討するため $Y(5) = -50.0 \text{ cm}$ のときの $\|r(x)\|$ と $Y(4)$ の関係グラフをFig.16に、 $Y(4) = -70.0 \text{ cm}$ のときの $\|r(x)\|$ と $Y(5)$ の関係グラフをFig.17に示す。□が文献23)の解、○が本手法による解である。Fig.16では一致している。Fig.17では $Y(5) = 100.0 \text{ cm}$ 付近で差が認められるものの、式(11)を満足する位置や他の部分では一致していることが確かめられる。文献23)で $\|r(x)\| = 0$ 上の点を追跡するためにNewton-Raphson法や最大傾斜法を用いている。本反復計算法では、陽な形式で $r(x)$ が与えられていないため、初期形状あるいはある想定形状を出発点として他の設計条件を考慮し、 $Y(4), Y(5)$ の変動と $\|r(x)\|$ の増分および $\|r(x)\|$ 自身の値から数値的に探索をおこなう。ここでは、 $Y(5)$ の座標値を

(a) Vertical loading (Case-1) (b) Oblique loading (Case-2)
Fig.11 Present solutions for Model-A (distribution of sectional areas)

Fig.12 History of the total volume during the repeated optimization processes for Model-A

Fig.13 History of the sectional areas during the repeated optimization processes for Model-A

Fig.14 $\|r(x)\|$ -surface for Model-B

Fig.15 $\|r(x)\|$ contour map for Model-B

80, 60, 40, 20, 0 と決め、 $Y(4)$ を追跡することから6つの形状を求めた。得られた形状を Fig.18 に示す。なお、文献 23)で示された $\|r(x)\|$ とここで示した $\|r(x)\|$ の値が一致したことは、 $\|r(x)\|$ が不釣り合い力の大きさを意味すると考えている。

6.4 アクチュエータ最適配置問題

Model-C に対し、文献 24)の数値解析例を実行させた。解析問題は、節点3と節点5の上向き鉛直変位(目標変位) $d_0 = 10.0\text{ cm}$ を制約条件とするとき、制御部材(アクチュエータ)の最適配置を水平材で2箇所決定することである(Fig.6 参照)。反復計算解法における制御部材の決め方は、不釣り合い状態時の部材軸力が大きい場所とする。これは、軸力の大きい部材に関する不釣り合い力が大きな値を示すため、その部材を制御することで構造物全体の不釣り合い力の解消を速やかにおこなうことができると考えたからである。まず、目標変位を強制変位として順解析を行う。その結果、節点不釣り合い力 $r(x)$ が得られる。部材力は変位量が求まっているため簡単に求められる。この不釣り合い状態時の部材力分布を(a) Case-1, (b) Case-2の両载荷条件の場合について Fig.19 に示す。正負の大きい部材で構造系形状が対称であることを考慮し制御部材を選ぶと引張軸力材で部材番号 3, 4, 圧縮軸力材で部材番号 9, 11 の位置と設定した。各位置に制御部材を配置させたときの最終結果は Fig.20,21 に示す通りである。部材番号 9, 11 を制御部材としたときの解析結果 Fig.21 は文献 24)と一致した。なお、変動パラメータは制御部材の軸力とした。

7. 考察と課題

数値解析例で示したように各例題ともいづれも良好な結果が得られている。これらの内容を検討する。

順解析では、節点数や要素数が少ないモデルを解析した。その中で、異なった解析モデルではあるが厳しい収束条件の基、節点数を2倍に増やすと繰返し数は10~20倍に増えた。また、同じ形状モデルでも载荷条件により異なる場合もある。Cross 法や初期の緩和法等の一般構造への適用に汎用的なコンピュータ利用がなされなくなった理由が計算効率面にあることが示されている。しかし、今後、確実に収束解が得られるのであるならば、利用の見直しをする必要がある。最近、要素単位で反復計算をおこなう EBE 法のように計算の分散化とベクトル化、並列計算機を利用することで計算効率の向上が図れた報告がある^{14),15)}。基本的には同類の計算過程であるため、並列計算が可能である。また、構造系の本来の優対角行列の性質と Model-C の収束状況を示したグラフ(Fig.10)から分かるように安定的に解に収束することから、本手法の大型モデルへの適用可能性は十分にある。特に、形態解析や最適化のような問題に対しては力を発揮するものと考えられる。

ここでは、形態解析や最適化の問題に最小重量最適化問題、変位モード指定形態解析およびアクチュエータ最適配置問題を示した。最小重量最適化問題では、Fig.12,13 のグラフから、計算途中で部材資源の交換が行われていることが分かる。設定したローカルルールによる力学的作用が隣接部材に伝播し、最終的に全体に影響を及ぼすという、自律分散過程が捉えられた。注意することは、断面積の状態に関する収束判定を厳しくすると収束回数が大きく変化する事実から、判定値と解の状況を把握する必要があることである。ただし、判定値 1.0×10^{-3} と 1.0×10^{-5} による部材断面積の差はこの例題ではほとんどない。部材数が多いモデルを用いると部材資源の交換が頻繁におこなわれ、収束回数が大きく増加することが予想さ

Fig.16 Comparison of $Y(4) - \|r(x)\|$ relation ($Y(5) = -50.0$)

Fig.17 Comparison of $Y(5) - \|r(x)\|$ relation ($Y(4) = -70.0$)

Fig.18 Present solutions for Model-B

Fig.19 Axial forces on nodal unbalanced forces for Model-B

れる。変位モード指定形態解析では、単純な問題であるが既往の研究とよく一致した近似解を得た。Fig.14の曲面を得るために行った各点の収束回数は30~300回程度であった。ここで問題になることは、解に近い位置から出発しないと $r(x)$ を解消する操作で解を得ることが困難な点である。感度解析も利用したが基本的には同じである。アクチュエータ最適配置問題において、ここで示した方法では制御部材の最適個数の決定に用いることはできない。他のルールを考える必要があるだろう。

ここで示したように、例題の範囲では経験的に問題のない近似解が得られている。形態解析や最適化のパラメータ決定については、設定問題毎に解析内容を検討して、適当なローカルルールを見つける必要がある。

今後の計算手法の課題は、提示した例題において形態や最適化パラメータの種類が1の場合である。複数種のパラメータに対しても反復計算法の適用性を確認する必要がある。しかし、これも式(10)で定義した節点の不釣り合い反力 $r(x)$ の性質や式(11)を満足するように $r(x)$ の追跡法を整理すれば解決するものと考ええる。また、用いた有限要素も従来一般に利用されているものであり解析上特別なものではないため、有限要素法が適用できるものに対して本手法が全て適用できる。

8. おわりに

本論文では、従来の有限要素法で作成された要素から節点の剛性行列を構成することで、固定モーメント法や緩和法の利用した反復計算による形態解析や最適化問題に対する解法を示した。近似解を得るためには、従来の有限要素法が系全体の行列を構成しなければならぬのに対し、本手法は一節点の行列構成のみと繰返し手順の組み合わせでよいという大きな特徴を持つ。これらを一言で表わすならば、前者を中央集中型、後者を自律分散型の解法といえる。自律分散型解法とは条件設定に応じた状態に逐次変化(成長)して解形態を得る。すなわち、対象とする近傍の状態から自律分散的に自己組織化をおこなうことで全体の状態を決定しようとする一つの方法であり、解の構成条件をステップ毎に導入する解法上の性質より形態解析や最適化問題に応用の可能性が広いことを意味している。今後は、この方法をはりや板構造、ソリッド構造などの種々の形態解析や最適化の問題に適用を広げ、本反復計算法の有効性を示して行きたい。

謝辞

本研究を進めるに当たり、株式会社フジタ 技術研究所 中山昌尚博士には貴重な助言を受けました。豊橋技術科学大学 加藤史郎博士には緩和法に関するご指摘を受けました。また、東京大学 生産技術研究所 半谷裕彦博士には文献[23]に関する詳しい資料を見せいただきました。ここに深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 半谷裕彦, 川口健一: 形態解析, 培風館, 1991
- [2] 日本機械学会編: 適応化・知能化・最適化法, 技報堂出版, 1996
- [3] 矢川元基, 登坂宜好企画: 特集 計算力学の進展, 機械の研究, 49(1), 1997
- [4] 建築構造学体系編集委員会編: トラス・ラーメン, 建築学体系 13, 彰国社, 1966
- [5] 建築構造学体系編集委員会編: コンピュータによる構造数値解析法, 建築学体系 8, 彰国社, 1966
- [6] 谷資信編著: 構造解析の基礎, 建築物の構造解析シリーズ I, 技報堂出版, 1976
- [7] 中村恒善編著: 建築構造力学 図説・演習 I, II, 丸善, 1982
- [8] Southwell, R.V.: Relaxation Method in Engineering Science, Oxford, 1940

(a) Symmetric loading (Case-1)

(b) Eccentric loading (Case-2)

Fig.20 Present results for Model-C (control element number 3,4)

(a) Symmetric loading (Case-1)

(b) Eccentric loading (Case-2)

Fig.21 Present results for Model-C (control element number 9,11)

- [9] Southwell, R.V.: Relaxation Method in Theoretical Physics I, II, Oxford, 1946, 1956
- [10] 正野重方: 緩和法入門, 朝倉出版, 1963
- [11] Smith, G.D. (藤川洋一郎訳): 偏微分方程式の解法, サイエンスライブラリ 情報電算機=3, p.79-93, サイエンス社, 1961
- [12] 森正武, 杉原正順, 室田一雄: 線形計算, 岩波講座応用数学 8[方法 2], 岩波書店, 1994
- [13] 小国力編: 行列計算ソフトウェア, 丸善, 1991
- [14] Whitcomb, J.D.: Iterative Global/Local Finite Element Analysis, Computer & Structures, 40(4), pp.1027-1031, 1991
- [15] Li, Z., Reed, M.B.: Convergence analysis for element-by-element finite element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 123, pp.33-42, 1995
- [16] 鷲津久一郎他共編: 有限要素法ハンドブック I 基礎編, II 応用編, 培風館, 1981, 1983
- [17] 三木光範, 杉山吉彦, 内田雄治: オブジェクト指向によるトラス構造解析, 日本機械学会論文集(A編), 57-541, pp.218-223, 1991
- [18] Miki, M., Murotsu, Y.: Object-Oriented Approach to Modeling and Analysis of Truss Structures, AIAA Journal, 33-2, pp.348-354, 1995
- [19] 三木光範, 杉山吉彦, 内田雄治: オブジェクト指向によるはりの変形解析, 日本機械学会論文集(A編), 57-541, pp.212-217, 1991
- [20] 三木光範: 知的自律要素法によるシステムの解析と最適化, 機械の研究, 48-2, p.12-20, 1996
- [21] Miki, M.: Object-Oriented Optimization of Discrete Structures, AIAA Journal, 33-10, pp.1940-1945, 1995
- [22] 三木光範, 室津義定, 田合弘幸: 知識ベースを用いた可変形状トラスの形態解析および構造解析, 日本航空宇宙学会誌, 44-515, pp.32-39, 1996
- [23] 半谷裕彦, 原田和明: 変位モード指定の構造形態解析法, 日本建築学会構造系論文報告集, 453, pp.95-100, 1993
- [24] 加藤史郎, 中澤祥二: 静的荷重を受ける平面張弦構造の軸力決定法に関する一考察, 日本建築学会構造系論文報告集, 474, pp.147-154, 1995

(1997年4月7日原稿受理, 1997年7月16日採用決定)