入出力のウェーブレット変換を用いた多自由度系の パラメトリックなシステム同定

IDENTIFICATION OF STRUCTURAL PARAMETERS OF MDOF STRUCTURE BY WAVELET TRANSFORM

曾根 彰*, 山本 鎮男**, 増田 新***

Akira SONE, Shizuo YAMAMOTO and Arata MASUDA

The method to identify structural parameters of multi-degree of freedom structures by the wavelet transform of the input and responses is presented. For the input of a white noise, the stiffness matrices and damping matrices for two-degree-of-freedom structure, five-degree-of-freedom structure and simply supported beam modelled by finite elements are tried to be identified and it is proven that the proposed method can be used to detect the change of structural parameters with enough accuracy.

Keywords: Identification, Wavelet Transform, Structural Parameter, MDOF Structure, Mexican Hat

同定, ウェーブレット変換, 構造パラメータ, 多自由度構造物, メキシカンハット

1. 緒言

建築物, 構造物は地震などの動荷重をうけて損傷劣化する。損傷が発生すると系の動特性, すなわち固有振動数や減衰等が変化する。一般的には, 系の固有振動数が低下し, 減衰が増加するが, これらの変化を捉えることができれば, 構造物の劣化の程度を判定することができ, 構造物のヘルスマonitoringが可能となる。これまで, 著者らは, ヘルスマonitoringシステムとして, 各種構造物が動的荷重を受けて疲労して損傷する場合に, その損傷の度合をウェーブレット変換を用いて分析するシステムを提案した¹⁾。さらに, この手法の応用として, 強震記録のウェーブレット変換により履歴復元力特性を有する建築物の累積損傷を推定する手法を示した²⁾。

構造物の動特性の同定する手法に関しては以前から多くの研究者によって検討されてきた^{3), 4)}。これらは, モードの固有振動数, 減衰定数, 固有モード等のモーダルパラメータを同定する方法と, 直接質量, 剛性, 減衰のような物理量(構造物パラメータ)を同定する方法に分けられる。さらに, 同定手法は, 周波数領域で行うものと時間領域で行うものとに大別される。このような同定手法が構造物のヘルスマonitoringに応用されている。例えば, 地震動を受け損傷した構造物のヘルスマonitoringに関しては, 時間領域で剛性や減衰などの構造パラメータを同定し, それらの変化により損傷を

推定している研究がある⁵⁾。さらに, モーダルパラメータからトラサ状の構造物の損傷検出を行った研究も見られている⁶⁾。最近では, ニューラルネットワークを用いて構造パラメータの変化を検出する方法も検討されている⁷⁾。

著者らは, パラメトリックなシステム同定, すなわち構造パラメータの変化の様子を捉えるのに, 時間一周波数解析の可能なウェーブレット解析を用いた手法を提案している。既報⁸⁾では, 構造物として1質点系を取り上げて, 常時微動の入力と出力のウェーブレット変換により, 構造物の動特性(固有周期と減衰)を同定する手法を示し, その有効性を明かにした。本同定手法は, 速度応答, 加速度応答を計測しなくても変位応答の計測のみで, 構造パラメータが算出されるという特徴を持つ。これは, 系の運動方程式の両辺をウェーブレット変換すると, 微分項のウェーブレット変換はウェーブレットの微分と変位との積の形になることを利用したものである。したがって, もとの微分方程式は代数方程式として取り扱いが可能となり, 構造パラメータが最小2乗法を用いて同定される。これらのことは窓フーリエ変換を用いても同じ手法がとれるが, パラメータが変化したとき, その変化する位置が窓フーリエの窓枠と一致していなくてはならない。パラメータの変化位置は予めわからないので窓フーリエ変換を用いた場合に, これを試行錯誤によって探さな

* 京都工芸繊維大学工芸学部機械システム工学科 助教授・工博

** 京都工芸繊維大学工芸学部機械システム工学科 教授・工博

*** 京都工芸繊維大学工芸学部機械システム工学科 助手

Assoc. Prof., Dept. of Mechanical and System Engineering, Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Mechanical and System Engineering, Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, Dr. Eng.

Assistant, Dept. of Mechanical and System Engineering, Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology

くてはならない。したがって、本論文で提案したようにウェーブレット変換を用いる有意性がある。

本論文では、2質点系モデル、5質点系モデル、さらには橋梁をイメージした両端単純支持はりの有限要素モデルを用いて、数値シミュレーションを行い、上述の同定手法の有効性を検証した。

2. ウェーブレット変換による構造パラメータの同定手法

最初に、構造物への入力とその出力のウェーブレット変換により系の構造パラメータを同定する方法を以下に示す。なお、同定する系として、多自由度系を考える。N自由度系の運動方程式は次式になる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Q \quad (1)$$

ここで、 M , C , K はそれぞれ質量行列、減衰行列、剛性行列を表す。 x と Q は変位ベクトルと入力ベクトルである。これらの構造パラメータを含む特性行列の成分をウェーブレット変換によって求めることを考える。まず、最初に関数 $x(t)$ の連続ウェーブレット変換は次式で与えられる⁹⁾。

$$(wx)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2)$$

$a \neq 0$, b は共に実数であり、それぞれスケール変換とシフト変換を表すパラメータである。 $\psi(t)$ は、2乗可積分関数でアナライジングウェーブレットであり、また $\overline{\psi(t)}$ は $\psi(t)$ の複素共役を表す。一方、ウェーブレットがコンパクトサポートであるという性質より、ウェーブレット変換に部分積分を適用すると応答の n 階微分 $x^{(n)}$ のウェーブレット変換は次のように表される¹⁰⁾。

$$(wx^{(n)})(a, b) = (-1)^n \frac{1}{a^n \sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}\left(\frac{t-b}{a}\right) x(t) dt \quad (3)$$

$a, b = a=2^j, b=2^k$ と離散化したとき、式(1)のウェーブレット変換の m 行目の成分は、内積表示により次式になる。

$$\sum_n m_{mn} \langle \psi_{j,k}^{(2)}, x_n(t) \rangle + \sum_n c_{mn} \langle \psi_{j,k}^{(1)}, x_n(t) \rangle + \sum_n k_{mn} \langle \psi_{j,k}, x_n(t) \rangle = \langle \psi_{j,k}, Q_m(t) \rangle \quad (4)$$

ただし、

$$\psi_{j,k}^{(n)} = 2^{-nj} 2^{j/2} \psi^{(n)}(2^j t - k) \quad (5)$$

ここで、 $\psi_{j,k}^{(n)}$ はウェーブレット $\psi_{j,k}$ の n 階微分を表す。 Q_m は入力の m 番目の成分を表し、 m_{mn}, c_{mn}, k_{mn} は同定するパラメータを表す。式(4)からわかるように、微分項のウェーブレット変換は、ウェーブレットの微分と変位との内積として表わされる。したがって、速度応答、加速度応答を計測しなくても変位応答の計測のみで、構造パラメータの諸量の関連が表わされる。これらの係数の推定値を $\tilde{m}_{mn}, \tilde{c}_{mn}, \tilde{k}_{mn}$ とし、式(4)を式誤差 $e(t)$ を含む式で表わすと次のよ

うになる^{8), 10)}。

$$\sum_n \tilde{m}_{mn} \langle \psi_{j,k}^{(2)}, x_n(t) \rangle + \sum_n \tilde{c}_{mn} \langle \psi_{j,k}^{(1)}, x_n(t) \rangle + \sum_n \tilde{k}_{mn} \langle \psi_{j,k}, x_n(t) \rangle - \langle \psi_{j,k}, Q_m(t) \rangle = \langle \psi_{j,k}, e(t) \rangle \quad (6)$$

本研究では、式(6)の右辺の式誤差 $e(t)$ のウェーブレット変換の2乗を最小とするように式(6)の構造パラメータ($\tilde{m}_{mn}, \tilde{c}_{mn}, \tilde{k}_{mn}$)を同定する。具体的には、構造パラメータの同定の評価規範としては、次式の離散化した値を用いた。

$$J = \sum_i \sum_k \langle \psi_{j,k}, e(t) \rangle^2 \quad (7)$$

本研究では、アナライジングウェーブレットとして、ガウス関数を2回微分したラブラシアンガウシアン関数(Mexican hat)を用いる。すなわち、

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (8)$$

このアナライジングウェーブレット $\psi(t)$ は、時間空間、周波数空間共に局在し、解析的に微分可能である。図1にこの波形を示す。

3. シミュレーション結果

本研究では、2質点系モデル、5質点系モデル、さらには両端単純支持はりの有限要素モデルを用いて、数値シミュレーションを行い、本手法の検証を行った。以下にその結果を示す。

(1) 2質点系の場合

ここでは、図2の2質点系モデルのシミュレーション結果を示す。入力 $q(t)$ は上部質量 m_1 に作用するものとする。ここで、入力 $q(t)$ 、応答 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ を観測する。まず、図2の入力 $q(t)$ をサンプリング時間間隔 $\Delta t = 0.125(s)$ で、データ数 $n = 1024$ で作成した白色雑音とする。これを入力として変位応答 $x_1(t)$, $x_2(t)$ をRunge-Kutta-Gill法により数値積分して求めた。系のパラメータの値として、 $m_1 = m_2 = 1.0 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = 9.87 \text{ N/m}$, $c_1 = c_2 = 0.314 \text{ Ns/m}$ を与えた。ただし、系の劣化を考慮して時刻 $t = 64s$ で剛性 k_2 と減衰係数 c_2 が10%低下すると仮定する。

図3に、入力 $q(t)$ と変位応答 $x_2(t)$ の例を示す。この入力 $q(t)$ と応答 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を観測値として、これよりパラメータの値を式(7)の規範を最小にするように同定した。表1にその同定結果を示す。ただ

図1 Mexican hat

図2 質点系モデル

(a) $q(t)$ (b) $x_2(t)$

図3 入力と変位応答波形例

表1 同定結果(2質点系モデル、損傷有)

Parameter	Exact Value	Identified Value
$k_1(0-64s)$	9.87	9.89
$k_2(0-64s)$	9.87	9.88
$c_1(0-64s)$	0.314	0.314
$c_2(0-64s)$	0.314	0.314
$k_1(64-128s)$	9.87	9.87
$k_2(64-128s)$	8.88	8.89
$c_1(64-128s)$	0.314	0.314
$c_2(64-128s)$	0.283	0.289

し、これらの数値計算において、スケールパラメータ j は各固有周期を含むように設定し、高い周波数はカットした。表で、上部が0から64sまでの結果で、下部が64sから128sまでの結果を示す。

まず、剛性を見ると、推定値の誤差が最大約0.2%以下であり、かなり良い精度で同定されていることがわかる。一方、減衰係数については、減衰係数は変化した場合で最大約2.2%の同定誤差が見られる。これらの結果より、ウェーブレット変換を用いたシステムパラメータの同定が有効であることがわかった。さらに、システムパラメータが変化しても精度よい同定結果が得られることが検証された。

次に、1次固有周期が0.2秒～1.0秒程度の範囲、減衰定数が1%～5%程度の範囲から5ケースを選び、標準的な2層建物への適用性を検討した。その結果を表2～表6に示す。入力 $q(t)$ をサンプリング時間間隔 $\Delta t = 0.01(s)$ で、データ数 $n = 1024$ で作成した白色雑音とする。さらに、 $m_1 = m_2 = 1.0kg$ であり、剛性と減衰係数は変化させていない。これらの表から、剛性の推定誤差が最大で約1.4%以下、減衰係数の推定誤差が最大で約4.2%以下であることがわかり、本手法の適用性が確認された。しかし、誤差は1次固有周期とサンプリング周期が近いほど大きくなっているため、同定精度を上げるためには適切な

表2 同定結果(2質点系モデル、損傷無、その1)

Parameter	Exact Value	Identified Value
k_1	2500	2520
k_2	2500	2534
c_1	1.62	1.65
c_2	1.62	1.64

表3 同定結果(2質点系モデル、損傷無、その2)

Parameter	Exact Value	Identified Value
k_1	660	655
k_2	660	651
c_1	1.66	1.73
c_2	1.66	1.70

表4 同定結果(2質点系モデル、損傷無、その3)

Parameter	Exact Value	Identified Value
k_1	280	281
k_2	280	281
c_1	1.62	1.62
c_2	1.62	1.62

表5 同定結果(2質点系モデル、損傷無、その4)

Parameter	Exact Value	Identified Value
k_1	160	161
k_2	160	161
c_1	1.64	1.65
c_2	1.64	1.65

表6 同定結果(2質点系モデル、損傷無、その5)

Parameter	Exact Value	Identified Value
k_1	100	100
k_2	100	100
c_1	1.62	1.62
c_2	1.62	1.61

図4 5質点系モデル

図5 変位応答波形例

サンプリング周期が必要である。

(2) 5質点系の場合

ここでは、図4の5質点系モデルのシミュレーション結果を示す。このモデルでも、入力 $q(t)$ は上部質量 m_1 に作用するものとする。ここで、入力 $q(t)$ 、応答 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 、 $x_4(t)$ 、 $x_5(t)$ を観測する。まず、入力 $q(t)$ は上記と同様の白色雑音で、サンプリング時間間隔 $\Delta t = 0.125(s)$ 、データ数 $n = 1024$ である。これを入力として各変位応答は数値積分して求めた。系のパラメータの値として、 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1.0 \text{ kg}$ 、 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 9.87 \text{ N/m}$ 、 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0.314 \text{ Ns/m}$ を与えた。ただし、系の劣化を考慮して時刻 $t = 64 \text{ s}$ で k_3 が10%減少し、

表7 同定結果 (5質点系、損傷有)

Parameter	Exact Value	Identified Value
$k_1(0-64s)$	9.87	9.87
$k_2(0-64s)$	9.87	9.87
$k_3(0-64s)$	9.87	9.88
$k_4(0-64s)$	9.87	9.86
$k_5(0-64s)$	9.87	9.87
$c_1(0-64s)$	0.314	0.314
$c_2(0-64s)$	0.314	0.314
$c_3(0-64s)$	0.314	0.314
$c_4(0-64s)$	0.314	0.316
$c_5(0-64s)$	0.314	0.314
$k_1(64-128s)$	9.87	9.87
$k_2(64-128s)$	9.87	9.87
$k_3(64-128s)$	8.88	8.89
$k_4(64-128s)$	9.87	9.91
$k_5(64-128s)$	9.87	9.87
$c_1(64-128s)$	0.314	0.316
$c_2(64-128s)$	0.314	0.324
$c_3(64-128s)$	0.345	0.364
$c_4(64-128s)$	0.314	0.319
$c_5(64-128s)$	0.314	0.314

c_3 が10%増加すると仮定した。

図5に、変位応答 $x_3(t)$ の例を示す。入力と応答を観測値として、これらよりパラメータの値を式(7)の規範を最小にするように同定し、表7にその結果を示す。表で、上部が0から64sまでの結果で、下部が64sから128sまでの結果を示す。まず、剛性を見ると、推定値の誤差が最大約0.4%以下であり、かなり良い精度で同定されていることがわかる。一方、減衰係数については、減衰係数が変化した場合で最大約5.6%の同定誤差が見られる。これらの結果より、若干減衰係数の同定精度が悪いが、系の自由度が大きくなってウェーブレット変換を用いたシステムパラメータの同定が有効であることがわかった。

次に、実際の建物に対する適用性をみるために、第1層から上層に向かって剛性が低下するケースを2例選り検討し、その結果を表8と表9に示す。入力 $q(t)$ は白色雑音で、サンプリング時間間隔 $\Delta t = 0.125(s)$ 、データ数 $n = 1024$ である。さらに、 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1.0 \text{ kg}$ であり、剛性と減衰係数は変化させていない。これらの表から、剛性の推定誤差が最大で約5.8%以下、減衰係数の推定誤差が最大で約6.4%以下であることがわかり、本手法の適用性が確認された。

(3) 両端単純支持はりの場合

以下では、両端単純支持はりモデルのシミュレーション結果を示す。まず、やはり図6に示すように5分割の有限要素モデルを用いる。ここで、各要素の剛性行列は式(9)に示す曲げはりの剛性行列を用いる¹¹⁾。ただし、 E はヤング率、 I_k は断面二次モーメント、 l は要素の長さである。 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 、 $l = 5 \text{ m}$ 、さらにははりの断面積 $A = 0.25 \text{ m}^2$ 、密度 $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ と設定する。なお、やはりは正方形断面とする。また、簡単のため質量行列は集中質量行列を用いる。

一方、図6に示す入力 $q(t)$ をサンプリング時間間隔 $\Delta t = 2^{-10}(s)$ で、

表8 同定結果 (5質点系、損傷無、その1)

Parameter	Exact Value	Identified Value
k_1	8.80	8.44
k_2	9.10	8.99
k_3	9.40	9.02
k_4	9.70	9.53
k_5	10.0	10.0
c_1	0.314	0.326
c_2	0.314	0.334
c_3	0.314	0.331
c_4	0.314	0.307
c_5	0.314	0.306

表9 同定結果 (5質点系、損傷無、その2)

Parameter	Exact Value	Identified Value
k_1	8.00	8.46
k_2	8.50	8.83
k_3	9.00	9.25
k_4	9.50	9.73
k_5	10.0	10.0
c_1	0.314	0.340
c_2	0.314	0.347
c_3	0.314	0.337
c_4	0.314	0.304
c_5	0.314	0.304

図6 両端単純支持はりモデル

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{xx}}{l^3} & & & & \\ \frac{6EI_{xx}}{l^2} & \frac{4EI_{xx}}{l} & & & \\ -\frac{12EI_{xx}}{l^3} & -\frac{6EI_{xx}}{l^2} & \frac{12EI_{xx}}{l^3} & & \\ \frac{6EI_{xx}}{l^2} & \frac{2EI_{xx}}{l} & -\frac{6EI_{xx}}{l^2} & \frac{4EI_{xx}}{l} & \\ & & & & \text{SYM.} \end{bmatrix} \quad (9)$$

データ数 $n=4096$ で作成した白色雑音とする。これを入力として系の応答を数値積分して求めた。ただし、時間 $t=2s$ で要素4 (斜線部)の断面2次モーメント I_{xx} が10%低下すると仮定する。なお、このモデルでは、減衰は零としている。

図7に、入力 $q(t)$ と、要素3と要素4の間の接点の変位応答 $x(t)$ の

図7 入力 $q(t)$ と変位応答 $x(t)$ の波形例 図8 変位応答 $x(t)$ のウェーブレット展開係数表10 I_{xx} の同定結果($l=5m$)

Time	Exact Value	Identified Value	Error(%)
$t=0-2s$	$5.208 \times 10^{-3} (m^4)$	$5.207 \times 10^{-3} (m^4)$	0.04
$t=2-4s$	$4.688 \times 10^{-3} (m^4)$	$4.674 \times 10^{-3} (m^4)$	0.28

表11 I_{xx} の同定結果($l=1.2m, 0.6m$)

l	Exact Value	Identified Value	Error(%)
1.2(m)	$5.208 \times 10^{-3} (m^4)$	$5.146 \times 10^{-3} (m^4)$	1.20
0.6(m)	$5.208 \times 10^{-3} (m^4)$	$5.169 \times 10^{-3} (m^4)$	0.75

例を示す。また、剛性の不連続性を調べるために、Daubechiesのウェーブレットを用いてこの応答 $x(t)$ をウェーブレット変換して、展開係数を求めたものを図8に示す。この図より、明かに $t=2s$ で不連続を示すパルス状の波形が現われ、剛性の不連続点が発見された。

次に、入力 $q(t)$ と各接点(1)から(6)の変位応答を観測値として、質量行列と剛性行列の要素の値を同定した。この値によって、はりの

断面2次モーメント I_{xx} を求めた。 $t=0-2s$ と $t=2-4s$ における I_{xx} の設定値とウェーブレット変換によって同定した値、およびその誤差を表10に示す。なお、断面2次モーメントの同定値は、同定した剛性行列の要素の平均値から算出した。 $t=0-2s$ と $t=2-4s$ における断面2次モーメントの設定値と同定値の誤差は、それぞれ0.04%と0.28%であり、これより本手法の有効性が検証された。

さらに、建築の梁スパンに対する適用性をみるために、 $l=1.2m$ 、 $0.6m$ の2ケースを検討し、その結果を表11に示す。この表の結果より、推定誤差が小さく得られ、本手法の適用性が明かとなった。

4. 結言

本論文では、入力信号と応答信号のウェーブレット変換を用いて系の構造パラメータを同定した。その結果、Mexican hatのウェーブレットによって良好に推定できることがわかった。さらに、剛性や減衰低下をも同定可能であることもわかった。したがって、本手法を構造物のヘルスマonitoringに適用することが可能である。最後に、ウェーブレット変換はフーリエ変換に比べて周波数分解能が悪いという欠点がある。しかしながら、同定精度は、データのサンプリング時間に依存するので、ウェーブレット変換の欠点を克服するためには適切なサンプリング時間を設定する必要がある。この点については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) 曾根彰ほか4名：ウェーブレット変換を用いた機械・構造物のヘルスマonitoringシステム（正規直交ウェーブレットの生成と断続的異常信号の検出）、日本機械学会論文集C編、第61巻、第586号、pp.2340~2346、1995年6月。
- 2) 曾根彰ほか4名：強震記録のウェーブレット解析による履歴復元力特性を有する建築物の累積損傷の推定、日本建築学会構造系論文集、第476号、pp.67~74、1995年10月。
- 3) Beck J. L. and Jennings P. C. : Structural Identification using Linear Models and Earthquake Engineering Records, Int. J. Earthquake Engrg. and Struct. Dynamics, Vol. 8, No.2, pp.145~160, 1980.
- 4) Shinozuka M. Yun C. B. and Imai H. : Identification of Linear Structural Dynamic System, J. of Engrg. Mech. Div. , ASCE, Vol.108, No.6, pp.1371~1390, 1982.
- 5) Aghabian M.S. , et al. : A System Identification Approach to the Detection of Structural Changes, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.117, No.2, pp.370~390, 1990.
- 6) Liu P. L. : Identification and Damage Detection of Trusses using Modal Data, J. of Structural Engineering, ASCE, Vol.121, No.4, pp.599~608, 1995.
- 7) Masri R., et al. : Neural Network Approach to Detection of Changes in Structural Parameters, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.122, No.4, pp.370~390, 1996.
- 8) 曾根彰ほか3名：常時微動と強震記録のウェーブレット解析による構造物の動特性推定とその変化の推定、日本建築学会構造系論文集、第490号、pp.65~72、1996年12月。
- 9) Daubechies I. : Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, SIAM Publ., 1992.
- 10) 田原鉄也、新誠一、北森俊行：ウェーブレット変換に基づく伝達関数の係数推定、計測自動制御学会第22回制御理論シンポジウム論文集、pp.231~234、1993年5月。
- 11) ピルキー W. D. 岡田養二：機械振動とマトリクス解析法、コロナ社、1989年7月。

(1997年9月4日原稿受理、1998年8月21日採用決定)