ハイブリッド型応力法による鉄筋コンクリート造骨組の弾塑性崩壊解析

INELASTIC COLLAPSE ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE FRAMED
STRUCTURES USING THE HYBRID STRESS FINITE ELEMENTS

稲田 祐二*, 川端 康洋**, 近藤 一夫***, 玉井 宏章****, 角 徹三*****

Yuji INADA, Yasuhiro KAWABATA, Kazuo KONDOH,

Hiroyuki TAMAI and Tetsuzo KAKU

The hybrid stress beam-column finite elements, which have been proposed by Dr. Kondoh and based on the assumed stress method, yield no discretizing errors in their elastic and elasto-plastic responses, under the employed beam-column theory, of the member, with any (distributions of axial and flexural rigidity, and stress-strain characteristics) and subjected to any (concentrated and distributed) loads. Then, this approach might be one of the most promising approach to trace and examine the inelastic and collapse behavior of framed structures. In this paper, simple and effective hybrid stress finite element formulation is developed for reinforced concrete (R.C.) framed structures.

Based on the Timoshenko's beam-column theory considering the first order shear deformation, resultant stress-generalized strain relations of the R.C. beam-column section, which represent the well-known stiffness degrading characteristics of the R.C. member under the (axial forcing and bending) and their interaction, are formulated.

According to the standard procedure shown in Ref.17), the hybrid stress method, wherein employed the Lagrange multiplier method for computational convenience, is unifiedly formulated for the given basic equations and R.C. plane beam-column element is derived.

Several numerical tests are performed, and show that the present approach and element have excellent capacity to simulate simply and accurately the more complicate behavior of R.C. framed structures.

keyword: hybrid stress method, reinforced concrete framed structure, yield condition, cracking condition, collapse analysis

ハイブリッド型応力法, 鉄筋コンクリート骨組構造, 降伏条件, ひび割れ条件, 崩壊解析

1. はじめに

鉄筋コンクリート（以下RCと記す）造建物の耐震性能を的確に評価するためには、予想される種々の外乱に対して、崩壊荷重、崩壊機構等の塑性崩壊状態に関する情報を含めた、対象建物の弾塑性応答挙動を、十分な精度をもって予測しておく必要があり、従って、簡便で、信頼性の高い解析手法、離散化モデルの構築は、耐震性能評価精度向上のための必須条件であると思われる。こうした要求に応えるため、これまでに、数多くのモデルが提案されてきた。骨組構造物を対象とした代表的な部材要素モデルとしては、材端ばねモデル⁵⁾、分割梁モデル⁶⁾、柔性パラボラモデル⁷⁾、離散ばねモデル⁸⁾、柔域モデル⁹⁾等のはり部材を対象とした1軸モデルと、ファイバーモデル¹⁰⁾、金属塑性論に基づいたモデル^{11)~13)}、MSSモデル¹⁴⁾等の柱部材を対象とした軸力-曲げモーメントの相互作用を考慮した2軸あるいは3軸モデルが挙げられる。又、これらのモデル間の比較検討も一部なされている¹⁵⁾。各モデルとも、RC部材特有の特性を比較的簡便に表現できるモデルとして提案されたものであり、要求される解析レベルや解析条件に応じた適切なモデルの選択が行われれば、その有用性は非常に高いと思われる。しかしながら、これらのモデルに共通する難点として、部材中間分布荷重の影響を厳密に考慮できないことが指摘される¹⁶⁾。さらに、

RC部材に一般的に見られる部材軸方向の変断面特性や変形の進行と共に生じる損傷の拡がりの影響を十分な汎用性と精度をもって評価することは、例えば、損傷を受けることが予想される領域の要素分割を細かくしたり、あるいは仮定する合応力場や変位場を高次化する等の、何等かの特別の操作を施ささない限り、非常に困難なのが現状である。

一方、近藤は、文献17)等で、鋼構造骨組の弾塑性崩壊挙動の解析を主要な対象として、古典的はり柱理論あるいは1次のせん断変形を考慮したTimoshenkoはり柱理論を用いたハイブリッド型応力法による骨組構造の離散化解析手法の提案を行っている。この解析手法は、力のつり合いを基礎に考える応力法をベースとしながらも、要素境界上の平衡条件をゆるめたハイブリッド型の変分原理を用いることにより、最終的な未知量を節点変位のみとしているため、標準的解析プログラムに乗り易く、又、応力場は、採用したはり柱理論の範疇であれば、平衡方程式から、その分布形状が一義的に定まるため、結果として、材軸方向の剛性分布がどのような状態となっても、又、部材中間分布荷重を受けるような場合についても、離散化誤差は、全く生じない。

ハイブリッド型応力法による離散化解析法は、これまで、構成方程式関係の取り扱いが比較的容易な、鋼構造骨組にのみ適用されて

注) 本研究の一部は、文献1)~4)において発表している。

* 米子工業高等専門学校建築学科 助教授・工修

** 米子工業高等専門学校建築学科 教授

*** 広島大学工学部建設構造工学 助教授・工博

**** 広島大学工学部建設構造工学 助手・工博

***** 豊橋技術科学大学建設工学系 教授・工博

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Yonago National College of Technology, M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture, Yonago National College of Technology

Assoc. Prof., Dept. of Struct. Eng., Faculty of Eng., Hiroshima University, Dr. Eng.

Res. Assoc., Dept. of Struct. Eng., Faculty of Eng., Hiroshima University, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Civil and Architectural Eng., Toyohashi Univ. of Technology, Dr. Eng.

いたが、その変形挙動を支配する主要な因子が材料非線形性であるような骨組の解析に対して、絶大な威力を発揮するものであり、又、採用したはり柱理論内で処理するものであれば、適用に際しての材料特性に関する制限もない。従って、鋼構造骨組に比して、はるかに複雑な材料特性を有するRC骨組に対しても、適切な材料あるいは断面特性の設定により、前述したような従来のモデルに見られたいくつかの難点も、無理なく、合理的に解消され、その弾塑性崩壊挙動を組織的、統一的に、又、精度よく追跡しうる強力なツールとなることが期待される。

本報告では、このような観点から、Timoshenkoはり柱理論を用いたハイブリッド型応力法によるRC平面骨組部材要素モデルの定式化と、誘導した要素モデルの有効性を検討するため、いくつかの数値解析を行った結果について報告する。本節での序文に引き続き、次節では、RCはり柱部材の断面特性の定式化が行われる。そこでは、文献11)～13)等を参考に、ひび割れ曲線及び降伏曲線という2つの載荷曲線¹⁸⁾の概念が導入され、軸力と曲げモーメントとの間の連成効果を考慮した3折れ線型の特性を有する一般化ひずみ-合応力関係式が誘導される。ハイブリッド型応力法による定式化は、3節で行われ、Lagrangeの未定乗数法を用いた基礎変分原理が示されると共に、要素両端の節点変位のみを最終的な未知量とする要素剛性方程式が誘導される。又、誘導した要素モデルの有効性を検討するためにに行った数値解析例は、4節に示される。尚、ここでは、外乱として、単調載荷荷重を対象としており、繰返し載荷の場合については、報を改めて報告する予定である。

2. RCはり柱部材の断面特性の定式化

前述のように、ハイブリッド型応力法によるはり柱要素モデルでは、弾塑性領域においても、離散化誤差は全く生じない。従って、この要素の精度は、採用した材料あるいは断面特性の設定如何により定まることになる。RCはり柱部材における損傷評価の方法としては、a) 各ポイントごとに評価する方法、b) はり柱の断面全体の損傷を評価する方法、c) 部材あるいは要素全体としての損傷を評価する方法の3つが考えられるが、本報告では、採用したはり柱理論の適応性や計算効率、汎用性等を勘案して、b)の評価方法を採用することとし、本節では、まず、RCはり柱部材断面の断面特性を設定する。

さて、図1に示すような座標系を有する代表的RC平面はり柱部材要素を考える。本研究では、はり柱に生じる塑性変形を、互いに独立な曲げ変形成分と軸方向変形成分の2つの成分からなるものとし、単軸応力状態における曲げモーメント-曲率($M-\kappa$)関係及び軸力-軸ひずみ($N-\epsilon$)関係を、それぞれ、図2及び図3に示すような3折れ線型に近似する。ここで、 $N-\epsilon$ 関係を3折れ線型の特性としたのは、福澤等¹²⁾が用いたのと同様な考え方に基づくものであり、圧縮領域ではコンクリートの応力-ひずみ関係の非線形性を、又、引張り領域ではコンクリートのひび割れによる剛性低下を考慮したものである。一方、せん断変形成分に関しては、その構成方程式関係が、現状では十分明らかではないことを考慮し、弾性扱いとする。

次に、各断面での合応力間の連成効果を考慮するため、載荷曲線として、 $M-N$ 応力空間内に、ひび割れ曲線： f と降伏曲線： g を

図1 平面はり柱部材要素

図2 RCはり柱断面の $M-\kappa$ 関係

図3 RCはり柱断面の $N-\epsilon$ 関係

図4 RCはり柱断面に出現する3つの応力状態

設定する。これらの曲線により、はり柱断面は、その応力状態によって、図4に示すように、弾性領域、ひび割れ領域及び降伏領域の3つの領域に分類される^{11)～13)}。ひび割れ曲線： f 及び降伏曲線： g は、与えられた1軸弾塑性特性に従い、移動あるいは膨張するものとする、それぞれ、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} f(M - cM^*, N - cN^*) &= C_c \\ g(M - yM^*, N - yN^*) &= C_y \end{aligned} \quad \dots (1. a, b)$$

ここに、 M, N は現在の合応力、 cM^*, cN^* はひび割れ曲線の中

心, yM^* , yN^* は降伏曲線の中心, C_c , C_y はそれぞれの曲線の大きさを表わすパラメータである。

ひび割れ領域及び降伏領域における付加塑性一般化ひずみ増分ベクトル $\{\Delta D_c\} = \{\Delta \kappa_c, \Delta \varepsilon_c\}^T$, $\{\Delta D_y\} = \{\Delta \kappa_y, \Delta \varepsilon_y\}^T$ は, 塑性流れ則に従えば, それぞれ, 次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{\Delta D_c\} &= \Delta \lambda_c \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial N} \right) \right\}^T = \Delta \lambda_c \{F_n\} \\ \{\Delta D_y\} &= \Delta \lambda_y \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial M} \right), \left(\frac{\partial g}{\partial N} \right) \right\}^T = \Delta \lambda_y \{G_n\} \end{aligned} \quad \dots (2. a, b)$$

ここに, $\Delta \lambda_c$, $\Delta \lambda_y$ は, 付加塑性一般化ひずみ増分の大きさを示すスカラー量であり, $\Delta \lambda_c < 0$, $\Delta \lambda_y < 0$ の時, 除荷状態となる。

一方, 合応力増分ベクトル $\{\Delta q\} = \{\Delta M, \Delta N\}^T$ には, 増分後もひび割れ及び降伏曲線上にあるための条件として, 次式の増分型塑性条件式が賦与される。

$$\begin{aligned} \{F_n\}^T \cdot \left\{ \{\Delta q\} - \Delta \lambda_c [cH] \{F_n\} \right\} &= 0 \\ \{G_n\}^T \cdot \left\{ \{\Delta q\} - \Delta \lambda_y [yH] \{G_n\} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (3. a, b)$$

ここに,

$$[cH] = \begin{bmatrix} cH_m & 0 \\ 0 & cH_n \end{bmatrix} \quad [yH] = \begin{bmatrix} yH_m & 0 \\ 0 & yH_n \end{bmatrix} \quad \dots (4. a, b)$$

であり, cH_m , cH_n , yH_m , yH_n は, 図2及び図3のように設定した1軸弾塑性特性から, それぞれ, 次式のように定まる硬化係数である。

$$\begin{aligned} cH_m &= \alpha_{mi} (1 - \alpha_{mi})^{-1} K_m \\ cH_n &= \alpha_{nj} (1 - \alpha_{nj})^{-1} K_n \end{aligned} \quad \dots (5. a, b)$$

又

$$\begin{aligned} yH_m &= \beta_{mi} \alpha_{mi} (\alpha_{mi} - \beta_{mi})^{-1} K_m \\ yH_n &= \beta_{nj} \alpha_{nj} (\alpha_{nj} - \beta_{nj})^{-1} K_n \end{aligned} \quad \dots (6. a, b)$$

ここに, 添字 i 及び j は, 対応する合応力の値の正負により, それぞれ, (u, b) 及び (t, c) となる。

(2. a, b) 及び (3. a, b) 式がひび割れ領域及び降伏領域におけるはり柱の断面剛性を定める基礎式である。尚, (4. a, b) 式の硬化係数が0でなければ, (2. a, b) 及び (3. a, b) 式より, 一般化ひずみ増分-合応力増分関係を導くことも容易に可能であるが, ひび割れ曲線及び降伏曲線として, 折れ線を含む種々の形状のものを, 比較的容易に処理可能であること, 硬化係数が0となっても何等の問題も生じないこと等のことを考慮して, 本研究では, 次節に示すように, (3. a, b) 式で与えられる増分型の塑性条件を, 合応力場に課せられる新たな付帯条件と考え, Lagrangeの未定乗数を適用するという手法を採用する。

3. ハイブリッド型応力法による定式化

次に, ハイブリッド型応力法によるRC平面はり柱部材要素モデルの誘導を行う。

3. 1 基礎変分原理

部材要素両端の変位増分ベクトルを $\{\Delta d_m\} = \{\Delta w_1, \Delta u_1, \Delta \theta_1, \Delta w_2, \Delta u_2, \Delta \theta_2\}^T$, 合応力表示された材端力増分ベクトルを $\{\Delta T\} = \{-\Delta N|_1, -\Delta Q|_1, \Delta M|_1, \Delta N|_2, \Delta Q|_2, -\Delta M|_2\}^T$ と表わし, ひび割れ領域及び降伏領域で与えられる (3. a, b) 式の増分型の塑性条件を, 合応力場に課せられる新たな付帯条件としてLagrangeの未定乗数法を適用すると, ハイブリッド型停留コンプリメンタリーエネルギーの原理の増分型汎関数: $\Delta \Pi^m$ は, 次式となる。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi^m &= \int_0^L (-\Delta \mathcal{E}) dz + \{\Delta T\}^T \cdot \{\Delta d_m\} \\ &\quad - \int_{\ell_c} \left[\Delta \lambda_c \{F_n\}^T \cdot \left\{ \{\Delta q\} - \frac{1}{2} \Delta \lambda_c [cH] \{F_n\} \right\} \right] dz \\ &\quad - \int_{\ell_y} \left[\Delta \lambda_y \{G_n\}^T \cdot \left\{ \{\Delta q\} - \frac{1}{2} \Delta \lambda_y [yH] \{G_n\} \right\} \right] dz \end{aligned} \quad \dots (7)$$

ここに, $\Delta \mathcal{E}$ は, 単位長さ当たりの弾性コンプリメンタリーエネルギーの増分, 又, $\Delta \lambda_c$ 及び $\Delta \lambda_y$ は, 付加塑性一般化ひずみ増分の大きさを表わすパラメータという物理的意味を有するLagrangeの未定乗数であり, ℓ_c 及び ℓ_y は, それぞれ, 材軸に沿ったひび割れ及び降伏領域である。

(7) 式における独立関数は, 該当の節点を共有する隣接する部材要素について共通に定義される $\{\Delta d_m\}$ と, 各部材要素について独立に与えられる ΔN , ΔM , ΔQ 及び $\Delta \lambda_c$, $\Delta \lambda_y$ であり, 又, 付帯条件は, 次式で与えられる, 要素内部の増分型の平衡方程式である。

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N}{dz} + \Delta \bar{P}_z &= 0 & \frac{d\Delta M}{dz} - \Delta Q &= 0 \\ \frac{d\Delta Q}{dz} + \Delta \bar{P}_x &= 0 \end{aligned} \quad \dots (8. a \sim c)$$

ここに, $\Delta \bar{P}_z$ 及び $\Delta \bar{P}_x$ は, それぞれ, 単位長さ当たりの z 及び x 軸方向の部材中間分布荷重の増分である。

3. 2 RC平面はり柱要素モデルの誘導

付帯条件である (8. a ~ c) 式の増分型平衡方程式を満足する合応力場は, 次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta N &= \Delta n + \Delta \bar{N}_{(p)} \\ \Delta M &= \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \Delta m_1 + \left(\frac{z}{L} \right) \cdot \Delta m_2 + \Delta \bar{M}_{(p)} \\ \Delta Q &= \left(-\frac{1}{L} \right) \cdot \Delta m_1 + \left(\frac{1}{L} \right) \cdot \Delta m_2 + \Delta \bar{Q}_{(p)} \end{aligned} \quad \dots (9. a \sim c)$$

又,

$$\begin{aligned} \Delta \bar{N}_{(p)} &= \int_0^z \Delta \bar{P}_z dz \\ \Delta \bar{M}_{(p)} &= \int_0^z \left(\int_0^z \Delta \bar{P}_x dz \right) dz + \left(\frac{z}{L} \right) \int_0^L \left(\int_0^z \Delta \bar{P}_x dz \right) dz \\ \Delta \bar{Q}_{(p)} &= \int_0^z \Delta \bar{P}_x dz + \left(\frac{1}{L} \right) \int_0^L \left(\int_0^z \Delta \bar{P}_x dz \right) dz \end{aligned} \quad \dots (10. a \sim c)$$

ここに, $\{\Delta S_m\} = \{\Delta n, \Delta m_1, \Delta m_2\}^T$ は, 各部材要素で独立に与えられる合応力パラメータの増分ベクトルである。

さて, 本研究では, ひび割れ領域及び降伏領域の材軸方向への拡

図5 要素のセグメント分割

がりや、はり柱の変断面特性を評価するため、各はり柱要素を、図5に示すように、材軸方向に微小なセグメントに分割し、はり柱の断面の損傷及び剛性は各セグメント内で一定であるものとして、セグメント内に1個ずつ設けた一般化ひずみ、合応力評価点における値を用いて算出することにする。又、エネルギー積分は、弾性コンプリメンタリーエネルギーについては、正確に算出するが、その他の諸量については、計算の簡略化を計るため、一般化ひずみ、合応力算定点の値を用いて代表させる。

(9. a~c) 式を (7) 式に代入し、前述のような剛性評価及びエネルギー算定の方法を用いて整理すると、 $\Delta \Pi^m$ は、次式のように書ける。

$$\Delta \Pi^m = -\frac{1}{2} \{ \Delta \bar{S}_m \}^T [\bar{A}_{ss}] \{ \Delta \bar{S}_m \} - \{ \Delta \bar{S}_m \}^T \{ \Delta \bar{B}_s \} + \{ \Delta \bar{S}_m \}^T [\bar{A}_{sd}] \{ \Delta d_m \} + \{ \Delta \bar{B}_d \}^T \{ \Delta d_m \} \quad \dots (11)$$

ここに、

$$\{ \Delta \bar{S}_m \} = \left\{ \left\{ \Delta \bar{S}_m \right\}^T, \Delta \lambda c_1, \dots, \Delta \lambda c_{mc}, \Delta \lambda y_1, \dots, \Delta \lambda y_{my} \right\}^T \quad \dots (12)$$

又 $[\bar{A}_{ss}]$ は、 $(3 + mc + my) \times (3 + mc + my)$ の対称マトリックスであり、ゼロ以外の成分： $a_{ij} = a_{ji}$ を示すと、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \int_0^L [H_s]^T [C] [H_s] dz \quad \dots (13. a)$$

$4 \leq i \leq (3 + mc)$:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= L_{si} \cdot (f)_{,N} \Big|_{z=L_{hi}} & a_{2i} &= L_{si} \cdot \left(1 - \frac{L_{hi}}{L} \right) (f)_{,M} \Big|_{z=L_{hi}} \\ a_{3i} &= L_{si} \cdot \left(\frac{L_{hi}}{L} \right) (f)_{,M} \Big|_{z=L_{hi}} & a_{ii} &= L_{si} \cdot \left[H_m(f)_{,M}^2 + H_n(f)_{,N}^2 \right] \Big|_{z=L_{hi}} \end{aligned} \quad \dots (13. b \sim e)$$

$(4 + mc) \leq i \leq (3 + mc + my)$:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= L_{si} \cdot (g)_{,N} \Big|_{z=L_{hi}} & a_{2i} &= L_{si} \cdot \left(1 - \frac{L_{hi}}{L} \right) (g)_{,M} \Big|_{z=L_{hi}} \\ a_{3i} &= L_{si} \cdot \left(\frac{L_{hi}}{L} \right) (g)_{,M} \Big|_{z=L_{hi}} & a_{ii} &= L_{si} \cdot \left[y H_m(g)_{,M}^2 + y H_n(g)_{,N}^2 \right] \Big|_{z=L_{hi}} \end{aligned} \quad \dots (13. f \sim i)$$

ここに、 $()_{,M} = \partial () / \partial M$, $()_{,N} = \partial () / \partial N$ の記号を用いている。

更に、

$$[\hat{A}_{sd}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -1 \\ [0] \end{bmatrix} \quad \dots (14)$$

$$\{ \Delta \hat{B}_s \} = \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \int_0^L [H_s]^T [C] \{ \Delta \bar{S}_{(p)} \} dz \right\} \\ & L_{si} \left\{ \left\{ \Delta \bar{M}_{(p)}, \Delta \bar{N}_{(p)} \right\} \{ F_n \} \right\} \Big|_{z=L_{hi}} \\ & \vdots \\ & L_{si} \left\{ \left\{ \Delta \bar{M}_{(p)}, \Delta \bar{N}_{(p)} \right\} \{ F_n \} \right\} \Big|_{z=L_{hmc}} \\ & L_{si} \left\{ \left\{ \Delta \bar{M}_{(p)}, \Delta \bar{N}_{(p)} \right\} \{ G_n \} \right\} \Big|_{z=L_{hi}} \\ & \vdots \\ & L_{si} \left\{ \left\{ \Delta \bar{M}_{(p)}, \Delta \bar{N}_{(p)} \right\} \{ G_n \} \right\} \Big|_{z=L_{hmy}} \end{aligned} \right\} \quad \dots (15)$$

$$\{ \Delta \bar{B}_d \} = \left\{ -\Delta \bar{N}_{(p)} \Big|_1, -\Delta \bar{Q}_{(p)} \Big|_1, \Delta \bar{M}_{(p)} \Big|_1, \Delta \bar{N}_{(p)} \Big|_2, \Delta \bar{Q}_{(p)} \Big|_2, -\Delta \bar{M}_{(p)} \Big|_2 \right\}^T \quad \dots (16)$$

$$[H_s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - z/L & z/L \\ 0 & -1/L & 1/L \end{bmatrix} \quad \dots (17)$$

$$\{ \Delta \bar{S}_{(p)} \} = \left\{ \Delta \bar{N}_{(p)}, \Delta \bar{M}_{(p)}, \Delta \bar{Q}_{(p)} \right\}^T \quad \dots (18)$$

であり、 mc , my は、それぞれ、ひび割れ領域及び降伏領域に属するセグメント数、 $[C]$ は、3行×3列の弾性断面柔性マトリックス、 $[0]$ は、 $(mc + my)$ 行×6列のゼロマトリックスである。

(11) 式の第1変分を取ると

$$\delta \Delta \Pi^m = \{ \delta \Delta \bar{S}_m \}^T \{ -[\bar{A}_{ss}] \{ \Delta \bar{S}_m \} - \{ \Delta \bar{B}_s \} + [\bar{A}_{sd}] \{ \Delta d_m \} \} + \{ \delta \Delta d_m \}^T \{ [\bar{A}_{sd}]^T \{ \Delta \bar{S}_m \} + \{ \Delta \bar{B}_d \} \} \quad \dots (19)$$

$\{ \Delta \bar{S}_m \}$ は、各要素で独立であるから、その停留条件として、次式を得る。

$$\{ \Delta \bar{S}_m \} = [\bar{A}_{ss}]^{-1} [\bar{A}_{sd}] \{ \Delta d_m \} - [\bar{A}_{ss}]^{-1} \{ \Delta \bar{B}_s \} \quad \dots (20)$$

(20) 式を、再び、(19) 式に代入、整理すると、次式のような要素両端の変位増分ベクトルのみを未知量とする、部材要素剛性方程式が得られる。

$$\delta \Delta \Pi^m = \{ \delta \Delta d_m \}^T \{ [K_m] \{ \Delta d_m \} - \{ \Delta F_m \} \} \quad \dots (21)$$

ここに、

$$[K_m] = [\hat{A}_{sd}]^T [\bar{A}_{ss}]^{-1} [\hat{A}_{sd}] \quad \dots (22. a, b)$$

$$\{ \Delta F_m \} = [\hat{A}_{sd}]^T [\bar{A}_{ss}]^{-1} \{ \Delta \bar{B}_s \} - \{ \Delta \bar{B}_d \}$$

であり, $[K_m]$ が部材要素の瞬間剛性マトリックス, $\{\Delta F_m\}$ が部材要素中間荷重による増分荷重ベクトルである。

部材要素両端の変位増分ベクトルは, 該当の節点を共有するすべての要素について共通に定義されることを考慮して, (21) 式をすべての部材要素について寄せ集めれば, RC骨組の構造全体としての剛性方程式が得られる。

一方, 剛性方程式より求められる変位増分ベクトルを, 部材要素ごとに, (20) 式に代入すれば, $\{\Delta S_m\}$ が, 又, $\{\Delta S_m\}$ と弾性断面柔性マトリックス: $[C]$ より求められる一般化ひずみ増分を材軸方向に積分すれば変位が定まり⁴⁾, すべての状態量が求められる。

4. 数値解析例

本節では, 前節までに誘導したRC平面はり柱部材要素モデルの精度, 有効性等を検証するため, いくつかの数値解析を行った結果について報告する。尚, 本節の4.2項及び4.3項に示す弾塑性崩壊解析では, 2節に示した2つの载荷曲線 f 及び g は, その大きさ及び形状は変わらず, Zieglerの移動硬化則に従い移動するものとし, 又, その形状は, 共に, 曲げモーメントのみを考慮した, 次式としている¹¹⁾。

$$f(M) = |M / M_c|, \quad g(M) = |M / M_y| \quad \dots (23. a, b)$$

図6 両端に曲げを受ける弾性はり

図7 部分剛域を有するはりの変形状

4.1 部分剛域を有するはりの解析

RCはり・柱部材の中間部に腰壁や袖壁が存在する場合, その区間の剛性は急激に増大する。本報告で提示しているモデルでは, 部材要素内部に, このような部分的に剛な領域を含んだような場合にも, そうした領域に特別な操作を施す必要はなく, 他の領域と全く同様に扱える。又, もし, 必要であれば, 剛域内に塑性ヒンジを挿入することも容易に可能である。本節では, まず, このような変断面部材の数値解析例として, 図6及び図7に示すような, 部分剛域を有する弾性単純ばりの純曲げ解析を行った。用いた要素数は1, 全自由度数は2である。又, セグメント分割数: nz は41とした。解析パラメータは部分剛域¹²⁾の位置と長さであり, 図7のCASE1~CASE4の4つのケースを設定した。解析より得られた変位分布をデフォルメしたものを, 最大たわみの理論値と共に, 図7に示す。解析精度の誤差は, すべてのケースについて, 1%以下であり¹³⁾, 各々のケースの特徴ある変位分布を精度よく再現していることがわかる。

4.2 山形ラーメンの弾塑性崩壊解析

次に, 文献19) で取り扱われている, 図8に示すような, 一定鉛直荷重下で各層に横方向漸増荷重を受ける3層山形ラーメンの弾塑性崩壊解析を行った。この山形ラーメンは, 3階屋根中間部に塑性ヒンジが生じて崩壊状態に至ることが知られている。解析諸元は, 基本的には, 文献19) に示されたものを用いたが, 変形解析用諸元として, 曲げモーメント-曲率関係を, 図9のように仮定し, 各部材の断面定数は, 図8に示すように設定した。用いた要素数は10,

図8 RC 山形ラーメン¹⁹⁾

図9 曲げモーメント-曲率関係

構造全体としての全自由度数は21である。又、塑性変形を評価する単位であるセグメントは、断面形状が与えられていないので、柱については、11分割、一方、はりについては、21分割とした。横方向荷重の大きさ：Pと3階柱頭部の横方向変位： δ との間の関係を、ひび割れによる剛性低下を無視し、曲げモーメント-曲率関係を、図9の細実線のように設定した場合の結果及び文献19)に与えられている崩壊荷重と共に、図10に示す。又、図11及び図12には、新たな降伏が生じた各変形レベルにおける曲げモーメント分布及び山形ラーメンの変形性状を示す。尚、図11の図中の○、◎は、それぞれ、ひび割れ領域及び降伏領域に達したセグメントの意味である。又、同図中の数字は、降伏領域に達したセグメントについて、その発生順序を表したものであり、同じ数値を付した図10及び図12の各変形段階に対応する。

図10 山形ラーメンの荷重-変形関係

○ひび割れ状態, ◎降伏状態, 数値は降伏の発生順序

図11 山形ラーメンの曲げモーメント分布

図12 山形ラーメンの変形性状

これ等の結果より、i) 本解析解は、崩壊荷重、崩壊メカニズム共に、文献19)に示されている結果と良好に一致すること、又、ii) 本解析手法によれば、これまで非常に困難であった、ひび割れ領域や降伏領域の進展等に関する情報も十分得られること、更には、iii) 損傷域の拡大に伴って生じる剛性低下や、内力分布の変動等も的確に評価されうること、等のことがわかる。

4.3 プレストレストコンクリート (PS) 造ラーメンの弾塑性崩壊解析

本節に示す最後の解析例題は、文献20)の付2に示されている架構の一部を取り出した、図13に示すようなPS部分架構である。この解析モデルは、変断面強度部材についての例題として選定したものであり、変断面強度部材であるPSはりに注目するために、以下のような仮定を導入した。即ち、PS柱は無限強度を有する弾性柱とし、施工等による不静定応力等は考慮しない。又、柱・はり接合部は剛域として扱う。解析諸元は文献19)と同様であり、PSはりの曲げモーメント-曲率関係は、図9の3折れ線型とした。又、変断面特性として、このはりには、上端引張、下端引張のそれぞれの場合について、図14に示すような放物線状の降伏モーメント値を有するものとした。解析に用いた要素数は、柱：2要素×2、はり：1要素

図13 プレストレストコンクリート造骨組の部分架構

図14 PS部分架構のはりの降伏曲げモーメント分布

図15 PS部分架構の荷重-変形関係

○ひび割れ状態 ◎降伏状態

図16 PS部分架構のはりの曲げモーメント分布

素の計5要素であり、又、はりのセグメント分割数：nzは、文献20)等を参考に、塑性ヒンジ長さを次式により算定することとし、それに見合う24とした。

$$l_{eq} = \left(0.5 + 0.03 \frac{a}{D} \right) D \quad \dots (24)$$

ここに、aは、せん断スパン、Dは、はりせいである。

解析パラメータは、一定鉛直等分布荷重： $w = \alpha$ (Mo/L²)であり、積載荷重の相違が応答挙動に及ぼす影響を調べるため、 $\alpha = 0.0, 8.0, 12.0$ の3つのケースについて解析を行った。尚、極限解析により求めた各ケースの崩壊荷重は、それぞれ、0.81903 (Mo/Ho)、0.81932 (Mo/Ho) 及び0.61791 (Mo/Ho)である。

代表的結果を、図15～図17示す。図15は、荷重：Pと柱頭部の横方向変位との間の関係を示したものであり、又、図16及び図17には、それぞれ、新たなひび割れあるいは降伏が生じた各変形レベルにおけるはりの曲げモーメント分布と部分架構の変形性状を示す。さらに、図16には、最終状態におけるひび割れ及び降伏領域の進展状況も、併せて示している。

この部分架構は、積載荷重の値の相違により、かなり異なった変形性状を示すが、本解析解は、いずれのケースについても、崩壊荷重、崩壊モード共に、極限解析と良好に一致する。又、文献21)等で指摘されている、鉛直荷重により生じるはりのたわみ性状も十分再現されており、この種の変断面強度部材についても、非常に少ない要素数、自由度で、その弾塑性崩壊挙動を的確に追跡しうることがわかる。

5. まとめ

本報告では、近藤が文献17)等で提案した骨組構造離散化解析手法をRC骨組に適用し、ハイブリッド型応力法によるRC部材要素モデルの誘導を行った。又、いくつかの数値解析により、誘導した要素モデルの精度、有効性の検証を行った。本報告で提示したRC部材要素モデルの特長は、以下のように要約される。

1) 従来のモデルでは非常に困難であった、任意の部材中間分布荷重の影響を、精度よく、又、統一的に評価することが可能であ

図17 PS部分架構の変形性状

る。

- 2) 部材要素内部における独立な状態量を、平衡方程式からその分布形状が一義的に定まる合応力としているので、部材軸に沿ったはり柱断面の剛性分布がどのような状態となっても、何等の矛盾、問題も生じない。
- 3) 一方、損傷の進行と共にその分布性状が時々刻々変化していく変位については、合応力と断面柔性の積として与えられる一般化ひずみを、材軸方向について積分することにより求めるという手法を用いているため、その変化を的確に追跡することができる。
- 4) 各部材要素を、材軸方向に微小なセグメントに分割し、はり柱の断面剛性を、各セグメントごとに評価するという剛性評価法を用いているので、部材要素内の任意の位置にある剛域や塑性ヒンジを含む変断面部材の剛性や応答に及ぼすその影響を的確に評価することができる。
- 5) 断面特性の定式化の方法として、M-N応力空間内に載荷曲線を想定するという方法を用いているので、ひび割れ曲線：f及び降伏曲線：gを適切に設定することにより、軸力と曲げモーメントとの間の相互作用を考慮した断面特性を設定することができる。
- 6) はり柱理論を基礎とした標準的有限要素離散化手法が用いられているので、立体部材要素への拡張、一般化が、比較的容易である。

尚、本報告で提示したハイブリッド型応力法RC部材要素モデルは、前述のように、はり柱断面の平面保持を仮定したTimoshenkoはり柱理論を基礎に展開されたものであり、従って、平面保持の仮定の適用が困難な、例えば、鉄筋とコンクリートの間の付着すべりや、それに伴う断面のゆがみ、さらには、部材軸線とは直交しない斜めひび割れの評価等については、今後の課題である^(註4)。

謝 辞

本研究は、日本計算工学会研究分科会(研究項目3:ハイブリッド型応力法1次元要素による固体力学諸問題解析プログラムの開発主査:近藤一夫)で行われたものであり、河内 武(清水建設

僚), 光成高志(戸田建設僚), 村田邦和(磯石井鐵工所)の各委員には有益なるご助言をいただいた。ここに記して, 謝意を表します。

参考文献

- 1) 稲田祐二, 川端康洋, 角徹三: ハイブリッド型応力法による鉄筋コンクリート骨組の解析(その1: 平面梁・柱部材要素の解析モデルの誘導), 日本建築学会中国・九州支部合同研究報告(構造系), pp.241~244, 1993.3
- 2) 稲田祐二, 川端康洋, 角徹三: ハイブリッド型応力法による鉄筋コンクリート骨組の解析(その2: 山型ラーメンの解析例), 日本建築学会大会学術講演梗概集C, pp.385~386, 1993.9
- 3) 稲田祐二, 川端康洋, 近藤一夫, 角徹三: ハイブリッド型応力法による鉄筋コンクリート骨組の解析(その3: 剪断変形の影響について), 日本建築学会中国支部研究報告, pp.41~44, 1994.3
- 4) 稲田祐二, 川端康洋, 近藤一夫, 角徹三: ハイブリッド型応力法による鉄筋コンクリート骨組の解析(その4: 要素内変位場の算定法), 日本建築学会中国支部研究報告, pp.169~172, 1995.3
- 5) Giberson, M.F.: Two Nonlinear Beams with Definitions of Ductility, Proc. ASCE, Vol.95, No.ST2, pp.137~157, 1969.2
- 6) Aoyama, H. and Sugano, T.: A Generalized Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Structures Based on the Tests of Members, Recent Researches of Structural Mechanics-Contributions in Honor of the 60th Birthday of Prof. Y. Tsuboi, Uno Shoten, Tokyo, pp.15~30, 1968.
- 7) Takizawa, H.: Notes on Some Basic Problems in Inelastic Analysis of Planar R/C Structures (Part1), 日本建築学会論文報告集, No.240, pp.51~62, 1976.2
- 8) 表佑太郎, 武田寿一: 鉄筋コンクリート造煙突の弾塑性応答に関する研究(その1), 日本建築学会論文報告集, No.215, pp.21~29, 1974.1
- 9) 荒川利治, 田村正, 洪忠意: 柔域モデルによる柱及び壁柱平面架構の耐力と変形(その1), 日本建築学会構造系論文報告集, No.420, pp.19~30, 1991.2
- 10) Kaba, S. A. and Mahin, S. A.: Refined Modelling of Reinforced Concrete Columns for Seismic Analysis, EERC Report, No.84/03, University of California, 1984.4
- 11) Takizawa, H. and Aoyama, H.: Biaxial Effects in Modelling Earthquake Response of R/C Structure, Int. J. Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol.4, No.5, pp.523~552, 1976
- 12) 福澤栄治, 磯崎浩, 高橋元美: 柱の変動軸力を考慮したRC造骨組の弾塑性解析(その1), 日本建築学会構造系論文報告集, No.372, pp.31~43, 1987.2
- 13) 芳村学, 青山博之, 川村満: 2方向外乱を受ける鉄筋コンクリート構造物の解析(その1), 日本建築学会論文報告集, No.298, pp.31~41, 1980.12
- 14) 李康寧, 小谷俊介, 青山博之: 軸力-曲げモーメントの相互作用を考慮したRC造立体骨組の弾塑性地震応答, コンクリート工学年次論文報告集, pp.125~130, 1990.

- 15) 市之瀬敏勝, 滝口克己: 鉄筋コンクリート柱の部材モデルに関する比較研究, 日本建築学会構造系論文報告集, No.401, pp.64~76, 1989.7
- 16) 小谷俊介: RC造建築物の地震応答解析の現状と問題点, コンクリート工学, Vol.31, No.8, pp.15~23, 1993.8
- 17) 近藤一夫: 鋼構造骨組の塑性崩壊解析, 培風館, 1991.7
- 18) 例えば, 色部誠, 河角誠, 安達洋監訳: コンクリート構造物の塑性解析, 丸善, pp.10~12, 361~364, 1985.7 (Chen, W. F.: Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill, 1982)
- 19) 日本建築学会: 建築耐震設計における保有耐力と変形性能, pp.331~333, pp.537~543, 1990.10
- 20) 日本建築学会: プレストレストコンクリート設計施工標準・同解説, pp.317~398, 1987
- 21) Mohit, S. M. P. and Shimazu, T.: The Behaviour of Beams in Reinforced Concrete Frames under the Combined Action of Vertical and Horizontal Loadings, 日本建築学会構造系論文報告集, No.372, pp.72~85, 1987.2
- 22) 近藤一夫, 高谷智彦, 花井正実: 高次のせん断変形を考慮したハイブリッド型応力法はり柱要素モデルに関する研究(その1) 平面はり柱要素の一般的定式化, 日本建築学会構造系論文集, No.488, pp.57~66, 1996.10

注1) 4.2項及び4.3項に示した数値解析例では, 提示したRCはり柱要素モデルの精度の検証を主な目的としているため, 載荷曲線 g , f の形状を, 崩壊荷重, 崩壊機構等の理論解が比較的容易に求められる(23.a, b)式としているが, g , f を M と N の関数とした場合の解析結果については, 例えば, 文献2)等)に示されている。

注2) ここで行った数値解析では, 剛域部分のヤング係数及び断面2次モーメントを, 図6に示すように, 可撓域部分の 10^6 倍としている。尚, 必要ならば, 剛性無限大の領域を設定することも容易に可能であり, そうした場合にも, 該当区間内でコンプリメンタリーエネルギーが0となるのみであり, 何等の矛盾, 不都合も生じない。

注3) 3.2項で述べたように, 本研究では, 計算の簡略化を計るため, 弾性コンプリメンタリーエネルギーの算定を除いて, 一般化ひずみ, 合応力は, 各セグメント内で一定としており, 一般化ひずみを材軸方向に積分することにより変位を求める際にも, 同様な処理を行っている。4.1節に示した例題における誤差は, こうした計算処理に起因するものである。

注4) 断面のゆがみやそれに伴って生じる高次のせん断変形を考慮したはり柱理論を基礎としたハイブリッド型応力法はり柱要素モデルについては, 例えば, 文献22)等に展開されている。

(1997年9月1日原稿受理, 1998年1月13日採用決定)