滑りの止められた剛体の地震時転倒解析法に関する研究

A STUDY ON COMPUTATIONAL METHOD FOR OVERTURNING OF NON-SLIP RIGID BODY AGAINST EARTHQUAKE

高瀬 啓元*
Hiromoto TAKASE

An algorithm for pulse response of non-slip rigid body is developed using ellipse functions. Then seismic response without numerical integration is computable replacing seismic record as pulse series. The numerical experiment shows good accuracy and strange tendency of overturning becomes clear. To investigate and overcome the complexity, overturning response spectrums are proposed with examples using Koube earthquake record. Then the record is approximated by 4 triangular pulse. The attempt showed good coincidence in overturning tendency and explain some reasons of the complexity.

Keywords: *Overturning of Rigid Body, Ellipse equations, Rigid pendulum,
Overturning-spectrum, Long period pulse, Near source earthquake,*

単体転倒振動、剛体振子、楕円関数、転倒スペクトル、長周期パルス、近距離地震

1. はじめに

近距離地震である神戸地震の特徴として高加速度、長周期パルス、短い継続時間が挙げられ、震害との関連の研究もなされ始めた。筆者はこのような特徴が家具や設備機器の転倒被害にも不利だろうと考え計算してみると、高加速度だが海洋波の釧路地震波と比較して明らかに倒れやすく、耐震工学的にも数値解析としても興味ある結果を得て情報システム技術部門に報告してきた^{1),2),3)}。すでに昭和45年に梅村・滝沢⁴⁾が述べているように、墓石の転倒被害からの地震最大加速度の推定などに関連して“物体の転倒問題は旧くは大森(1900)をはじめ数多くの地震学者によって研究され”物部、岡本、小林、畑野、大築、小堀、南井、梅村、園部らによって、“静的転倒条件は必要条件に過ぎず、物体の大きさ・変位(速度)・周期等が大きく影響する”ことがわかってきたが、“いずれも定常振動に限定されていた”^{付録1)}ので滝沢らは滑りの止められた剛体について強震波応答を調べ、構造物は勿論、墓石程度でも静的な転倒震度よりかなり大きな動的転倒震度を必要とすること、地震波により差があること、上下動は影響が小さいこと、相似比の違いは近似的に換算できることなどを論じ複雑な転倒領域を示している。当時ようやく普及したコンピュータを活用した研究成果といえる。その後も少数の研究者により改良した振動モデルや振動台実験を利用して転倒限界を求める研究^{5),6),7),8),14)}もな

されたが、未だに転倒現象が解明されたとは言い難い。その理由として、単体とは言え非線形力学系の複雑性からあまり明確な結論は無理であること、研究課題として、備品より構造の安全性、挙動の追跡より対策が優先されたこと、信頼できる大加速度の地震記録がほとんど無かったこと、従って地震被害と発生地震のタイプを関連づけるような研究も難しかったことなどが挙げられよう。筆者らも積み重ねた剛体系の衝突転倒振動計算法を開発して転倒問題を扱った^{9),10)}が、納得のゆく知見には至らなかった。ところが近年は内外で地震波記録が充実し我が国でも特徴ある神戸波等が得られ、構造被害より桁違いに多い家具、機器等の被害にも関心が高まっている。免震制震装置で入力加速度を小さくしたり、転倒防止装置を付けたり、重要な建物内での対策も盛んである。しかしながら重力に期待して据え置かれる機器備品をなくすことは無理であり、また一般に動的震度は静的震度よりかなり小さいので、防災上の研究の意義は減っていない。逆に転倒被害から発生地震を調査する際にも転倒応答の複雑さを心得ておくべきだろう。既報では神戸波と釧路波による複雑な転倒傾向の差を見てから多次元入力多自由度方程式の整理¹⁾、複雑性に対処する尺度として転倒スペクトルの提案²⁾それを利用した立体振動、相似比、減衰効果や地震波比較³⁾、楕円関数による強制振動の厳密解と地震応答への応用と転倒のメカニズムの考察³⁾などを報告してきた。本報告で

本論文の一部は1997年度日本建築学会大会²⁾、1996¹⁾、1997年度³⁾情報システム利用技術シンポジウムで発表している。

* 鹿島情報システム部 工博

Senior Manager, Intelligent Systems Department, Kajima Co., Dr. Eng.

は、これらのうち単体の転倒に関する内容を再構成する。その目的はこの分野の重要性に鑑み多様な興味深さを紹介して関連研究に資することである。そのため、計算法に関する情報は重複を恐れず再吟味し、計算例は出来るだけ別例を示す。特に簡単な数個のパルスで神戸波を近似して転倒傾向再現を試みる。これは神戸波の特徴をとらえた計算の簡略化だが非線形応答の複雑さを解釈する手掛かりにもなる。

2. 解析式の吟味

2.1 運動方程式と速度変化式

図-1のように滑りが止められた

図-1 単体の転倒振動

単体(脚巾 $2b$ 、重心の高さ H 、転倒角 $\alpha = \tan^{-1}(b/H)$)の回転角 θ に関する平面運動方程式は(1)となる。 $\ddot{u}_0$ 、 $\ddot{v}_0$ はそれぞれ水平、上下地動加速度、 f は θ の正負すなわち単体が左脚中心にロッキングしているか右回りかによって ± 1 、 I_0 は接点回りの回転慣性、 m は単体の質量、 g は重力加速度である。

$$I_0 \ddot{\theta} + m r \{ \ddot{u}_0 \cos(\theta - f\alpha) - (\ddot{v}_0 + g) \sin(\theta - f\alpha) \} = 0 \quad (1)$$

床衝突後の速度は式中の符号 f と共に一定の変化率 e で、(2)式のように角速度が 0 から 1 に変わる。第 2 項は角運動量保存式による。

$$\dot{\theta} = (1 - 2r^2 / r_0^2 \cdot \sin^2 \alpha) \dot{\theta}_0 = e \dot{\theta}_0 \quad (r^2 = b^2 + H^2) \quad (2)$$

r_0 は接点回りの回転半径で均質な単体なら $r_0^2 = 4/3 r^2$ なので、 $e = 1 - 3/2 \cdot \sin^2 \alpha \approx 1 - 1.5 \alpha^2$ である。一方単体の速度変化が一定の割合で 1 周期に 2 回起こるときの等価な対数減衰率 h との関係は $e = \exp(-\pi h / 2) \approx 1 - \pi h / 2$ である。すなわち転倒角 α が小さければ等価減衰率 h はほぼ α^2 である。速度変化率は実験等を参考にした妥当な値を与えても良い。既報²⁾で論じたが、角運動量保存則はここでは近似にすぎないからである。以上の単体の解析式は組積剛体系⁹⁾の特例にもなっている。運動方程式(1)の三角関数項を θ の 1 次式で近似すれば線形方程式になるが、複数の近似法がありいずれも実用性がある^{10,11)}。すなわち近似的には運動方程式は負勾配の復元力を持つ区分的に線形な方程式である。 θ を微小とした単体および組積剛体系の三方向入力応答の解析式は筆者らが発表し⁹⁾、既報^{2),3)}で利用した。

2.2 自由振動

自由振動方程式は

(3)となる。ここに

$$n^2 = m r g / I_0 = r g / r_0^2$$

$$(= 3/4 \cdot g/r)$$

で接点 O

または O' を軸とする

剛体振子の角振動数

である。(3)式の両辺

に速度を乗じて積分

すると(4)式となり、

図-2. 単体の相平面図 (回転角 * 角速度)

初期値 $\theta_0, \dot{\theta}_0$ から積

分定数 k^2 が決まるが(4)は力学エネルギーの釣り合い式でもあり k^2

はエネルギーレベルを示す。 k^2 をパラメータに(4)式から位相図に描

ければ運動の概要がわかる。図-2 は $\tan \alpha = 1/3$ の相平面図である。

$$\dot{\theta} - n^2 \sin(\theta - f\alpha) = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\theta}^2 + 4n^2 \cos^2((\theta - f\alpha)/2) = 4n^2 k^2 \quad (4)$$

$k=1$ の軌道は $\theta = \pm 2n \sin(\theta - f\alpha)$ であるが直線近く、 $k \neq 1$ ではこ

れを漸近線とする双曲線に近い。この(3)、(4)式は、 $\psi = \pi - f\alpha + \theta$

図-2. 単体の相平面図 (回転角 * 角速度)

と置き換えれば古典的な力学問題の剛体振子の方程式となる。ただし転倒振動は振子が倒立から転倒する付近だけで回転の中心 O と O' が交代する運動である。すなわち速度軸上で床衝突のため速度が減少、軌道も不連続に小さくなる散逸のある系である。このため分離線 $k=1$ で囲まれた原点を含む領域ではすべての解は近似的に螺旋状に原点に近づく。安定な平衡点は原点の他に $(\pm \pi/2, 0)$ があり(横倒し状態) $k < 1$ でも初期変位が大きければ転倒となる。 $k > 1$ のときは速度と変位が同符号なら転倒、異符号でも一回の床衝突で速度が十分減らなければ転倒である。 $(\pm \alpha, 0)$ は不安定な平衡点である。この相図は剛体振子の相図を部分的に切り貼りして求めることが出来る。剛体振子の方程式には楕円関数による厳密解があるのでこれも部分的に切り貼りすれば転倒方程式の厳密解が導かれる。 $k^2 < 1$ のとき単体は転倒に至らず速度を失って復元する。回転角と角速度の時刻歴はヤコビの楕円関数 sn, cn, dn で与えられる。

$$\sin(\varphi/2) = k \cdot sn(nt + nt_0, k) = \cos((\alpha - \theta)/2) \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = 2nk \cdot cn(nt + nt_0, k), \quad nt_0 = sn^{-1}(\cos((\alpha - \theta_0)/2)/k, k) \quad (6)$$

楕円関数 sn は k が 0 に近ければ振子の微小振動解 $\sin$ に近づくが転倒振動では例でも最低 $k = 0.977(\cos \alpha/2)$ で 1 に近く、頂部が平たい高原型の関数である。 θ が 0 から最大値 θ_m になるまでの時間(擬似周期の $1/4$)を T_p とすれば $nT_p = sn^{-1}(1/k) - sn^{-1}(\cos(\alpha/2)/k, k)$ である。図-3 に振幅角 θ_m/α と擬似周期の関係を示す。 α が 45、0.3、0.10 と 3 ケースを図示したが見分けがつかない。これは運動方程式(1)の解が良い近似で θ/α で基準化されることを示す一例である。振幅 $\theta_m \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow \cos \alpha/2$ で擬似周期 $\rightarrow 0$ となるのも振子や弾性系との顕著な違いである。なお剛体周期 $\pi/2(4n)$ と比較すると振幅が転倒角の 6 割強のときの擬似周期にあたり、代表値として適当である。 $\theta_m \rightarrow \alpha$ のとき $k \rightarrow 1$ で $T_p \rightarrow \infty$ 。 $k^2 = 1$ のとき転倒限界であり不安定な平衡点 $\theta_m = \alpha$ に無限時間後到達する。 $k > 1$ のとき転倒角を超え(5)、(6)式は次のように変わる。

図-3 単体周期の振幅依存。

$$\sin(\varphi/2) = sn(nkt + nkt_0, 1/k) = \cos((\alpha - \theta)/2)$$

$$\dot{\theta} = 2nk \cdot dn(nkt + nkt_0, 1/k), \quad nkt_0 = sn^{-1}(\cos((\alpha - \theta_0)/2), 1/k)$$

床衝突の発生時刻もその時の速度も(6)式等で厳密に求まるが sn^{-1} は周期関数である sn の逆関数なので本来多価関数であり分枝に注意して選ばなければならない。関数ルーチンの定義を確認し剛体振子の運動や相図をイメージしつつ、 k と 1 の大小のほか相図上での象限、 α と θ の大小で細かく場合分け⁹⁾する必要がある。

2.3 強制振動

力積応答：運動方程式(1)を変形して

$$\ddot{\theta} + n^2 \{ \ddot{u}_0 / g \cos(\theta - f\alpha) - (\ddot{v}_0 / g + 1) \sin(\theta - f\alpha) \} = 0 \quad (1')$$

瞬間的に水平外力項が支配的に作用し力積 $p^* = -\int \ddot{u}_0 dt$ が有限なら回転角は変らず角速度が変化して自由振動を続ける。変化量は

$$\dot{\theta} \approx -n^2 \ddot{u}_0 / g \cdot \cos(\theta - f\alpha), \quad \Delta \dot{\theta} \approx n^2 / g \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot p^*$$

と近似される。地震外力を力積の系列とみなせば、地震応答は時々強制的な速度変化を交えた自由振動の接続となるので初期値解の接続で非線形応答が求まる。相図上では瞬間的速度変化による k 軌道変化

を交えた軌道上の運動で何度かの速度変化により $k > 1$ の転倒領域から戻れなければ転倒に至る。

矩形波応答：次に一定の加速度外力が上下・水平に有限時間作用すると考える。(1)を変形すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \theta - N^2 \sin(\theta - \alpha + \gamma) &= 0 \quad \text{ここに } \gamma = -\tan^{-1} \left\{ \ddot{u}_0 / (\ddot{v}_0 + g) \right\} \\ N^2 &= n^2 \sqrt{(\ddot{u}_0 / g)^2 + (\ddot{v}_0 / g + 1)^2} = c_p n^2 \end{aligned} \quad (7)$$

加速度外力により重力が絶対値を c_p 倍に、方向を鉛直から γ だけ変えたことになる。静止した振子も新たな鉛直点に向かって運動を始める。解法は相図の軌道を γ だけ平行移動したと考えても、逆に回転角 θ を $\theta + \gamma$ に変換しても自由振動の方程式と同形で楕円関数解が利用できる。後者の場合床との衝突も γ だけ回転した床に対するものとなる。静止した単体なら床が $\pm \alpha$ 以上傾いて重心が頂点をすぎるとおもむろに動きはじめる。振子は有限時間この仮の運動をし、また元の自由振動状態に戻る。地震波を矩形波の系列と見なせば地震波応答も逐次計算出来る。

3. 数値計算の要点

3.1 数値積分による転倒振動の時刻歴計算

単体に限らず衝突を伴う剛体系の数値計算には積分法と状態変化時の処理法の選定が必要である。転倒振動方程式は線形振動と異なり状態変化の激しさに比べてその間ではほとんど安定した定加速度運動であり積分法の選定による発散などの心配は少なく、状態変化処理法の方が重要である。応答回転角の絶対値が転倒角の2倍を超えたら転倒として計算を打ち切る。結果をみると1.5倍位でもよい。他に速度やエネルギーによる判定もある。自由振動なら転倒角比またはエネルギー k^2 が1を超えたら戻らないが応答では完全に倒れないうちは立ち直る可能性がある

$$d_{i+1} = d_i + v_i \tau + \tau^2 / 4 \cdot a_i + \tau^2 / 4 \cdot \bar{a}_{i+1} \quad (t1)$$

$$v_{i+1} = v_i + \tau / 2 \cdot a_i + \tau / 2 \cdot \bar{a}_{i+1} \quad (t2)$$

$$a_{i+1} = f(d_{i+1}, v_{i+1}, \alpha_{i+1}) \quad (t3)$$

るし周期の長いものは後で倒れることもある。地震波の積分範囲と共に経験で効率をあげるところである。

振動方程式の数値積分法としては上の台形則に基づく方法が精度も安定性も妥当で優れている。ある時刻 i -step の加速度 a_i はその時刻の変位 d_i 、速度 v_i と外乱 α_i の関数である。運動方程式(t3)が線形なら連立1次方程式として解けるが非線形だと陽に解けないので工夫がいる。台形則は Newmark の $\beta = 1/4$ 法に等しいが、(t1)式で a_{i+1} を a_i と仮定すれば $\beta = 0$ 法となり、方程式(3)に速度項がなければ変位、加速度、速度の順に陽に求められる。速度項があっても(t2)でも a_{i+1} を a_i とみなして仮の速度を決めて加速度を計算してから求め直す方法を NB0 法とした⁹⁾。より精度を上げるには反復代入による。定加速度を仮定して(t1),(t2)式で変位、速度を求め、(t3)式に代入して加速度を求める。ここで止めれば NB0 法、さらにこの加速度を(t1),(t2)に代入して変位、速度を決め、また(t3)式で加速度を決めれば加速度計算の回数は2倍になるがそれ以上の精度向上になる。この方法は NB0 法を予測子として、台形則を修正子とする Predictor-Corecter 法で、一回の反復でも効果がある。この方法は簡便で速度項があっても使え、非線形解析一般に実用的である。

衝突時の処理法で筆者らが前進法と名付けた⁹⁾のはあくまで一定の刻みで進み少々行き過ぎは簡単手直しだけで前進する簡便な方法である。当初は別として、十分静止した筈の単体も微小に動き続

けているものとする。これに対して一定刻みの間で起こる衝突の時刻を出来るだけ正確に求め、静止状態も含めて速度の変化を処理し、刻みまでの半端な積分も求めてから次のステップに移る方法を追跡法と名付け精度確認のため等に用いる。

入力波ルーチンはいずれの近似に拠る場合も通常の地震応答ルーチンと同様に一定刻みの地震波やテストデータを入力して補間する。実地震波は線形補間が常識的だが矩形波や三角波、力積パルスやその系列を効率よく与えるため平均加速度補間、定加速度補間も可能にしておく。正弦波などの数式による場合もある。入力地震波の途中立ち上げ、打ち切り、初期スムージングなどの機能を備えておくとよい。

3.2 転倒スペクトルの計算法

転倒方程式(1)、(2)のパラメータは剛体周期、転倒角、速度変化率、地震波記録(種別、最大加速度)である。剛体周期を含むいくつかのパラメータだけを変化させて転倒非転倒を調べ、周期を軸に転倒限界を描いて転倒スペクトルと名付けたい。ただし後で例に示すがいわば非線形力学系の複雑性のため境界は必ずしも明確に定まらず、計算効率上も注意が必要である。筆者が転倒スペクトルとして提案して利用し¹⁾、転倒マップ I と改名した²⁾ グラフは与えられた地震波につき、一定刻みで変化させた最大入力加速度と剛体周期のあらゆる組み合わせを計算(絨毯爆撃)して2次元にプロットするもので、転倒の有無だけでなく最大回転角も求めて立体的図や密度に表示してもよいが、1桁に丸めたプリンター印字でも十分な散布図が得られる。このグラフの簡易版として、転倒加速度の下限を包絡する非減少関数を転倒スペクトル I²⁾とし、工学的に安全をみた動的加速度限界として地震波形や減衰性の比較などに用いた。この計算にはマップ I と同様に加速度の下限までは忠実に探す方法のほか、非減少の定義や最大角の変化などを利用する工学的探索法がある。提案したマップ II²⁾では最大加速度を固定して転倒角と周期の組み合わせについて I と同様にしらみつぶしに計算をしてプロットする。床衝突時の速度変化率に一定値を与えるか角運動量保存仮定によるかで異なる図となるが、さまざまな形状の剛体の転倒が一目で判定できる。これも複雑性に注意しながら上限を単調な非増加一価関数に置き換え必要安全角を与えるスペクトル II²⁾として各種比較に用いられる。

3.2 楕円関数を利用する転倒振動の時刻歴計算

運動方程式(1)は(7)等の自由振動に帰着され(5)、(6)等により楕円関数などのルーチンがあれば数値積分に拠らずに解ける。楕円関数や逆関数のルーチンを自前で作るのは数値解析上興味深い課題であり、同じパラメータを何度も計算しないなどのメリット¹²⁾¹³⁾が得られる。パソコン等の数学関数ライブラリは以前は数値計算の精度などで心配なものもあったようだが今では精度に関するドキュメントも豊富で利用例も含み使い易いものがあるので、定義の違いに注意しつつ適宜活用したい。ある大型機のルーチンではヤコビの楕円関数 sn と第1種楕円積分ルーチンが逆関数なので本論の記述式のとおりで良いが、母数 k のほか補母数 k' ($k^2 + k'^2 = 1$) も十分な精度で与える必要がある。ある P 用 FORTRAN 開発システムのライブラリでは Jacobi の楕円関数 sn, cn, dn はあるが逆関数も第1種楕円積分も無いかわりに下記の Carlson (1979) の楕円積分があるのでこれから求める。

$$R_r(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^t dt / \sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}$$

$$sn^{-1}(\sin \varphi, k) = F(\varphi, k)$$

$$= \int_0^\varphi d\theta / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \sin \varphi R_r(\cos^2 \varphi, 1 - k^2 \sin^2 \varphi, 1)$$

ある数学ソフトでは楕円積分の変数が定義通りの振幅角だが他にヤコビの逆関数もあるので母数が k でなく k^2 であることに留意して、こちらを利用した方が間違いない。式(5)では $k \cdot sn$ から回転角 $(\alpha - \theta)/2$ の $\cos$ が求まるが回転角が微小で $\sin$ のほうが直感的でもあるので関係式 $dn^2 = 1 - k^2 sn^2$ を使って求めている。同様に $k > 1$ では $cn^2 = 1 - sn^2$ から求める。厳密解なので計算の刻みは精度に直接の関係はないが地震等の外力の精度には影響がある。衝突時の処理は床衝突時刻とその前後の速度を一定刻みによらず正確に求める“追跡法”によるが回転角の最大値等も角速度が0のときの値を計算して正確に求められる。いずれにせよこのようなパーソナルユースの試行的プログラム開発には解析式の吟味やロジック、パラメータの選択などを繰り返し逐次プログラムを成長させていくのが易しく、エディットやデバッグ、グラフ化など簡単なPCの開発環境が便利である。自由振動でも θ の相図上の領域による場合分けのほかこれら関数値の符号や逆三角関数の分枝に気を付けながらプログラムを完成してゆく。矩形波の強制振動では変数の変換や逆変換も伴い、厳密解を利用するとはいえ結構複雑なプログラムとなる。剛体振子やその相図をイメージしていることがコツだろう。

図-4. 神戸海象波による応答

4. 計算例

神戸波による時刻歴応答：既報^{1),2),3)}では主として墓石に近いBモデル(36x80cm)を例題にしたが、ここではもっと大きい洋服ダンスまたはロッカーのようなYモデル(60x180cm)を巡って各計算法や図の用途を示す。図-4aは神戸海洋気象台波820Gal(直線補間により1/5000秒刻み)によるYモデルの応答時刻歴、cは相図だが大きく揺れて危険な速度に2度達するものの結局倒れない。一方図-4bはYより巾をひろげたYLモデル(66x180cm)だが逆にあっさりと転倒している。また、加速度を750Galに下げるとYも転倒する。このような常識に反する結果は転倒マップに現れる。

a. 全体図(0-5sec, $\tan \alpha$: 0-0.8) b. 拡大図(2.0-2.8sec, $\tan \alpha$: 0.3-0.4)
図-5 転倒マップⅡ (神戸海洋気象台 NS 820Gal)

転倒マップ、転倒スペクトルの利用：図-5aは既報²⁾の神戸波820galの転倒マップⅡである(転倒域は白抜き)。Yの剛体周期2.22秒、 $\tan \alpha$ が0.3付近は複雑なので拡大する。図-5bは部分を5x10倍のメッシュで調べたもので転倒領域が半島のように張り出しYLが含まれる。半島の下に非転倒域の入江がありYが含まれる。拡大しても図の複雑さは減らない。このような複雑性は非線形力学系の特徴として興味深く地震波の個性も感じられるが、当面工学的にはあまり細部に

必要安全角比(動的転倒角/静的転倒角)

図-6. 転倒スペクトルⅡ(地震波比較)

拘らず割り切った対処も必要である。図-5aの粗い網でも全体を鳥瞰すればY、YLモデルとも微妙なところに位置し、Yがたまたま倒れなかったといっても危険な状況と見て取れる。さらに複雑さを除いた単調一価関数の転倒スペクトルは安全を見つ計算効率も上げるもので簡便にパラメータの影響を見たり地震波の比較に使ったり出来る。図-6は既報²⁾でスペクトルⅡを利用して5つの地震波に対する“必要安全角比”を比較したものでそれぞれの波のマップⅡの上限を調べて描く。ただし図-6では角運動量保存減衰ではなく一定減衰5%を与えている。これは角運動量保存なら α で1/4以下の小さな減衰にあたる。減衰が等しければ剛体周期の等しい単体はほとんど等しい動的転倒角比となるのが解っているので、²⁾最大値の異なる地震波の応答が相対値では比較できる。この比が半減する周期でみると、実際にほぼ等しく高加速度だった神戸と釧路については釧路が1秒すぎに対し神戸が2.5秒すぎで後者のほうが転倒被害が大だったことがうかがえる。エルセントロは3秒、八戸は3.5秒すぎ福島(神戸地震の時大阪福島区で記録)は5秒すぎまで衰えない。後3者とも前2者の2ないし5分の1の絶対値であるが長周期の剛体(数メートルから10数メートルの高さの貯蔵物ラックなど)も注意すべきだろう。このような地震波による違いは、当然卓越した周期成分と関係あろうが波の弾性スペクトルだけで説明できそうもない。同じ地震波でも転倒加速度や転倒角の逆転結果は不思議である。地震波の立ち上げ方や打ち切り方によっても結果が異なる。例えば図-4で神戸波を5.7秒位で打ち切るとYでも転倒する。一方数値積分の精度は1/10000秒刻みにしても、逆に1/2000秒でも3桁以上の一致だが逆転付近では数箇所転倒有無の不一致が見られた。神戸のような近距離波は短時間で終わる数波の長周期パルスが特徴であると言われる。このような背景があるので、

地震波やパルス波の時刻歴応答を数値積分によらずに求め転倒のメカニズムを調べる意義があろう。既報ではB(墓石 36×80cm: 周期約 1.5sec.)モデルについて吟味したがここでは少し大きいY(洋ダンス 60×180cm: 周期約 2.2sec)モデルにつき数値計算のチェックをかねて単純なパルスに対する転倒性状から調べる。

単一の力積による応答: Yモデルに力積 $p=118.9(820 \times 0.145)$ Gal·sec.および $119.0(820 \times 0.1451)$ Gal·sec.が瞬時に加わった時の応答を数値積分(0.0002 秒刻み)と厳密解で求めると両解は3桁以上一致し前者で復元、後者で転倒となった。これは初角速度で 0.8917 と 0.8924 にあたり、転倒限界が 0.8921rad/s なので妥当である。次に単一の力積を単一の矩形波近似してみる。表-1 は 118.9Gal·sec.の力積を幾つかの矩形波で近似した時の応答最大角速度である。理想値 0.8917rad/s と比較して数千 Gal の大加速度での収束は良いが 1000Gal 程度では定量的に 10 数%の差はある。これは逆に単一の矩形波を単一の力積で近似することの限界も示している。図-7 は 1189Gal、0.10 秒の時の相図であり、立ち上がりで遅れる様子がわかる。

表-1. 力積の矩形波近似 ((0.8917))

入力加速度	入力時間	最大角速度
820gal	0.145sec.	0.708rad/s
1189	0.10	0.767
2378	0.05	0.834
4756	0.025	0.868
9512	0.0125	0.887

図-7. 矩形波近似、相図

矩形波による応答: 先に吟味したが図-7 のように突然床が傾いて単体が静止状態からゆっくりと回転し始め、矩形波が終われば床は水平に戻る。矩形波終了後は自由振動であり、終了時の相図上の位置で転倒の有無が決まる。820Gal の水平加速度が 0.181 秒、0.182 秒加わった時、数値積分と厳密解とも前者は復元、後者は転倒する。表-2 で矩形波を複数の力積の系列で近似する。820Gal、0.15 秒の矩形波を近似して $123(820 \times 0.15)$ Gal·sec.の力積を 1/3、1/5、1/10、1/20 に等分して 0.15 秒内に等時間隔に配列する。0.01 秒刻み位だとかなり良い近似(数%の差)である。図-8 は 5 等分 0.03 秒刻みの時の相図を示すが、図-7 のような矩形入力力の滑らかな立ち上がりに対しギザギザと高レベルの軌道に飛び移ってゆく力積近似の特徴がわかる。

表-2 矩形波の力積近似 ((0.725))

力積間隔	個数	最大角速度
0.15sec.	1	転倒
0.05	3	0.791rad/s
0.03	5	0.762
0.015	10	0.740
0.0075	20	0.728

図-8. 力積近似、相図

三角波を複数の力積と複数の矩形波で近似: Yモデルにピーク 820Gal、巾 0.4 秒の三角波を作用させる。0.02 秒刻みの矩形および力積パルス列で近似計算し、0.0002 秒刻みの数値積分と比較する。図-9 に相図で示すが、矩形波近似と数値積分はほぼ等しく力積近似が数%の差はあるが良く似ている。矩形波よりさらにゆっくりした立ち上がりであり、試みに 0.01rad の初期角度を与えてもいずれも転倒する。わずかな反対方向の初動から復元する間も三角波の影響を 100%受けて急激に速度が増し転倒したためである。

図-9. 三角波によるYモデルの応答

この三角波は神戸波の最大値付近を意識している。Yに限らずこの三角波 1 山(初期条件 0)の転倒マップをつくると図-9d になる。図-5 と比べて転倒限界は複雑さも無く単調に減少している。

図-10. 神戸波近似パルス列 820Gal による応答

パルス列による神戸波の近似: 最大加速度 820Gal を含む 4 個の三角パルスで神戸波を近似する。巾はすべて 0.4 秒、ピークはそれぞれ 0.75:-0.6:1.0:-0.4 とした(4 パルス)。図-10a,b は Y および YL モデルの 820Gal 応答時刻歴で図-4a,b とそっくりである。もともと動きやすいYが初めの波に動きすぎて逆向きの最大の波にやや乗り遅れ、1) Yは転倒せず、YLのほうが大きな速度を得て転倒する。それでもYも転倒に必要な速度は得ているのでその次に 2) 最大のパルス後に止めるとYも転倒するが、フォローがあると運動エネルギーを失って立ち直る。ほかに 3) Yは 750Gal で転倒したがYLと同様に

図-11. 近似パルス列の転倒マップ

初動が小さい。このようにYでは神戸波とほぼ同様な転倒傾向となった。さらに一般の単体についてこの擬似波で転倒マップを作って調べる。図-11a,b は 4 パルスの全体図 a と拡大図 b である。複雑さは減ったようだがよく似ている。4 つ目のパルスをカットした(3 パルス)全体図 c と比べ 2-3 秒あたりが大きく扶られ、先に見た入江と

半島を生んでいる。このように一般に新たなパルスを迎える度にある部分は削られ、他は肉付けられて複雑な境界ができるのだから神戸波のような近距離地震だと初期のいくつかのパルスだけで概形が決まりシンプルな近似が概ね成り立つのではないか。Makris は摩擦タイプの免震ダンパが近距離地震に有効であることを論じるのに Northridge 地震の Rinardi st. の記録を大胆に 1 波の $\sin$ 波に置き換えている¹⁵⁾。近年の地震波記録は膨大な量で時刻歴応答の際は割愛厳選し尾端をカットして利用しているのが実状だろう。このような簡略化のメリットは大きく、目的により限界を心得て利用すべきだろう。神戸波のような地震による転倒は周期 0.8 秒の比較的長周期のパルス列が、わずかに数個でかなり再現できることが分かったがこれは外力がゆっくり加わる方が倒れやすいということではない。表 2 のように等価な力積なら集中するほど大きな速度変化をもたらす。長周期パルスの怖さは適当な間を空けて逆向きのパルスが襲うことにある。持てる力で押したり引いたりして物を倒そうとするときの常識的知恵も使ってパルス列の応答を調べれば転倒現象の理解が深まるだろうし、防震や制震・免震のヒントになるう。

5. おわりに

滑りの止められた単体の転倒振動解析法を整理し数値積分によらず厳密解に基づく応答時刻歴計算法を導いた。また多様な結果のまとめのため転倒スペクトルを提案した。計算例でこれらの精度と実用性を示すとともに、応答結果の複雑さに対する考察も述べた。得られた知見を以下に示す。

- 1) 楕円関数による剛体振子の厳密解を拡張して 2 種の衝撃的外力(瞬時力積および矩形波)およびこれらのパルスの列に対する応答計算法が形成できる。
- 2) 地震外力をパルス系列とみなす地震応答解析が可能である。また、矩形波パルス列による近似はほぼ精解を与える。単純な等価力積近似もやや精度は下がるが簡便な方法である。この擬似厳密解との比較で数値積分による計算法の適切な演算刻みも保証される。
- 3) ある地震波に対して常識的には地震加速度が大きいほど、巾／高さ比、サイズ(剛体周期)は小さいほど倒れやすいはずだが、しばしば逆転現象が見られ、周期に対する転倒限界は単調一価関数にならない。この様子は転倒マップで調べられる。
- 4) 実地震波の転倒マップは細かいメッシュで作っても複雑過ぎるので粗いメッシュで広範囲を概観するマップが実用的である。
- 5) さらに単調一価関数に近似した転倒スペクトルは簡便である。近似法は目的が設計の安全性か被害の予測かによって異なる。
- 6) 神戸海洋気象台波を簡単な数個のパルス列で近似して同様な転倒傾向を再現した。情報過多の中でこのような入力波の簡略化は意義が大きいので目的により利用したい。
- 7) パルス列応答ではパルスが増すごとに転倒マップの転倒領域が増減して逆転現象も起こり複雑さが増す。神戸のような近距離地震では初期の数個のパルスだけで概形が決まるようだ。

今後の課題としては設計への適用や実験観測による検証以外に a) 他の近距離地震や構造物内で観測された波ではどうか、他の非線形振動、例えば剛体振子ではどうか、b) 本論のような設計的安全側のスペクトルではなくマクロに被害を予測するための平均的スペクトルはどう決めたらよいか、c) 非線形応答の複雑さをより数理的研究に発展

できないかなどが考えられる。

付録 1. 単体の周波数応答

周波数応答については解析的にも実験的にも種々試みられ¹¹⁾ 転倒条件がさぐられている。既報¹⁾でも金子ら¹⁴⁾の結果と比較して合致していること、複雑性があること、相似な単体の応答結果が相似な図となることを見た。同一な単体の周波数を変えた応答は同一な周波数に対する相似な単体の応答と回転角すなわち転倒性状については等しいから、周波数応答はそのまま $\sin$ 波という波に対する転倒スペクトルでもある。ただし横軸の加振周波数を相似単体の剛体周期と読み替える。パラメータは減衰性(角運動量保存なら転倒角)だけで、これにより倒れやすさや転倒マップの顔つきがかわる。ただし外乱の初期の立ち上がりや打ち切り条件次第で転倒性状も変化する。周波数応答は振動解析の基本であり興味深い、本来定常振動を求めるもので、振動実験も解析もそれぞれの難しさがあり、これだけいくら調べても過渡振動たる転倒現象の解明には至らないだろう。あくまで一連のテスト波の 1 つとして用いるべきだ。神戸波や Northridge 波のような近距離波との類似からは、むしろ洪ら¹⁰⁾が扱ったように $\sin$ 波を 1 波、2 波あるいは半波で打ち切った波の方が興味がある。転倒マップでも洪らの通り 2 山 1 波が広い範囲で卓越していることが確認できた。1 山パルスの半波は三角パルス同様で、複雑性も見られない。

参考文献

- 1) 高瀬啓元：多次元入力地震にたいする剛体系の転倒振動計算法、建築学会第 19 回情報システム利用技術シンポジウム、1996
- 2) 高瀬啓元：単体の転倒スペクトルと数値計算法、日本建築学会大会梗概集(関東)1997
- 3) 高瀬啓元：楕円関数による剛体の転倒方程式の地震応答計算法、建築学会第 20 回情報システム利用技術シンポジウム、1997
- 4) 梅村魁、滝沢春男：非定常入力による転倒振動の解析—剛床上の剛体の場合、建築学会大会梗概集(関東)1970
- 5) 望月利男、小林計代：単体の運動から地震加速度を推定するための研究—単体の動的挙動の解析、日本建築学会論文報告集、248 号、1976
- 6) 石山祐二：Motions of Rigid Bodies in Response to Earthquake Excitations—、日本建築学会論文報告集、第 314 号、1987
- 7) 遠藤彰、足立憲彦：RC 単体の転倒振動とその解析、建築学会関東支部研梗概集、1978
- 8) 坪田張二：家具類の振動特性と耐震対策、鹿島建設技研年報、vol.29,1977
- 9) 武藤清、高瀬啓元：組積剛体系の衝突転倒振動の計算法(その 1) 垂直平面内の運動、日本建築学会論文報告集第 293 号、1980。
- 10) 武藤清、高瀬啓元：同上(その 2)3 方向地動による立体振動、299 号、1981
- 11) 武藤清：構造物の動的解析、耐震設計シリーズ 4、丸善、1966
- 12) 江沢洋：漸近解析、岩波講座、応用数学 14[方法]5、1995
- 13) 一松信他：電子計算機のための数値計算法Ⅲ、数理学シリーズ 5、培風館、1972
- 14) 金子美香、林康裕：剛体の転倒限界に関する基礎的検討、建築学会構造系論文集、第 479 号、1996
- 15) Makris, n: Seismic Protection of Structures with ER Fluid Dampers: Supplemental Damping and Rigidity, EERC News, vol.18 No.3, 1997
- 16) 洪志憲、長谷川康之：構造物の転倒安定について(その 1、浮き上がり転倒限界)、明治大学工学部研究報告、第 31 号、1976

(1998 年 2 月 9 日原稿受理、1998 年 4 月 2 日採用決定)