完全適合型高次平面シェル要素を用いた幾何学的非線形解析法

GEOMETRICALLY NON-LINEAR ANALYSIS METHOD USING
COMPLETELY COMPATIBLE PLANER SHELL ELEMENTS
WITH HIGHER-ORDER POLYNOMIAL FUNCTIONS

上谷 宏二*, 大神 勝城**

Koji UETANI and Katsuki OHGAMI

A new incremental geometrically non-linear analysis method with moving coordinate systems which are continuously moving and rotating during every incremental loading step, is proposed in this paper. This method is adopted for thin-walled structures with planer shells. The geometrical non-linearities treated by the moving coordinate systems and by Von Karman's plate theory, mainly express overall and local buckling deformation, respectively. A rectangular planer shell element on the basis of Von Karman's plate theory, is applied. The efficiency of this method is demonstrated by some example analyses.

Keywords : FEM, geometrically non-linear analysis, moving coordinate system, Von Karman's plate theory, overall buckling, local buckling, rectangular planer shell element

有限要素法, 幾何学的非線形解析, 移動座標系, フォン・カルマンの板理論, 全体座屈, 局部座屈, 長方形平面シェル要素

1. 緒言

著者等は、従来の提案されている板要素よりも少ない自由度で精度良く解析できる完全適合型長方形高次平面シェル要素を既に別報にて提案している¹⁾。ここでは平板で構成される3次元の薄肉構造骨組を対象にして、この高次平面シェル要素の適用と、増分解析の増分ステップ中でも移動する移動座標系の導入に特徴を持つ幾何学的非線形解析法を提案する。

幾何学的非線形性を考慮するために、通常の汎用有限要素法プログラムやこれまでの論文などで最もよく用いられているのは、Greenの歪テンソルに代表される非線形歪テンソルと、増分ステップ中は固定されているUpdated-Lagrange流の移動座標系を組み合わせたものである^{2,7)}。この方法では、幾何学的非線形性を表すために、変形後の要素形状に対して面外および面内変位に関する歪の非線形項を全て考慮する必要がある。高次要素に適用する場合には、幾何剛性マトリックスの定式化において非線形項の数が多くなり、計算時間が増大する。一方、低次要素に適用される場合であっても、構造物の不安定挙動や崩壊挙動を追跡する場合には、局部座屈が生じる部分で細かい要素分割が必要となり、計算時間が過大になる。

提案する解析法で使用する要素は、はじめに述べた8節点完全適合型高次平面シェル要素である¹⁾。任意の要素境界において撓み

関数はC1連続、面内変位関数はC0連続に設定されている。また、要素境界の有限回転角は、面内あるいは面外を問わず、隅節点を起点にして要素境界線上に接して埋め込まれた要素境界接線ベクトルの回転角成分により厳密に表現される²⁾。さらに、要素の歪と変位の関係式は、撓み勾配の非線形項のみを取り入れたVon Karmanの大撓み理論に基づいて定式化されている。したがって、通常の歪テンソルに比べて少ない数の歪の非線形項で、要素の撓みに関する幾何学的非線形性が表される。この定式化の有効性は、周辺支持された矩形板の曲げ座屈荷重を十分精度よく推定できることによって既の実証されている¹⁾。つまり、板の局部座屈は主として、Von Karmanの歪の非線形項のみで効率良く表現されることがわかっている。しかし、全ての方向の剛体変位を伴う全体座屈をVon Karmanの歪の非線形項のみで表現することはできない。

これまでの幾何学的非線形解析法の研究において、全体座屈モードに関係する幾何学的非線形成分が強く現れる挙動の解析に対して、増分解析の各増分ステップの途中でも常に要素に付随して連続的に移動する移動座標系を用いることが、極めて有効な方法であることが知られている^{8,9)}。その理由は、移動座標系を用いれば全体の変形から剛体変位を分離することで、剛体変位が支配的である全体座屈の幾何学的非線形性を効率良く表すことができるからである。

* 京都大学工学部建築学教室 教授・工博

** 日鐵プラント設計株式会社 工博

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.
Nittetsu Plant Designing Corporation, Dr. Eng.

例えば、梁に関しては、移動座標系と撓み勾配の幾何学的非線形項を組み合わせた事例の報告がある¹⁰⁾。また、石田等は骨組解析において、要素自身の変形を微小であるとして線形の一般化歪～変位関係式を適用した場合でも、移動座標系と摂動法を組み合わせることで精度の高い計算結果を得ている^{11,12)}。さらに、松井等は移動座標系による幾何学的非線形性のみを考慮し、曲面要素で構成されたシェルの座屈問題において、その有効性を確認している¹³⁾。

以上の研究成果に鑑みて、今回の解析法では全体座屈を表現するために移動座標系を導入する。したがって、提案する解析法における幾何剛性マトリックスは、Von Karmanの歪の非線形項成分と移動座標系による非線形項成分から構成され、それらを組み合わせることで簡潔に、かつ厳密に定式化される。また、移動座標系の下では、要素境界接線ベクトルの回転角成分と、節点の3軸方向並進変位成分は、剛体変位を取り除いた正味の微小な節点変位成分として設定される。一方、全体座標系の下では、要素の大きな回転を伴う場合の構造物の全体変位は、要素境界接線ベクトルの有限回転と節点の並進移動によって表現される。このように要素境界接線ベクトルの導入に特徴を持つ完全適合型高次平面シェル要素に対して、移動座標系と要素の撓み勾配の歪の非線形項による幾何学的非線形性を同時に合わせ持つ解析法をここで提案する。

本論文では、全体座標系と局所移動座標系（今後は局所座標系と記す）における節点変位成分間の変換則が具体的にかつ厳密に定式化される。そのうえで、移動座標系を考慮した接線剛性方程式が導かれる。本解析法の有効性は、基本的な例題を解いて実証される。

2. 移動座標系の導入

ここでは、構造物の変形に付随して移動する局所座標系の設定方法や、具体的な座標変換則の定式化について説明する。局所座標系と全体座標系における節点変位成分は、この座標変換則を介して互いに関係づけられる。なお、提案する解析法では、以下の3種の座標系が使用される。（図1参照）

図1： 変形後の座標系

(1) 全体座標系 (O-XYZ)

この座標系は、骨組の変形を記述するための基準固定座標系である。要素を形成する節点の座標値や拘束条件等は、この座標系で定義される。

(2) 局所座標系 ($O^E-x y z$)

この座標系は、骨組を構成する部分構造に対して設定される。したがって、局所座標系は複数存在してよい。この座標系は増分載荷中にも要素に付随して移動する移動座標系である。局所座標系節点変位成分は、剛体変位成分が取り除かれた正味の変形を表す。

(3) 要素座標系 ($O^E-\xi \eta \zeta$)

この座標系は、板要素毎に設けられる座標系であり、要素の応力や歪計算に用いられる。局所座標系と要素座標系の位置関係は、骨組の変形前後で一定である。したがって、要素座標系変位成分は局所座標系変位成分と同様に正味の変形を表す。

図2： 局所座標系の定義の例

2-1. 局所座標系の設定方法

ここでは、薄肉構造骨組の一例として図2に示すような部材を取り出して、局所座標系を設定する方法が具体的に説明される。局所座標系は、部材の前後端の断面の上下辺の中点である4個の代表節点I, J, K, Lを基準に決定される。まず、点I, Jの中点Mと点K, Lの中点Nを結ぶベクトルMNをZ軸にして、点Mを局所座標系の原点にする。さらに、Z軸とベクトルMIを含む平面内で、点Iのある側にy軸が定義される。最後にx軸は、他の2軸を参照して右手ねじ系の規則に従って自動的に決定される。

図2の局所座標系の基底ベクトルは、以下のように求められる。まず、図に示すベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ は、全体座標系基底ベクトル $\mathbf{i}_0^G$ を用いて以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MI} &= \mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_0 + a_2 \mathbf{j}_0 + a_3 \mathbf{k}_0 \\ \overrightarrow{MN} &= \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_0 + b_2 \mathbf{j}_0 + b_3 \mathbf{k}_0\end{aligned}\quad (1)$$

$$\text{ただし、}\{\mathbf{i}_0^G\} = \{\mathbf{i}_0 \ \mathbf{j}_0 \ \mathbf{k}_0\}^T$$

この2つのベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ のなす角度を θ と表わすと、局所座標系基底ベクトル $\mathbf{i}_1^L$ は、以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_1 &= l(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \mathbf{j}_1 = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \quad \mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \\ \text{ここで、}\{\mathbf{i}_1^L\} &= \{\mathbf{i}_1 \ \mathbf{j}_1 \ \mathbf{k}_1\}^T\end{aligned}\quad (2)$$

$$l = \frac{1}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta} \quad m = \frac{1}{|\mathbf{a}| \sin \theta} \quad n = -\frac{1}{|\mathbf{b}| \tan \theta}$$

(2) 式より、基底ベクトル $\mathbf{j}_1$ および $\mathbf{k}_1$ は、ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす平面内にあり、基底ベクトル $\mathbf{i}_1$ はその平面に直交するベクトルである。

(2) 式に (1) 式を代入して、2つの座標系の基底ベクトル間の関係は以下のように求められる。

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(a_2 b_3 - a_3 b_2) & l(a_3 b_1 - a_1 b_3) & l(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ m a_1 + n b_1 & m a_2 + n b_2 & m a_3 + n b_3 \\ \frac{b_1}{|b|} & \frac{b_2}{|b|} & \frac{b_3}{|b|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ j_0 \\ k_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

一方、ベクトル a と b の各成分は、代表節点の座標値 X_q^r を用いて以下のように表される。

$$a_m = A_{mq} X_q^r \quad b_m = B_{mq} X_q^r \quad (m=1,3 \quad q=1,12) \quad (4)$$

ここで、

$$[A_{mq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B_{mq}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

同様に、局所座標系の原点の並進変位速度成分 $\dot{U}_{0i}$ は、代表節点の変位速度成分 $\dot{U}_q^r$ を用いて以下のように表せる。

$$\dot{U}_{0i} = C_{iq} \dot{U}_q^r \quad (i=1,3 \quad q=1,12) \quad (5)$$

$$\text{ここで、} [C_{iq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2-2. 座標変換行列の誘導

(1) 基底ベクトルと要素境界接線ベクトル間の関係式

局所座標系の基底ベクトル i^L 、全体座標系の基底ベクトル i^G と接線ベクトル e の3者は、図3に示すように次式で関係づけられる。

$$i^L = \Omega_{ij} i^G \quad e = R_j^L i^L \quad e = R_j^G i^G \quad (6)$$

ただし、 Ω_{ij} は、全体座標系軸回りの回転角成分 $\bar{\alpha}_j$ 、他の係数は接線ベクトルの回転角 Θ_i, θ_i を用いて次のように表わされる。

$$\{\Omega_{ij}\} = \begin{bmatrix} \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\beta} \sin \bar{\gamma} + \cos \bar{\beta} \cos \bar{\gamma} & \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\gamma} & \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} \sin \bar{\gamma} - \sin \bar{\beta} \cos \bar{\gamma} \\ \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\beta} \cos \bar{\gamma} - \cos \bar{\beta} \sin \bar{\gamma} & \cos \bar{\alpha} \cos \bar{\gamma} & \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} \cos \bar{\gamma} + \sin \bar{\beta} \sin \bar{\gamma} \\ \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\beta} & -\sin \bar{\alpha} & \cos \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\{R_j^G\} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Phi & \sin \Theta \cos \Phi & \sin \Phi \end{bmatrix}$$

$$\{R_j^L\} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $\bar{\alpha}_j$ の3成分 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ は、全体座標系を3軸回りに回転させ

て、局所座標系に完全に一致させる場合に必要な有限回転角である。すなわち、全体座標系は、まず第3軸回りに $\bar{\gamma}$ 回転し、次に初期の全体座標系の第1軸回りに $\bar{\alpha}$ 回転した後、初期の全体座標系の第2軸回りに $\bar{\beta}$ 回転することで、局所座標系に重ねることができる。ところで、この種の座標変換の記述には、他にオイラー角を用いる方法がある。それに対して、著者らは全体座標系軸回りの回転角成分との対応を見るために、前述の $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ を使用してオイラー角を使用した場合と異なる記述の座標変換を構築している。

一方、4隅の節点位置で要素境界に接して埋め込まれた要素境界接線ベクトルは、図4に示すように、まず第1軸を起点にして第3軸回りに有限回転 (Θ or θ) し、さらにその位置から第3軸に向かって有限回転 (Φ or φ) することで、3次元空間を回転移動する。

図3：座標系の基底ベクトルと境界接線ベクトルの関係

図4：要素境界接線ベクトルの回転角成分

(2) 局所座標系基底ベクトル i^L と a, b ベクトル間の関係両者は以下のように直交条件を満足する。

$$\begin{aligned} i \cdot a &= \Omega_{1m} a_m = 0 & i \cdot b &= \Omega_{1m} b_m = 0 \\ j \cdot b &= \Omega_{2m} b_m = 0 & (m=1,3) \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式を速度式で表わすと以下になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{1m}}{\partial \alpha_j} a_m \dot{\alpha}_j + \Omega_{1m} \dot{a}_m &= 0 & \frac{\partial \Omega_{1m}}{\partial \alpha_j} b_m \dot{\alpha}_j + \Omega_{1m} \dot{b}_m &= 0 \\ \frac{\partial \Omega_{2m}}{\partial \alpha_j} b_m \dot{\alpha}_j + \Omega_{2m} \dot{b}_m &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式に (4) 式を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_{1m}}{\partial \bar{\alpha}_j} A_{mq} X_q^r \dot{\bar{\alpha}}_j + \Omega_{1m} A_{mq} \dot{U}_q^r &= 0 \\ \frac{\partial \Omega_{1m}}{\partial \bar{\alpha}_j} B_{mq} X_q^r \dot{\bar{\alpha}}_j + \Omega_{1m} B_{mq} \dot{U}_q^r &= 0 \\ \frac{\partial \Omega_{2m}}{\partial \bar{\alpha}_j} B_{mq} X_q^r \dot{\bar{\alpha}}_j + \Omega_{2m} B_{mq} \dot{U}_q^r &= 0\end{aligned}\quad (j=1,3 \quad m=1,3 \quad q=1,12) \quad (10)$$

(10) 式は、整理して以下のように表わしておく。

$$G_{ij} \dot{\bar{\alpha}}_j + H_{iq} \dot{U}_q^r = 0 \quad (i=1,3 \quad j=1,3 \quad q=1,12) \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\text{ただし、} \quad G_{1j} &= \frac{\partial \Omega_{1m}}{\partial \bar{\alpha}_j} A_{mq} X_q^r \quad G_{2j} = \frac{\partial \Omega_{1m}}{\partial \bar{\alpha}_j} B_{mq} X_q^r \\ G_{3j} &= \frac{\partial \Omega_{2m}}{\partial \bar{\alpha}_j} B_{mq} X_q^r \quad H_{1q} = \Omega_{1m} A_{mq} \\ H_{2q} &= \Omega_{1m} B_{mq} \quad H_{3q} = \Omega_{2m} B_{mq}\end{aligned}$$

したがって、(11) 式から、次の関係式を得る。

$$\dot{\bar{\alpha}}_i = -G_{ji}^{-1} H_{iq} \dot{U}_q^r \quad (12)$$

(3) 節点の並進変位成分に関する変換則

図 5 に任意の点 A を局所座標系と全体座標系の位置ベクトルを用いて示す。ベクトル和を考えると次の式が成り立つ。

$$\bar{X}_i^G X_i = \bar{X}_i^G X_{oi} + \bar{X}_j^L X_j \quad (13)$$

(6) 式の第 1 式を代入して整理すると以下になる。

$$X_i = X_{oi} + \Omega_{ji} \cdot X_j \quad (14)$$

また、(14) 式を時間微分すると次の変位速度式が成り立つ。

$$\dot{U}_i = \dot{U}_{oi} + \frac{\partial \Omega_{mi}}{\partial \bar{\alpha}_l} X_m \dot{\bar{\alpha}}_l + \Omega_{ji} \dot{U}_j \quad (15)$$

右辺の第 1 項に (5) 式、第 2 項に (12) 式を代入して整理すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned}\dot{U}_j &= \Omega_{ij}^{-1} \dot{U}_i - \Omega_{ij}^{-1} C_{iq} \dot{U}_q^r + \Omega_{ij}^{-1} \frac{\partial \Omega_{mi}}{\partial \bar{\alpha}_l} X_m G_{ln}^{-1} H_{nq} \dot{U}_q^r \\ &= \Omega_{ij}^{-1} \dot{U}_i + \Omega_{ij}^{-1} \left(\frac{\partial \Omega_{mi}}{\partial \bar{\alpha}_l} X_m G_{ln}^{-1} H_{nq} - C_{iq} \right) \dot{U}_q^r \\ (i=1,3 \quad j=1,3 \quad k=1,3 \quad l=1,3 \quad m=1,3 \quad n=1,3 \quad q=1,12) \quad (16)\end{aligned}$$

図 5: 全体座標系と局所座標系の位置ベクトル

ただし、 $\delta_{kj} = \Omega_{kj}^{-1} \Omega_{ji}$ (δ_{kj} : クロネッカーのデルタ関数) であると定義する。

(4) 要素境界接線ベクトルの回転角成分に関する変換則

要素境界の回転は、接線ベクトルの 2 個の回転角成分を用いて表現される。(6) 式より、次の関係式が得られる。

$$\mathcal{E} = R_k^L \bar{U}_k^L = R_k^L \Omega_{ki} \bar{U}_i^G = R_i^G \bar{U}_i^G \quad (17)$$

したがって、次式が導かれる。

$$R_i^G = \Omega_{ki} R_k^L \quad (18)$$

(18) 式の右辺を左辺に移項して、速度表示することで(19)式が導かれる。

$$D_{iK} \dot{\Theta}_K + E_{iJ} \dot{\theta}_J + F_{iI} \dot{\bar{\alpha}}_I = 0 \quad (i=k=l=1,3 \quad K=J=1,2) \quad (19)$$

$$\text{ただし、} D_{iK} = \frac{\partial R_i^G}{\partial \Theta_K}, \quad E_{iJ} = -\Omega_{ki} \frac{\partial R_k^L}{\partial \theta_J}, \quad F_{iI} = -\frac{\partial \Omega_{ki}}{\partial \bar{\alpha}_I} R_k^L$$

ここで、(19) 式は 3 行の方程式を構成するが、大文字の添字で表した要素境界接線ベクトルの 2 個の回転角成分を求めるために、その中から 2 行を選択する必要がある。そのうえで、左辺の第 3 式に (12) 式を代入して整理すると (20) 式が導かれる。

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_J &= -E_{Jl}^{-1} D_{lK} \dot{\Theta}_K - E_{Jl}^{-1} F_{lI} \dot{\bar{\alpha}}_I \\ &= -E_{Jl}^{-1} D_{lK} \dot{\Theta}_K + E_{Jl}^{-1} F_{lI} G_{ln}^{-1} H_{nq} \dot{U}_q^r \\ (I=1,2 \quad J=1,2 \quad K=1,2 \quad l=1,3 \quad n=1,3 \quad q=1,12) \quad (20)\end{aligned}$$

なお、2 行選択の理由は、<1>要素境界接線ベクトルは図 4 に示すように 2 個の回転角成分で定義されるので 2 行の式で関係づけられること、<2>例えば、接線ベクトルが直交座標系の 3 軸の内、XY, YZ および ZX 平面にある場合は 2 つの基底ベクトルのみで表わされるため、それに対応する 2 行の方程式を選択することになるためである。また、任意の接線ベクトルが 3 つの基底ベクトルを用いて定義される場合でも、それぞれ 2 行の式の組み合わせにおいて、(20) 式の右辺第 1 項の 2x2 の小行列の行列式の値 (Determinant) の絶対値が最大になる場合を採用すればよいと考えられる。

(5) 座標変換行列

(16) 式と (20) 式によって、並進変位 3 成分と回転角 2 成分の局所座標系と全体座標系節点変位成分、および 4 個の代表節点の並進変位 1 2 成分の関係が得られる。この 2 つの式は以下のようにマトリックスの形に表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_j \\ \dot{\theta}_J \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{ij}^{-1} & 0 & \Omega_{ij}^{-1} \left(\frac{\partial \Omega_{mi}}{\partial \bar{\alpha}_l} X_m G_{ln}^{-1} H_{nq} - C_{iq} \right) \\ 0 & -E_{Jl}^{-1} D_{lK} & E_{Jl}^{-1} F_{lI} G_{ln}^{-1} H_{nq} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{\Theta}_K \\ \dot{U}_q^r \end{pmatrix} \quad (21)$$

(21) 式を全ての節点に対して導けば、全体座標系変位速度 $\dot{\Delta}_n^G$ と局所座標系変位速度 $\dot{\Delta}_m^L$ は、移動座標変換マトリックス T_{mn} を用いて以下のように関係づけられる。

$$\dot{\Delta}_m^L = T_{mn} \cdot \dot{\Delta}_n^G \quad (m, n = \text{total degrees of freedom}) \quad (22)$$

3. 座標変換則を考慮した接線剛性方程式

ここでは、板要素に関する接線剛性方程式を、(23)式に示す全体座標系における仮想仕事式を用いて導出する。

$$\int_V \sigma_k \delta \epsilon_k dv = P_p \delta \Delta_p^G \quad (23)$$

左辺の仮想歪は、(24)式を用いて(25)式で表される。ただし、 $\dot{\alpha}_i$ は一般化変位速度である。

$$\dot{\epsilon}_k = B_{ki} \dot{\alpha}_i \quad \dot{\alpha}_i = L_{im} \dot{\Delta}_m^L = L_{im} T_{mp} \dot{\Delta}_p^G \quad (24)$$

$$\delta \epsilon_k = B_{ki} \delta \alpha_i = B_{ki} L_{im} T_{mp} \delta \Delta_p^G \quad (25)$$

(23)式に(25)式を代入して、全体座標系における力の釣り合い式が次式で表される。

$$L_{im} T_{mp} \int_V \sigma_k B_{ki} dv = P_p \quad (26)$$

(26)式の両辺を経路パラメータ t で微分すると、以下の速度関係式が得られる。

$$L_{im} \dot{T}_{mp} \int_V \sigma_k B_{ki} dv + L_{im} T_{mp} \int_V (\dot{\sigma}_k B_{ki} + \sigma_k \dot{B}_{ki}) dv = \dot{P}_p \quad (27)$$

T_{mp} は局所座標系節点変位成分 Δ_m^L と全体座標系の節点変位成分 Δ_n^G 、および回転角 α_i の関数であり、かつ3者は従属関係にあるので(27)式の左辺の第1項は、(28)式を用いて(29)式のように変形される。ただし、 p_m は局所座標系の等価節点力を表す。

$$\dot{T}_{mp} = \left[\frac{\partial T_{mp}}{\partial \Delta_q^G} + \frac{\partial T_{mp}}{\partial \Delta_n^L} \frac{\partial \Delta_n^L}{\partial \Delta_q^G} + \frac{\partial T_{mp}}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial \Delta_q^G} \right] \dot{\Delta}_q^G = \frac{\partial T_{mp}}{\partial \Delta_q^G} \dot{\Delta}_q^G$$

$$p_m = L_{im} \int_V \sigma_k B_{ki} dv \quad (28)$$

$$L_{im} \dot{T}_{mp} \int_V \sigma_k B_{ki} dv = p_m \frac{\partial T_{mp}}{\partial \Delta_q^G} \dot{\Delta}_q^G \quad (29)$$

一方、(27)式の右辺の第2項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} & L_{im} T_{mp} \int_V (\dot{\sigma}_k B_{ki} + \sigma_k \dot{B}_{ki}) dv \\ &= L_{im} T_{mp} \int_V \left(B_{ki} D_{kl} B_{lj} + \sigma_k \frac{\partial B_{ki}}{\partial \alpha_j} \right) dv \dot{\alpha}_j \\ &= L_{im} T_{mp} k_{ij}^{\alpha} \dot{\alpha}_j = L_{im} T_{mp} k_{ij}^{\alpha} L_{jn} \dot{\Delta}_n^L = T_{mp} k_{mn} T_{nq} \dot{\Delta}_q^G \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、

$$\dot{\sigma}_k = D_{kl} \dot{\epsilon}_l = D_{kl} B_{lj} \dot{\alpha}_j \quad \dot{B}_{ki} = \frac{\partial B_{ki}}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j$$

$$k_{ij}^{\alpha} = \int_V \left(B_{ki} D_{kl} B_{lj} + \sigma_k \frac{\partial B_{ki}}{\partial \alpha_j} \right) dv$$

$$k_{mn} = L_{im} k_{ij}^{\alpha} L_{jn} \quad \dot{\Delta}_n^L = T_{nq} \dot{\Delta}_q^G$$

(29)式と(30)式を(27)式に代入して、全体座標系における接線剛性方程式が以下のように導かれる。

$$K_{pq}^* \dot{\Delta}_q^G = \dot{P}_p \quad \text{ただし、} K_{pq}^* = p_m \frac{\partial T_{mp}}{\partial \Delta_q^G} + T_{mp} k_{mn} T_{nq} \quad (k, l = 1, 3 \quad \text{other index} = 1, 4, 0) \quad (31)$$

(31)式の剛性マトリックスは、第1項に移動座標系による幾何学的非線形成分を含んでいる。また、(30)式の一般化剛性マトリックス k_{ij}^{α} の第2項目の成分は、Von Karmanの大撓み理論に基づく幾何学的非線形成分であり、(31)式の第2項を構成する。したがって、(31)式の剛性マトリックスの中には、これら2種類の幾何学的非線形成分が、個別に含まれているのがわかる。

4. 要素境界接線ベクトルの回転角成分に対応する等価節点力

本解析法では、任意の要素境界における適合条件を過不足無く満足させるために要素境界接線ベクトルを導入している。それぞれの要素境界接線ベクトルの回転移動を表現する2個の回転角成分は、個別の節点変位成分として取り扱われる。また、その回転角成分は、図4で示したように球座標系での有限回転角として表わされる。このことは、任意の節点の回転変位を全体座標系での3軸回りの回転角成分で表現する通常の有限要素法に比べて、節点の回転角成分の数³⁾と回転角の表現方法が異なっている。したがって、節点の回転角成分に対応して球座標系の等価節点モーメント M_j^{θ} と全体座標系の3軸回りの等価節点モーメント M_i の間の関係を明確にしておくことが必要である。ここでは1本の要素境界接線ベクトルを例にとり、両者の関係式が以下の仮想仕事式を用いて導かれる。

$$\text{仮想仕事} : \delta W_{EX} = M_i \delta \hat{\theta}_i = M_j^{\theta} \delta \Theta_j \quad (i=1, 2 \quad j=1, 2) \quad (32)$$

図6には、任意の角度に要素境界接線ベクトルが有限回転した位置から、さらに2つの方法で微小に仮想回転したときの模式図を示す。このとき方法(a)の仮想回転角 $\delta \hat{\theta}_i$ は、有限回転角と同じ方向の仮想回転角 $\delta \Theta_j$ でなく、全体座標系の軸回りの仮想回転角である。一般的には、 $\delta \hat{\theta}_i$ と $\delta \Theta_j$ は一致しないが、(33)式で示すように移動後の2つのベクトルは共に等しいと仮定することにより、両者を関係づけることができる。具体的には、 $\mathcal{Q}$ は(6)の第3式を用いて、微小仮想回転後のベクトルを求めることで(34)式の第2式で表わされる。また、 $\mathcal{Q}$ は以下に説明する手順で幾何学的に決定される。まず、ベクトル $\mathcal{Q}$ の先端の点AをXY平面、YZ平面へ投影してそれぞれ点A1, A2とする。次にベクトル $\mathcal{Q}$ と辺OA1を含む面をZ軸回りに $\delta \hat{\theta}_z$

図6： 仮想回転後の要素境界接線ベクトル

だけ回転後、ベクトル $\mathcal{Q}$ と辺OA2を含む面をX軸回りに $\delta\hat{\Theta}_x$ だけ回転させる。このとき、 $\mathcal{Q}'$ は(34)の第1式で求められる。

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'' \quad (33)$$

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} + \Delta\mathcal{Q}_Z + \Delta\mathcal{Q}_X, \quad \mathcal{Q}'' = [A_1 \ A_2 \ A_3] \left\{ \delta_j^G \right\} \quad (34)$$

ただし、 $\Delta\mathcal{Q}_Z = \delta\hat{\Theta}_Z (-\sin\Theta \cos\Phi \hat{i}_0 + \cos\Theta \cos\Phi \hat{j}_0)$

$$\Delta\mathcal{Q}_X = \delta\hat{\Theta}_X (-\sin\Phi \hat{j}_0 + \sin\Theta \cos\Phi \hat{k}_0)$$

$$A_1 = \cos\Theta \cos\Phi - \sin\Theta \cos\Phi \delta\Theta - \cos\Theta \sin\Phi \delta\Phi$$

$$A_2 = \sin\Theta \cos\Phi + \cos\Theta \cos\Phi \delta\Theta - \sin\Theta \sin\Phi \delta\Phi$$

$$A_3 = \sin\Phi + \cos\Phi \delta\Phi$$

(34) 式を (33) 式に代入して次の関係式が導かれる。

$$\begin{Bmatrix} \delta\Theta \\ \delta\Phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\Theta \tan\Phi & 1 \\ \sin\Theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\hat{\Theta}_X \\ \delta\hat{\Theta}_Z \end{Bmatrix} \quad (35)$$

(35)式を(32)式に代入すると、全体座標系と球座標系の等価節点モーメントの関係式が以下のように導かれる。

$$M^\Theta = M_Z \quad M^\Phi = M_X \frac{1}{\sin\Theta} + M_Z \frac{\tan\Phi}{\tan\Theta} \quad (36)$$

5. 線形増分解析による数値検証

5-1. カンチレバー梁のエラスチカ問題

計算の目的は移動座標系による幾何学的非線形性の検証と、適用した高次平面シェル要素のメッシュ依存性を明らかにすることである。図7に示すように、5、10および20個の8節点要素で構成される等分割の平板モデルを用いて、板の面外および面内曲げにつ

図7： 平板で構成されるカンチレバー梁

いて検討する。境界条件の中で、固定端における要素境界の面内回転角成分 ϕ は許容される。また、面内曲げについては面外方向の節点変位成分は全て拘束される。移動座標系 (o-xyz) は、板要素毎に配置する。荷重条件は、先端の2個の節点に撓み方向(面外ではY軸、面内ではX軸方向)に荷重増分を一定として集中荷重を作用させる。解析結果は、縦軸に撓みと軸方向変位を無次元化してグラフに整理している。増分回数は全てのケースに対して100回である。図中の理論解はTimoshenkoの文献を参照している¹⁴⁾。

面外曲げ挙動の解析では、要素の正味の撓みに関するVon Karmanの幾何学的非線形項が、メッシュが粗い場合に厳密値よりも大きくなり、結果として図8aのように5要素モデルの変形が小さく抑えられたと考えられる。ただし、5要素分割モデルであっても、縦軸が

図8a： エラスチカに関する解析結果(面外曲げ)

図8b： エラスチカに関する解析結果(面内曲げ)

図9： エラスチカに関する解析結果(面内曲げ)

0.2までは良く合っており、10あるいは20要素モデルでは理論値にはほぼ一致している。また、図8bによれば同じ5要素モデルであっても、固定端に近づくにつれて要素長さを短くして撓み勾配の与える影響を小さくしたモデル（要素長さ：5,10,20,30および35mm）では解析精度がかなり改善されているのがわかる。したがって、要素の撓み勾配が大きくなる場合には、メッシュサイズを小さくして、かつ移動座標系を密に配置することが必要である。

一方、幾何学的非線形性が移動座標系によってのみ表される面内曲げ挙動の解析では、図9に示すようにメッシュ依存性がみられず、全てのケースで理論値にはほぼ一致している。このことは、高性能な高次平面シェル要素と移動座標の組み合わせが非常に効果的であることを示している。

5-2. 一方に圧縮をうける周辺支持矩形平板の座屈

計算の目的は局部座屈に関する検証である。また、局部座屈に与える移動座標系とメッシュ分割の影響が調査される。計算対象は図10に示す矩形板の1/4モデルである。要素分割は、1×1および2×2の2タイプである。また、板中央（座標系の原点）の節点の撓み方向に板厚の1/1000の強制変位をかけて得られた変位場を初期不整として用いる。解析では荷重の作用する辺を強制変位させて一軸方向の圧縮応力場を表す。合計1000回の増分解析結果は、図10に示されている。図の縦軸は荷重値を周辺支持矩形板の座屈荷重の理論値を用いて正規化した係数であり、横軸は板中央の撓みを示す。図中の(1)と(3)、および(4)は、それぞれ板全体に対して1個、および要素毎に4個の移動座標系を配置した場合の解析結果を表し、一方(2)は移動座標系を使用しない場合の解析結果を表している。図より

図10：周辺支持矩形板の座屈解析

メッシュ分割が粗いにも拘わらず、いずれの計算結果も座屈理論値に漸近しており良好な結果である。つまり、この例題の板の局部座屈は移動座標系を用いない場合でも、要素の撓み勾配による歪の非線形項によって十分な精度で計算されることがわかる。

5-3. 圧縮力をうける片持ちBOX断面柱の局部座屈を伴う曲げ座屈

計算モデルの断面寸法および解析モデルは図11に示すように長

図11：計算モデル

deformation mode
at $U=-9.65\text{cm}$

図12：局部座屈と全体座屈の連成モードの例

図13：軸力～撓み関係

図14：軸力～軸方向変位関係

図15：パネルの面外変位の変化

手方向1/2分割の要素数48の1/2対称モデルである。局部座屈を表現できるように座屈の半波長あたり2分割している。また、要素内部の変形を表示するために、1要素あたり4×4のサブ領域に分割している。初期不整は、柱先端の5個の節点に非常に小さなX軸方向強制変位を与えて得られた変位場として設定している。荷重は部材上端においてY軸回りの曲げに関する主軸位置の節点aにてZ軸の負の方向へ強制変位増分をかける。境界条件は、下端固定および部材上端で自由である。ただし、下端では周辺支持された平板の面外座屈を表現するために板の面外方向回転角を自由にしている。また、自由端ではZ軸回りの回転角を拘束して断面形状を保持している。板厚は $t = 1.55 \text{ cm}$ に設定されている。この場合の柱としてのオイラー座屈荷重は4210t、板パネルの座屈荷重は3770t（周辺支持された矩形平板が1軸方向に均一に圧縮された場合を仮定して算出した）であるため、結果としてBOXを構成する板パネルの局部座屈が生じた後に、柱としての曲げ座屈に至ると予想される。

増分解析による結果の中で、図12は全体の曲げ座屈モードに局部座屈モードが連成している様子を表している。固定端近傍では局部座屈モードが明快に表現されているのがわかる。図13, 14は荷重～変位関係を表しており、局部座屈の発生によって耐力が劣化するのわかる。また、その最大耐力は全体座屈の理論値4210tに比べて小さくなっており、局部座屈の影響で、柱の曲げ剛性が低下したためだと考えられる。図15では固定端に一番近く、かつ、曲げモーメントに関して圧縮側の板パネル中央の局部座屈の振幅を示している。この振幅は板の全体変位から剛体変位成分を除いた板の正味の面外変位であるが、局部座屈、全体座屈および荷重の劣化に至る過程が十分に表現できている。

6. 結論

本論文において得た成果は以下の通りである。

- (1) 平板で構成される薄肉構造骨組を対象にして、完全適合型長方形高次平板シェル要素の使用と、Von Karmanの大撓み理論による要素の撓み勾配による幾何学的非線形項と、要素の変形に付随して移動する移動座標系による幾何学的非線形項を合わせ持つ解析法を提案した。
- (2) 幾何剛性マトリックスは、主として全体座屈を表現する移動座標系による非線形項成分と、主として板の局部座屈を表現するVon Karmanの歪の非線形項成分から構成されることが示された。これらは、個別の成分として定式化されるので、単に両者を足し合わせることで厳密に計算される。
- (3) 局所座標系の剛体移動を任意の4個の代表節点の変位成分を用いて表現した。その上で、全体座標系と局所移動座標系の間の節点変位成分に関する座標変換行列は、要素境界の有限回転角を用いて厳密に定式化された。
- (4) 適用した完全適合型高次平面シェル要素の要素境界の回転は、1辺につき2個の球座標系有限回転角成分によって表される。これらの回転角成分に対する球座標系での等価節点モーメントは、全体座標系での3軸回りの等価節点モーメントと厳密に関係づけられることを示した。
- (5) 基本的な例題に関する解析結果と理論解を比較検証した。その結果、少ない要素数のモデルであっても基本的な板の局部座屈

や全体座屈が共に精度良く表わされることによって確認された。ただし、粗いメッシュ分割のモデルを用いる場合に、剛体変位を取り除いた要素の正味の撓みが大きくなるにつれて、撓み勾配の2乗項による幾何剛性が過大になる可能性を指摘した。

注1) 要素は4隅節点と4個の要素境界上の中間節点から構成されるKirchhoff板理論に基づく長方形平面シェル要素である。変位関数は、曲げ変位についてはBognerの要素¹⁵⁾と同じ3次の撓み関数、面内変位についても3次関数を採用する。4隅の節点変位成分は、節点の3方向の並進成分と、2本の要素境界接線ベクトルの4個の独立な回転角成分、および撓れ率の計8個から成り立っている。中間節点の変位成分は、要素境界に沿う要素座標系変位成分と要素境界の法線を基準にして回転する面内回転角成分からなる。また、完全適合の定義は、要素境界上で<1>変位の連続 <2>要素境界に直交する撓み勾配の連続 <3>面内回転角が不連続の3条件を常に満足することである。

注2) 要素境界接線ベクトルは単位ベクトルであり、これを用いれば要素境界上における適合条件を簡潔、かつ厳密に記述できる。

注3) 隅節点の回転角成分は、結合する要素境界上の2個の回転角成分から構成される。N辺の要素境界が1個の隅節点において交わる場合、拘束条件を課す以前の回転角成分の数は2Nである。

参考文献

- 1) 上谷宏二、大神勝城：薄肉構造物解析のための高次多項式内挿変位関数を用いた完全適合型長方形平板有限要素、日本建築学会構造系論文報告集501号、pp.57-63, 1997.11
- 2) J.L.Meek and H.S.Tan :Instability analysis of thin plates and arbitrary shells using a faceted shell element with loof nodes , Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol.57, pp.147-170,1986
- 3) Geir Horrigmoe and Pal G.Bergan :Nonlinear analysis of free-form shells by flat shell elements , Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol.16, pp.11-35,1978
- 4) Jian-Wu Zhang and W.B.Kratzig :Buckling analysis of rectangular plates using a four-noded finite element, Computers & Structures , Vol.50, No.1, pp.79-86,1994
- 5) Kuo-Mo HSIAO :Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element , Computers & Structures , Vol.25 No.5, pp.665-675,1987
- 6) 鷲津久一郎、宮本 博、山田嘉明、山本善之：有限要素法ハンドブック（基礎編）、培風館、pp.37-38, 1981
- 7) 山田嘉明：有限要素法の基礎と応用シリーズ6 塑性、粘弾性、培風館、pp.25-74, 1980
- 8) 中村恒善：新建築体系 36 骨組構造の解析（第2章）、培風館、pp.199-219, 1982
- 9) Robert Levy, William R.Spillers :Analysis of geometrically nonlinear structures , Chapman & Hall, 1995
- 10) Hany Ahmed El-Ghazaly : Non-linear terms in frame analysis s using Eulerian moving co-ordinates, Commu. in Applied Nemerical Methods , Vol.7 , pp.423-428,1991
- 11) 石田修三、森迫清貴：増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限解析法、日本建築学会構造系論文報告集397号、pp.73-81, 1989.3
- 12) 西村 督、森迫清貴、石田修三、上谷宏二：増分摂動法による立体骨組の大撓み解析、構造工学論文集 Vol.39B, pp.73-86,1993.3
- 13) Tetsuya Matsui and Osamu Matsuoka :A new finite element scheme for instability analysis of thin shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol.25 No.5, pp.665-675,1987
- 14) ティモシェンコ、ギアー著、前沢成一郎他訳：材料力学本論、コロナ社、pp.226-230, 1975.3
- 15) F.K.Bogner, R.L.Fox, and L.A.Schmit :The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., AirForce Inst. of Tech., Wright Patterson A.F.Base, Ohio, 1965(October)

(1997年9月19日原稿受理、1998年4月2日採用決定)