二軸対称断面を有する空間片持梁-柱の定常状態限界

THE STEADY-STATE LIMITS OF SPACE CANTILEVER BEAM-COLUMNS WITH A BIAXIAL-SYMMETRICAL CROSS-SECTION

梈井 健*, 上谷 宏二**
Takeshi MASUI and Koji UETANI

A finite element analysis method is proposed for predicting the steady-state limit of a cantilever beam-column whose cross-section is symmetrical with respect to two orthogonal axes in a 3D space. The beam-column is subjected to an idealized completely reversed tip-deflection cycling program with continuously increasing amplitude under a constant axial load. Firstly, an analysis method is presented for tracing the steady-state path of the beam-column. Secondly, the steady-state limit of a tip deflection amplitude is found as a limit point of a steady-state path. Finally, the steady-state limits are verified through finite element analyses of hysteretic responses of beam-columns.

Keywords : *beam-columns, cyclic bending, out-of-plane deformation, steady-state limit, finite element method*

梁-柱, 繰り返し曲げ, 構面外変形, 定常状態限界, 有限要素法

1. 序

構面に関して対称な形状を持つ梁-柱に、圧縮軸力を作用させた状態で繰り返し曲げを与えると、古典理論により予測される横座屈振幅¹⁾よりも遥かに小さい曲げ振幅の下で、構面外変形が発生する。この現象が実際に起こりうることは、H形鋼及び角形鋼管の梁-柱供試体を用いた一定振幅、あるいは段階的漸増振幅の繰り返し曲げ実験によって実証されている^{2,3)}。

横座屈条件が満足される以前の段階で構面外変形が現われることは、釣合経路の分岐条件に基づく古典座屈理論の範囲では説明が付けられないが、剛体と弾塑性ばねで構成された3自由度単純モデルの履歴挙動を解析的方法で検討することにより、繰り返し載荷の下で構面外変形が現われるメカニズムと発生条件が解明されている⁴⁾。

一定圧縮軸力の作用下で連続的振幅漸増繰り返し曲げを受ける片持梁-柱の挙動においても、載荷構面外への変形が初めて生じる臨界点が存在し、これを構面内挙動限界と呼ぶ。繰り返し載荷振幅の増加に連れて連続的に生じる定常状態の変化を定常状態経路という概念を用いて表すと、構面内挙動限界は定常状態経路の分岐点となる。筆者等は、三次元空間内での弾塑性大たわみ挙動を精密に取り扱える梁-柱有限要素法を提案し、これを用いて任意断面形状を持つ梁-柱の構面内挙動限界を必要とされる精度で予測しうる解析法を展開している⁵⁾。

分岐後の定常状態経路が載荷振幅の増加を伴う場合、繰り返し載荷振幅が構面内挙動限界値を越えた後も梁-柱はなお定常状態を呈し続け、この過程で、定常状態に含まれる構面外変形成分

は載荷振幅の増加に連れて増大する。やがて載荷振幅が第2の限界値に達すると、挙動はもはや定常状態に収束せず、変形が載荷サイクル毎に限りなく累積して崩壊に至る現象が現われる。この終局的限界点は定常状態限界⁶⁻⁸⁾と呼ばれ、載荷振幅が極大値をとる定常状態経路の極限点として特徴付けられる。

本研究では、完全両振り繰り返し曲げを受ける二軸対称断面梁-柱を対象とし、定常状態限界を求めるための解析法を提示する。梁-柱の離散モデル化には文献5)で提案した有限要素法を用い、解析法の核となる定常状態変化率方程式を誘導する。定常状態変化率方程式に基づく増分解析を行なって定常状態経路を追跡し、その極限点として定常状態限界を求める。

この問題では一般に、定常状態限界に至るまでの段階で定常状態経路が分岐を経験する。構面内挙動限界がこの分岐点となる場合もあるが、定常状態が構面に直交する平面に関して対称性を失う臨界点である対称限界が分岐点となる場合もあり得る。分岐前経路上における定常状態変化率方程式を分析することにより、分岐解の構造を明らかにする。

解析例として、強軸方向に繰り返し曲げを受けるH形鋼片持梁-柱を取り上げ、定常状態経路の追跡を行ない、定常状態限界を予測する。予測限界値前後の振幅レベルで、一定振幅繰り返し載荷を与えたときの全履歴挙動を追跡する解析を行ない、本解析法の妥当性を検証する。

2. 複合非線形解析のための有限要素方程式

定常状態経路解析法を展開するためには、高精度の立体骨組部材の複合非線形解析法が必要となる。立体骨組の複合非線形解

本論文の一部は文献15~17)に発表している。

* 関西大学工学部建築学科 助手・工修

** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・工博

Research Assoc., Dept. of Architecture, Kansai Univ., M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Kyoto Univ., Dr. Eng.

析法については、すでにいくつかの解析法が提案されているが^{9,10)}、本論文では、有限要素法を用いた立体骨組部材の複合非線形解析法⁵⁾に基づく定式化を行う。この解析法は、以下に示す仮定に従う。

- 部材断面の面内形状は変形前後において不変であり、面内の変形は生じない。
- Timoshenko 梁理論に従う変形と、材軸回りのねじれ変形を考慮する。ねじれに伴う断面のそり(断面の面外ゆがみ)は、一様断面弾性梁の均等ねじれに対する St.Venant のねじれ理論により求まるそり関数と、材軸に沿って変化するねじれ率との積で与えられるものとする¹¹⁾。
- 有限変位、有限回転角を考慮するが、ひずみは微小である。
- せん断応力と軸方向応力との連成は考慮せず、材料はそれぞれ独立した応力-ひずみ関係に従う。

基礎方程式を、以下の方針に従って導出する。

- 空間固定の直交デカルト座標系 $X-Y-Z$ (固定座標系)を考え、初期状態において材軸が Z 軸に一致するよう部材を配置する。
- 部材は材軸方向に直列に並ぶ有限要素により構成される(図7)。要素両端面の図心に節点(P点、Q点)をとる。
- 部材の変形に伴って移動、回転する直交座標系 $x-y-z$ (要素移動座標系)を各要素ごとに配置する。P点を原点とし、P-Qを通る直線を z 軸とする。また、P点を含む有限要素端面内の任意の点の (x, y) 座標値は常に一定であるように座標系をとる(図1)。
- 各要素は三角柱領域に分割され(図8)、応力およびひずみ状態をその重心点で評価する。
- 応力、ひずみは、軸方向ひずみおよび2個のせん断ひずみからなるひずみベクトル $\epsilon^T = [\epsilon \ \gamma_{zx} \ \gamma_{zy}]$ と、それに対応する応力ベクトル $\sigma^T = [\sigma \ \tau_{zx} \ \tau_{zy}]$ で記述される。両者の関係は、せん断成分についてはそれぞれ常に線形弾性を保ち、軸方向成分のみ塑性変形を考慮し、引張側を正とするバイリニアひずみ硬化則(図2)に従うものとする。
- 要素内のひずみ-変位関係式は線形関係にあるものとする。

x, y, z 軸方向変位 $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ は、材軸線変位 $u_0(z), v_0(z), w_0(z)$ と、 x, y 軸回りのせん断変形角 $\phi_x(z), \phi_y(z)$ および z 軸回りのねじれ回転角 $\theta_0(z)$ を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - y\theta_0 \\ v(x, y, z) &= v_0 + x\theta_0 \\ w(x, y, z) &= w_0 - x(u_{0,z} + \phi_y) \\ &\quad - y(v_{0,z} + \phi_x) + \theta_{0,z} \omega(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\omega(x, y)$ は St.Venant ねじれに伴うそり関数、 $(\)_{,z}$ は z による微分を表す。 $w_0(z), \phi_x(z), \phi_y(z)$ をそれぞれ1次式によって近似し、 $u_0(z), v_0(z), \theta_0(z)$ をそれぞれ3次式によって

図1 固定座標系と要素移動座標系

図2 応力-ひずみ関係

近似する。 x, y 軸回りの断面のせん断変形角とたわみ角に関しては、文献12)で示された縮約法を用いて境界条件を厳密に取り扱っており、両者の値に力学的な矛盾は生じない。

節点変位ベクトル $\mathbf{U}$ は次式で表される^{注1)}。

$$\mathbf{U}^T = [U_P \ W_P \ \Theta_{yP} \ V_P \ \Theta_{xP} \ \Theta_{zP} \ \alpha_P \ U_Q \ W_Q \ \Theta_{yQ} \ V_Q \ \Theta_{xQ} \ \Theta_{zQ} \ \alpha_Q] \quad (2)$$

ここに、 U, V, W は X, Y, Z 軸方向の変位を表す。 $\Theta_z, \Theta_x, \Theta_y$ は回転変位を表し、初期状態から Z, X, Y 軸回りにその順番で回転して現状態に至るために必要な回転量として定義される⁵⁾。 α は z 軸回りの回転率を表す。

節点力ベクトル $\mathbf{F}$ は次式で表される。

$$\mathbf{F}^T = [F_{xP} \ F_{zP} \ M_{yP} \ F_{yP} \ M_{xP} \ M_{zP} \ B_P \ F_{xQ} \ F_{zQ} \ M_{yQ} \ F_{yQ} \ M_{xQ} \ M_{zQ} \ B_Q] \quad (3)$$

ここに、 F はそれぞれの座標方向の力、 M はそれぞれの座標軸まわりのモーメント、 B はバイモーメントを表す。

式(3)の節点力ベクトルが仕事をする相手として対応する仮想変位ベクトルを次式で表す⁵⁾。

$$\delta \hat{\mathbf{U}}^T = [\delta U_P \ \delta W_P \ \delta \hat{\Theta}_{yP} \ \delta V_P \ \delta \hat{\Theta}_{xP} \ \delta \hat{\Theta}_{zP} \ \delta \alpha_P \ \delta U_Q \ \delta W_Q \ \delta \hat{\Theta}_{yQ} \ \delta V_Q \ \delta \hat{\Theta}_{xQ} \ \delta \hat{\Theta}_{zQ} \ \delta \alpha_Q] \quad (4)$$

ここに、 $\delta \hat{\Theta}_x, \delta \hat{\Theta}_y, \delta \hat{\Theta}_z$ は、現状態からの固定座標軸回りの回転角についての仮想回転変位である。

要素が節点力 $\mathbf{F}$ の作用下で釣り合っているとき、次の仮想仕事式が成立する。

$$\delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} = \int_0^l \int_a \delta \epsilon^T \boldsymbol{\sigma} da dl \quad (5)$$

ここに、 l は要素長、 a は断面積を表す。

3. 定常状態経路解析法

3.1 基本概念と基本方針

幾何学的形状および力学的性質が $X-Z$ 平面および $Y-Z$ 平面に関して対称性を有する片持梁-柱モデルを解析対象とする。この二つの対称面をそれぞれ構面および直交対称面と呼ぶ(図3)。

載荷は以下の通りである。

- 0 から連続的に単調増加する振幅パラメータ Ψ を定め、その各振幅レベルで同一振幅の繰り返し載荷を定常状態に収束するまで行う強制変位載荷プログラム COIDA を定義する(図4)。
- 片持梁-柱頂点に一定鉛直荷重 N を作用させる。
- 片持梁-柱頂点に、COIDA に従う片側振幅 Ψ の X 方向変位 U_T を作用させる。以下、この U_T を制御変位と呼ぶ。なお、頂点の Y, Z 方向の変位成分および X, Y, Z 軸回りの回転変位成分は自由とする。

図3 二軸対称断面片持梁-柱の構面外変形発生挙動

図4 COIDA program

ここで、応力、ひずみ状態の定常応答に関して、次の仮定⁵⁻⁷⁾を導入する。

仮定1:「ひずみ進行方向の反転が生じるのは、制御変位の進行方向が反転する瞬間のみである。」

$U_T = \Psi$ の反転時状態を Γ^I 状態、 $U_T = -\Psi$ の反転時状態を Γ^{II} 状態と呼ぶ。仮定1より、1個の定常状態は、これら一対の反転時状態によって一意に表される。以下では Γ^I および Γ^{II} 状態に属する状態量を右上添字 I, II を用いて表す。

本論文で用いる基本概念を以下に示す。

構面内定常状態: 初期状態において構面に関して互いに対称な位置にある任意の2点における全ての状態量が、常に構面に関して対称である定常状態。

構面外定常状態: 構面内定常状態以外の定常状態。すなわち、構面に関する対称性を有さない定常状態。

対称定常状態: Γ^I 状態と Γ^{II} 状態が、直交対称面に関して互いに対称である定常状態。

非対称定常状態: 対称定常状態以外の定常状態。すなわち、直交対称面に関する対称性を有さない定常状態。

構面内挙動限界: 構面内定常状態から構面外定常状態への移行が初めて生じる臨界点。

対称限界: 対称定常状態から非対称定常状態への移行が初めて生じる臨界点。

定常状態限界: いかなる定常状態にも収束しなくなり、変形の発散が初めて生じる臨界点。

定常状態限界解を求める基本方針を以下に示す。

- 1) 制御変位振幅 Ψ の変化に伴って、梁-柱の定常状態は連続的に変化する。定常状態変数である反転時節点変位および節点力について、それらの Ψ に対する変化率の関係式を導く。

図5 応力-ひずみ状態点の定常状態周期挙動

- 2) 各定常状態変数について、構面内対称成分、構面内逆対称成分、構面外対称成分および構面外逆対称成分の4成分を定義する。これに対応して、1)で求めた式をこの4成分についての方程式に変換する。構面内対称定常状態においては、変換された方程式が、これら4成分の連成項を含まず、それぞれの成分だけを単独に含む4種類の独立した式で表されることが証明される。

- 3) 構面内対称成分についての変化率方程式を用いた増分型解析法により構面内対称定常状態を逐次追跡する^{注2)}。

- 4) 構面内対称成分以外の3成分に関する変化率方程式は全て斉次方程式となる。構面内対称定常状態経路上において、各方程式が非0解を初めて持ちうる条件より、3種類の境界解がそれぞれ得られる。これらは、対称限界解と2種類の構面内挙動限界解として特徴づけられる。

以下、構面内挙動限界に早期に至る場合について述べる。

- 5) 構面内挙動限界点は定常状態経路の分岐点であり、構面内挙動限界点後の分岐経路の方向を分岐モード解析により求める。 Ψ が減少する方向に分岐経路が存在する場合、構面内挙動限界点はただちに定常状態限界点となる。
- 6) Ψ が増加する方向に分岐経路が存在する場合、引続き分岐後経路解析を行うことができる。定常状態限界は定常状態経路の極限点として得られる。これを求めるには、通常の釣合経路の極限点を求める場合と類似の方法をとる。すなわち、増分解析によって定常状態経路を追跡し、 Ψ が極大値をとる点を求める。

3.2 定常状態変化率方程式

梁-柱が定常状態にあるとき、梁-柱内の全ての微小要素での応力-ひずみ状態点は周期挙動を呈する。この周期挙動の分類を図5に示す。図中、○印および□印はそれぞれ次に示す応力-ひずみ状態点を表す。

- a) 制御変位進行方向の符号とひずみ進行方向の符号が一致する場合
○: Γ^I 状態、□: Γ^{II} 状態
- b) 制御変位進行方向の符号とひずみ進行方向の符号が反対の場合
○: Γ^{II} 状態、□: Γ^I 状態

反転時応力変化率 $\dot{\sigma}^I, \dot{\sigma}^{II}$ とひずみ変化率 $\dot{\epsilon}^I, \dot{\epsilon}^{II}$ の関係は次式で表される。

$$\dot{\sigma}^I = \tilde{D}_{11}\dot{\epsilon}^I + \tilde{D}_{12}\dot{\epsilon}^{II}, \quad \dot{\sigma}^{II} = \tilde{D}_{21}\dot{\epsilon}^I + \tilde{D}_{22}\dot{\epsilon}^{II} \quad (6)$$

表1 応力変化率-ひずみ変化率関係式の係数

Type	$\tilde{D}_{11}$	$\tilde{D}_{12}$	$\tilde{D}_{21}$	$\tilde{D}_{22}$
$E \rightarrow E$	E	0	0	E
$T \rightarrow T$	E_t	0	$E_t - E$	E
$T \rightarrow U$	E	0	0	E
$C \rightarrow C$	E	$E_t - E$	0	E_t
$C \rightarrow U$	E	0	0	E
$P \rightarrow P$	E_t	0	0	E_t

ここに、 $(\cdot) = d(\cdot)/d\Psi$ 。係数 $\tilde{D}$ は表1に示すように、現状態からの周期挙動の状態変化パターンに応じて決定される。式(6)はa)の場合に適用され、b)の場合は、 I と II を入れ換えた式が適用される。

ひずみ-要素内変位関係式、要素内変位-節点変位関係式および節点変位-付加節点変位関係式を考慮して式(5)の Ψ に関する増分型の仮想仕事式を求め、得られた式に式(6)を代入することにより、定常状態変化率方程式が次式のように得られる⁵⁾。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^I \\ \dot{\mathbf{F}}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^I \\ \dot{\mathbf{U}}^{II} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

3.3 定常状態変化率方程式の分離

Γ^I 状態、 Γ^{II} 状態に関わらず、 U, W, Θ_Y は構面内成分であり、 $V, \Theta_X, \Theta_Z, \alpha$ は構面外成分である。このことを考慮して、以下の式により4種類の変位速度成分を定義する。

構面内対称成分: $\dot{\mathbf{U}}^f$

$$\begin{aligned} \dot{U}^f &= (\dot{U}^I + \dot{U}^{II})/2 \\ \dot{W}^f &= (\dot{W}^I + \dot{W}^{II})/2 \\ \dot{\Theta}_y^f &= (\dot{\Theta}_y^I + \dot{\Theta}_y^{II})/2 \end{aligned} \quad (8)$$

構面内逆対称成分: $\dot{\mathbf{U}}^{bi}$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{bi} &= (\dot{U}^I - \dot{U}^{II})/2 \\ \dot{W}^{bi} &= (-\dot{W}^I + \dot{W}^{II})/2 \\ \dot{\Theta}_y^{bi} &= (\dot{\Theta}_y^I - \dot{\Theta}_y^{II})/2 \end{aligned} \quad (9)$$

構面外対称成分: $\dot{\mathbf{U}}^{fo}$

$$\begin{aligned} \dot{V}^f &= (\dot{V}^I + \dot{V}^{II})/2 \\ \dot{\Theta}_x^f &= (\dot{\Theta}_x^I + \dot{\Theta}_x^{II})/2 \\ \dot{\Theta}_z^f &= (\dot{\Theta}_z^I + \dot{\Theta}_z^{II})/2 \\ \dot{\alpha}^f &= (\dot{\alpha}^I + \dot{\alpha}^{II})/2 \end{aligned} \quad (10)$$

構面外逆対称成分: $\dot{\mathbf{U}}^{bo}$

$$\begin{aligned} \dot{V}^{bi} &= (-\dot{V}^I + \dot{V}^{II})/2 \\ \dot{\Theta}_x^{bi} &= (-\dot{\Theta}_x^I + \dot{\Theta}_x^{II})/2 \\ \dot{\Theta}_z^{bi} &= (\dot{\Theta}_z^I - \dot{\Theta}_z^{II})/2 \\ \dot{\alpha}^{bi} &= (\dot{\alpha}^I - \dot{\alpha}^{II})/2 \end{aligned} \quad (11)$$

節点力についてもこれらに対応する成分 $\dot{\mathbf{F}}^{fi}, \dot{\mathbf{F}}^{bi}, \dot{\mathbf{F}}^{fo}, \dot{\mathbf{F}}^{bo}$ を同様に定義できる。対称成分および逆対称成分に関する節点変位速度ベクトルおよび節点力速度ベクトルは以下のように表される。

$$\dot{\mathbf{U}}^{fT} = \left\{ \dot{U}_P^{fT}, \dot{U}_P^{foT}, \dot{U}_Q^{fiT}, \dot{U}_Q^{foT} \right\} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{biT} = \left\{ \dot{U}_P^{biT}, \dot{U}_P^{boT}, \dot{U}_Q^{biT}, \dot{U}_Q^{boT} \right\} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{fT} = \left\{ \dot{F}_P^{fiT}, \dot{F}_P^{foT}, \dot{F}_Q^{fiT}, \dot{F}_Q^{foT} \right\} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{biT} = \left\{ \dot{F}_P^{biT}, \dot{F}_P^{boT}, \dot{F}_Q^{biT}, \dot{F}_Q^{boT} \right\} \quad (15)$$

式(8)~(11) および対応する節点力の式は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^f \\ \dot{\mathbf{U}}^{bi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^I \\ \dot{\mathbf{U}}^{II} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^f \\ \dot{\mathbf{F}}^{bi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^I \\ \dot{\mathbf{F}}^{II} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここに、

$$\mathbf{H} = [H_{ij}] \quad (i, j = 1, \dots, 14) \quad (18)$$

$$H_{ii} = \begin{cases} 1 & (i=2,4,5,9,11,12) \\ -1 & (i=1,3,6,7,8,10,13,14) \end{cases}, \quad H_{ij} = 0 (i \neq j)$$

$\mathbf{I}$ は14次の単位行列である。

$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$ であるので、式(16),(17)の逆関係は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^I \\ \dot{\mathbf{U}}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^f \\ \dot{\mathbf{U}}^{bi} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^I \\ \dot{\mathbf{F}}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^f \\ \dot{\mathbf{F}}^{bi} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式(19),(17)より、式(7)は、対称成分、逆対称成分に関する変化率方程式に変換される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^f \\ \dot{\mathbf{F}}^{bi} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^f \\ \dot{\mathbf{U}}^{bi} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} + \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{21} + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{H} + \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{22}\mathbf{H} \\ -\mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{11} + \tilde{\mathbf{K}}_{21} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{K}}_{22}\mathbf{H} \\ -\tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{H} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{21}\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{K}}_{12} + \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{22}\mathbf{H} \\ \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{K}}_{21}\mathbf{H} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{12} + \tilde{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^f \\ \dot{\mathbf{U}}^{bi} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

今、現状態が構面内対称定常状態である場合を考える。この状態は対称定常状態であり、繰り返し载荷についても直交対称面に関して対称であるから、片持梁-柱の挙動変化には直交対称面に関して対称性を有するものが必ず存在する。すなわち、式(7)を梁-柱全体について重ね合わせ、境界条件を代入して得られる系方程式は、直交対称面に関して対称性を有する自明解を持つ。自明解の要素節点変位、節点力成分 $\dot{\mathbf{U}}^{f*}, \dot{\mathbf{U}}^{bi*}, \dot{\mathbf{F}}^{f*}, \dot{\mathbf{F}}^{bi*}$ は次式の関係を持つ。

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{U}}^{bi*} = \dot{\mathbf{U}}^{f*}, \quad \mathbf{H}\dot{\mathbf{F}}^{bi*} = \dot{\mathbf{F}}^{f*} \quad (22)$$

式(22)は、次式と同じ意味である。

$$\dot{\mathbf{U}}^{f*} \neq 0, \quad \dot{\mathbf{U}}^{bi*} = 0, \quad \dot{\mathbf{F}}^{f*} \neq 0, \quad \dot{\mathbf{F}}^{bi*} = 0 \quad (23)$$

式(22)を式(7)に代入すると、次の関係式が導ける。

$$\tilde{\mathbf{K}}_{11} + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{H} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{22}\mathbf{H} + \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{21} \quad (24)$$

現状態が何らかの臨界点にある場合には式(24)は自明ではなく、成立しない可能性が残る。しかしながら、この可能性は、以下の考察を行うことによって否定される。

全ての定常状態変数は Ψ に関する連続関数である。従って、それらによって構成される全ての関係式や固有値等も Ψ に関する連続性を有する^{注3)}。また、式(24)は、臨界点の前後の正則点においては明らかに成立する。従って、関数の連続性より、臨界点においても式(24)は成立する。

式(24)を式(21)に代入すると次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^f \\ \dot{\mathbf{F}}^{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{H} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^f \\ \dot{\mathbf{U}}^{bi} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

従って、式(21)は、対称成分、逆対称成分に関する独立した2組の方程式に分離される。

$$\dot{\mathbf{F}}^f = (\tilde{\mathbf{K}}_{11} + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{H}) \dot{\mathbf{U}}^f = \tilde{\mathbf{K}}^f \dot{\mathbf{U}}^f \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{bi} = (\mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{H} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{K}}_{12}) \dot{\mathbf{U}}^{bi} = \tilde{\mathbf{K}}^{bi} \dot{\mathbf{U}}^{bi} \quad (27)$$

次に、構面内成分および構面外成分に着目すれば、式(26),(27)はそれぞれ以下のように表現できる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^{fi} \\ \dot{\mathbf{F}}^{fo} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{fi} & \tilde{\mathbf{K}}^{fio} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{foi} & \tilde{\mathbf{K}}^{fo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^{fi} \\ \dot{\mathbf{U}}^{fo} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^{bi} \\ \dot{\mathbf{F}}^{bo} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{bi} & \tilde{\mathbf{K}}^{bio} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{boi} & \tilde{\mathbf{K}}^{bo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}^{bi} \\ \dot{\mathbf{U}}^{bo} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

現状態は構面内定常状態でもあり、このとき繰り返し載荷は構面内に作用するので、片持梁-柱の挙動変化には構面外成分が0であるものが必ず存在する。すなわち、式(28),(29)を梁-柱全体について重ね合わせ、境界条件を代入して得られる系方程式は、構面外成分が0である自明解を持つ。自明解の要素節点変位、節点力成分は次式の関係を持つ。

$$\dot{\mathbf{U}}^{fi*} \neq 0, \dot{\mathbf{U}}^{fo*} = 0, \dot{\mathbf{F}}^{fi*} \neq 0, \dot{\mathbf{F}}^{fo*} = 0 \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{bi*} \neq 0, \dot{\mathbf{U}}^{bo*} = 0, \dot{\mathbf{F}}^{bi*} \neq 0, \dot{\mathbf{F}}^{bo*} = 0 \quad (31)$$

従って、式(28),(29)の係数について次式が成り立つ。

$$\tilde{\mathbf{K}}^{fio} = 0, \tilde{\mathbf{K}}^{foi} = 0, \tilde{\mathbf{K}}^{bio} = 0, \tilde{\mathbf{K}}^{boi} = 0 \quad (32)$$

式(32)の成立に関しても、式(24)の場合と同様の考察を行うことができる。

結局、式(21)は、4組の独立な方程式に帰着する。

$$\text{構面内対称成分} : \dot{\mathbf{F}}^{fi} = \tilde{\mathbf{K}}^{fi} \dot{\mathbf{U}}^{fi} \quad (33)$$

$$\text{構面外対称成分} : \dot{\mathbf{F}}^{fo} = \tilde{\mathbf{K}}^{fo} \dot{\mathbf{U}}^{fo} \quad (34)$$

$$\text{構面内逆対称成分} : \dot{\mathbf{F}}^{bi} = \tilde{\mathbf{K}}^{bi} \dot{\mathbf{U}}^{bi} \quad (35)$$

$$\text{構面外逆対称成分} : \dot{\mathbf{F}}^{bo} = \tilde{\mathbf{K}}^{bo} \dot{\mathbf{U}}^{bo} \quad (36)$$

3.4 定常状態経路解析

要素方程式(33)~(36)を梁-柱全体について重ね合わせて4組の系方程式をつくる。

$$\text{構面内対称成分} : \dot{\mathbf{F}}_G^{fi} = \tilde{\mathbf{K}}_G^{fi} \dot{\mathbf{U}}_G^{fi} \quad (37)$$

$$\text{構面外対称成分} : \dot{\mathbf{F}}_G^{fo} = \tilde{\mathbf{K}}_G^{fo} \dot{\mathbf{U}}_G^{fo} \quad (38)$$

$$\text{構面内逆対称成分} : \dot{\mathbf{F}}_G^{bi} = \tilde{\mathbf{K}}_G^{bi} \dot{\mathbf{U}}_G^{bi} \quad (39)$$

$$\text{構面外逆対称成分} : \dot{\mathbf{F}}_G^{bo} = \tilde{\mathbf{K}}_G^{bo} \dot{\mathbf{U}}_G^{bo} \quad (40)$$

式(37)を境界条件の下に解き、構面内対称定常状態の増分解を求めることができる。これを累加していくことにより、基本経路である構面内対称定常状態経路を追跡できる。一方、式(38)~(40)の指定変位成分、指定力成分は全て0であるので、斉次方程式となり、 $\dot{\mathbf{U}}_G^{fo} = 0, \dot{\mathbf{U}}_G^{bi} = 0, \dot{\mathbf{U}}_G^{bo} = 0$ を自明解として持つ。

ここで、塑性体についての釣合経路の唯一性と安定性に関するHillの一般理論¹³⁾において導入された方法からの類推に基づき、応力、ひずみ状態の定常応答に関して、次の仮定⁵⁻⁷⁾をさらに導入する。

仮定2:「構面内定常状態から構面外定常状態へ移行が生じる瞬間あるいは対称定常状態から非対称定常状態へ移行が生じる瞬間には、C→UまたはT→Uの定常状態周期挙動の変化は梁-柱内のどの微小要素においても生じない。」(C、U、Tの記号については図5参照。)

仮定2に基づいて選定、評価された式(6)の係数 $\tilde{\mathbf{D}}$ を用いて式(38)~(40)の係数 $\tilde{\mathbf{K}}_G^{fo}, \tilde{\mathbf{K}}_G^{bi}, \tilde{\mathbf{K}}_G^{bo}$ は計算され、それぞれについて変位速度の非0解を持つための以下の条件式によって、3種類の限界を見いだせる。

$$\text{構面内挙動限界条件 (対称)} : \lambda_1^{fo}(\tilde{\mathbf{K}}_G^{fo}) = 0 \quad (41)$$

$$\text{対称限界条件} : \lambda_1^{bi}(\tilde{\mathbf{K}}_G^{bi}) = 0 \quad (42)$$

$$\text{構面内挙動限界条件 (逆対称)} : \lambda_1^{bo}(\tilde{\mathbf{K}}_G^{bo}) = 0 \quad (43)$$

図6 構面内挙動限界における構面外変位の発生

ここに、 $\tilde{\mathbf{K}}_G^{fo}, \tilde{\mathbf{K}}_G^{bi}, \tilde{\mathbf{K}}_G^{bo}$ は $\tilde{\mathbf{K}}_G^{fo}, \tilde{\mathbf{K}}_G^{bi}, \tilde{\mathbf{K}}_G^{bo}$ から変位指定成分に対応する行と列を取り除いた小行列をそれぞれ表す。また、 $\lambda_1^{fo}, \lambda_1^{bi}, \lambda_1^{bo}$ は、それぞれの小行列の最小固有値を表す。

従って、式(41)が満たされる振幅 Ψ_{inp}^{fo} 、式(42)が満たされる振幅 Ψ_{sym}^{bi} および式(43)が満たされる振幅 Ψ_{inp}^{bo} のうち、最小値を与えるものによって限界の形式が定まる。

式(41)で見いだされる限界は、直交対称面に関して対称な構面外変位成分が発生する構面内挙動限界である(図3)。これに対して、式(43)で見いだされる限界はもう一種の構面内挙動限界であり、この場合、X-Y平面において第1象限から第3象限へ、あるいは第2象限から第4象限への繰り返し挙動を呈する構面外変位が発生する。構面内挙動限界における頂点での構面外変位発生の様子を図6に示す。図中、破線で示した矢印はCOIDAに従う強制繰り返し変位を表し、実線の矢印は構面内挙動限界において発生する構面外変位成分を表す。

式(42)で見いだされる限界はいわゆる対称限界であり、構面内での挙動を呈し続けるものの、両反転時におけるたわみ形状の直交対称面に関する対称性が破れる。

ここでは、対称限界に至る前に構面内挙動限界(対称)に至るような場合について考える。

式(26),(27)を梁-柱全体について重ね合わせて2組の系方程式をつくる。

$$\text{対称成分} : \dot{\mathbf{F}}_G^f = \tilde{\mathbf{K}}_G^f \dot{\mathbf{U}}_G^f \quad (44)$$

$$\text{逆対称成分} : \dot{\mathbf{F}}_G^b = \tilde{\mathbf{K}}_G^b \dot{\mathbf{U}}_G^b \quad (45)$$

式(44)を境界条件の下に解き、構面外対称定常状態の増分解を求め、これを累加していくことにより構面外対称定常状態経路を追跡できる。対称限界条件が満たされない限り構面内挙動限界後も直交対称面に関して対称な挙動を呈することが保証されるので、増分解を続行できる。この場合の対称限界条件は次式のようなになる。

$$\text{対称限界条件} : \lambda_1^b(\tilde{\mathbf{K}}_G^b) = 0 \quad (46)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{K}}_G^b$ は $\tilde{\mathbf{K}}_G^b$ から変位指定成分に対応する行と列を取り除いた小行列を表し、 λ_1^b は、その最小固有値を表す。

定常状態限界は、制御変位振幅 Ψ が極大値をとる点として求められる。定常状態経路の経路パラメータとしては、経路の進行に伴って顕著な変化を示す量を選ぶ。この場合は、頂点構面外変位 V_T^f を選ぶのが妥当である。

なお、対称限界に早期に至る場合についても、限界後の経路の追跡が同様に行うことができ、定常状態限界を求めることができる⁸⁾。

図7 H形鋼片持梁-柱モデル

図8 要素断面

4. 例題

ここでは、図7に示すH形鋼片持梁-柱を解析対象モデルとし、その強軸方向に頂点にCOIDAを作用させる問題を考える。鋼材モデルは、H-100×100×6×8をモデル化し、材軸方向に20要素に等分割する。各要素は、図8に示すように96の三角柱領域に分割する。断面と材料特性に関する諸量を表2に示す。

このモデルの降伏軸力は、 $N_Y = 6.186 \times 10^2$ (kN) となる。また、頂点のX方向変位だけを拘束しその他の変位は自由である片持梁-柱の接線係数荷重は強軸側で $N_{Ty} = 4.602 \times 10^2$ (kN)、弱軸側で $N_{Tx} = 2.033 \times 10^1$ (kN) となる。対称限界理論より N_{Ty} 以下の軸力レベルでは対称限界には至らず^{6,7)}、構面内挙動限界

表2 断面諸量と材料特性

断面積	A	2.104×10^1 (cm ²)
断面2次	I_x (弱軸)	1.335×10^2 (cm ⁴)
モーメント	I_y (強軸)	3.690×10^2 (cm ⁴)
ヤング係数	E	2.058×10^2 (GPa)
ポアソン比	ν	3.000×10^{-1}
降伏応力	σ_Y	2.940×10^2 (MPa)
第2分枝勾配	E_t	6.174×10^0 (GPa)

図9 定常状態経路群 ($N/N_Y = 0.8$)

理論より N_{Tx} 以下の軸力レベルでは構面内挙動限界には至らない⁵⁾。

4.1 軸力比0.8の場合

軸力比0.8、すなわち鉛直荷重が494.9kN作用している場合について解析を行う。

前章で定式化した解析法に従って各限界振幅を求めた結果、 $\Psi_{inp}^{fo} = 2.225$ mm、 $\Psi_{sym}^{bi} = 21.66$ mm、 $\Psi_{inp}^{bo} = 11.11$ mm となった。従って構面内挙動限界 (対称) に早期に至ることがわかる。

構面内挙動限界点において、分岐モードの方向への増分解析を行う。このとき、定常状態経路解析のための方程式を式(44)に変更しておく。分岐後の定常状態経路を正しく得るため、整合剛性行列形成法¹⁴⁾を用いて解析を行う。具体的には、まず限界点において λ_1^{fo} に対応する固有モード Φ_1^{fo} を求める。次に Φ_1^{fo} の方向の変化率を与えた場合の各要素のひずみ変化率を求め、これに整合する係数 $\bar{D}$ を選択する。そして、経路パラメータとして頂点構面外変位 V_T^f を選び増分解析を行えば、定常状態経路を求めることができる。また、 $-\Phi_1^{fo}$ の方向へも同様の解析を行うことにより、もう一方の定常状態経路も求めることができる。

解析の結果、整合解としては制御変位振幅 Ψ が増加する方向への解が得られた。従って、構面内挙動限界後には構面外定常状態が存在することがわかる。

分岐後の構面外定常状態経路解析においては、式(46)によって、モデルが対称限界に至るかどうかを常にチェックする。対称限界に至る前に定常状態経路が極限点を迎えたならば、それが定常状態限界である。分岐後経路解析の結果、その後 Ψ のわずかな増加の後、定常状態限界に至り、定常状態限界振幅は $\Psi_{st0} = 2.244$ mm となった。

既往の座屈後経路解析法では、なめらかな経路解析を行うため、あらかじめ座屈モードの方向への微小な初期不整を与えることにより分岐点である座屈点を避ける方法が一般的によく用いられる。座屈後経路解析法と同じ考えに基づき、ここでも、構面外方向への対称な微小初期不整を与え、定常状態経路解析を行う。

対称な初期不整として、軸力偏心を構面外方向へ与えることとし、同じモデルに種々の軸力偏心量 e を与えて定常状態経路解析を行った。解析結果として、制御変位振幅 Ψ と頂点構面外変位 V_T^f との関係を図9に示す。

図 10 定常状態経路群 ($N/N_Y = 0.4$)

図 11 軸力偏心量-定常状態限界振幅関係

4.2 軸力比 0.4 の場合

軸力比 0.4、すなわち鉛直荷重が 247.4kN 作用している場合について解析を行う。

構面内挙動限界を求めた結果、 $\Psi_{inp}^{fo} = 6.592\text{mm}$ 、 $\Psi_{inp}^{bo} = 10.97\text{mm}$ が得られた。この軸力比では対称限界には至らないので、構面内挙動限界 (対称) に早期に至ることがわかる。

構面内挙動限界における構面外方向への整合解としては、頂点変位振幅が増加する方向への解が得られた。分岐後経路解析の結果、定常状態限界振幅は $\Psi_{st0} = 7.333\text{mm}$ となった。

軸力比 0.8 の場合と同様に、種々の軸力偏心量 e を構面外方向へ与えたモデルについて定常状態経路解析を行った。解析結果として、制御変位振幅 Ψ と構面外変位 V_T^f との関係を図 10 に示す。

また、それぞれの軸力比について、軸力偏心量の大きさ $|e|$ の増加に対する定常状態限界振幅 Ψ_{st} の変化を見るため、軸力偏心が無い場合の値 Ψ_{st0} に対する比をとった結果を図 11 に示す。 $|e|$ の増加に対して定常状態限界振幅 Ψ_{st} は線形的に減少し、軸力が大きいほど減少の割合も大きいことがわかった。

5. 履歴挙動解析

理論解を検証するため、軸力比 0.8 および軸力比 0.4 のそれぞれの場合について、同じ軸力荷重条件のもと、一定の頂点 X 方向強制変位振幅での繰り返し両振り曲げ履歴挙動解析を行う。

(a) 軸力比 0.8 : 振幅比 0.99

(b) 軸力比 0.8 : 振幅比 1.01

図 12 載荷節点変位-構面外変位関係 ($N/N_Y = 0.8$)

5.1 軸力比 0.8 の場合

軸力偏心を 0.5mm 与えたモデルについて検証する。理論解析により予測された定常状態限界振幅は $\Psi_{st} = 1.057\text{mm}$ であった。ここでは、 $0.99\Psi_{st}$ および $1.01\Psi_{st}$ の一定頂点 X 方向強制変位振幅を設定し、繰り返し載荷を行う。

履歴挙動解析結果として、頂点 X 方向変位 U_T と頂点構面外変位 V_T の関係を図 12 に示す。(a) は頂点 X 方向変位振幅 $0.99\Psi_{st}$ の場合、(b) は $1.01\Psi_{st}$ の場合である。 $0.99\Psi_{st}$ の場合、梁-柱は直ちにシェイクダウン状態に至り、収束挙動を示した。理論解析によるこの場合の頂点構面外変位は $V_T^f = 1.893\text{mm}$ であるのに対して、履歴解析による収束値は $V_T = 1.891\text{mm}$ と、精度良い結果が得られている。

これに対して $1.01\Psi_{st}$ の場合、挙動は収束せず、繰り返し載荷の進行に伴い構面外変形が進行し、発散挙動に至ることがわかる。

5.2 軸力比 0.4 の場合

軸力偏心を 0.1mm 与えたモデルについて検証する。定常状態経路解析の結果、定常状態限界振幅は、 $\Psi_{st} = 7.296\text{mm}$ であり、このときの構面外変位は $V_T^f = 4.174\text{mm}$ となった。

一定頂点 X 方向強制変位振幅として、 $0.99\Psi_{st}$ 、 $1.01\Psi_{st}$ 、 $1.03\Psi_{st}$ および $1.05\Psi_{st}$ を設定し、それぞれについて 50 サイクルまでの繰り返し載荷を行なった。

図 13 載荷サイクル数-頂点構面外変位関係 ($N/N_Y = 0.4$)

履歴挙動解析結果として、繰り返し載荷のサイクル数と頂点構面外変位 V_T の関係を図 13 に示す。0.99 Ψ_{st} 、1.01 Ψ_{st} の場合、構面外定常状態への収束傾向が見受けられるが、両者ともシェイクダウンには至っておらず、構面外変位はわずかな増大を続けている。今後、構面外変位は理論予測値付近までは増大を続け、その後に収束、発散に挙動が分かると予想される。

1.03 Ψ_{st} 以上の振幅の場合、振幅が大きいほどサイクル数の増加に伴う構面外変位の累積が顕著となり、いずれの場合も発散挙動に至った。以上より、理論予測解は良好な精度で得られているものと判断できる。

6. 結論

完全両振り繰り返し曲げを受ける二軸対称断面梁-柱について、定常状態限界を求めるための解析法を提示した。その主な成果および特長は次の通りである。

- 1) 離散化モデルとして、Timoshenko 梁理論のせん断変形と、ねじれ変形を共に考慮した有限要素法を採用し、移動要素座標系によって三次元空間内の要素の有限回転を厳密に扱える方法を用いた。
- 2) 定常状態経路の増分解析の基礎式である定常状態変化率方程式を導いた。
- 3) 系が有する 2 種類の異なる対称性に着目し、構面内対称定常状態における定常状態変化率方程式が 4 組の独立な方程式群に分解できることを証明した。
- 4) その内の 3 組の斉次方程式群の特異性条件 (singularity condition) から、定常状態経路の分岐点として構面内挙動限界および対称限界がそれぞれ求まる。
- 5) 定常状態経路を追跡し、その極限点として定常状態限界が求まる。

本解析法を適用し、強軸方向に繰り返し曲げを受ける H 形鋼片持梁-柱を対象とし、定常状態経路および定常状態限界を予測した。解析を行なった全ケースで、構面内挙動限界が最初に現われ、その後更に振幅が増加したところで定常状態限界に達した。

本解析法を検証する目的で、同じ H 形鋼片持梁-柱に一定振幅繰り返し曲げを与えたときの全履歴挙動を追跡する解析を行ない、予測限界値前後の振幅で挙動が収束と発散に分かれることを示した。これによって、本解析法の妥当性が確認された。

注

- 注 1) 3.3 節で定義される構面内成分と構面外成分をあらかじめ意識して、式 (2) の変位ベクトルを定義しているため、変位成分の順序が文献 5) で定義したものと異なっている。
- 注 2) 線形増分型の解析では、適切な増分長の値について何らの情報も得られないので、精度を確保するためには、各増分段階での収束計算を行うか、より高階の微係数の関係を求めて摂動解析を行うのが一般的である。本論文では、数回の予備解析を行うことにより、適切な増分長を設定している。例題では、有効数字 4 桁の精度を確保するために、各増分段階において、全ての要素のひずみ変化率の絶対値が 10^{-4} を越えないように増分長を設定している。
- 注 3) 線形増分解析および有限要素法による離散化のため、関数の値は不連続となるが、このことは関数の連続性の議論には影響を及ぼさない。

参考文献

- 1) 若林實 編著：鉄骨構造学詳論，丸善，1985。
- 2) 中村恒善，上谷宏二，吉田亘利：繰り返し曲げを受ける鋼梁-柱における構面外変形の発生に関する実験，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東）構造 II，pp.1075-1076，1988。
- 3) 上谷宏二，中村恒善，今井 敬，吉田亘利：繰り返し曲げを受ける鋼構造柱材の構面外変形の発生と成長に関する実験的研究（その 1），日本建築学会大会学術講演梗概集（関東）構造 II，pp.1331-1332，1993。
- 4) 上谷宏二，中村恒善，常岡次郎：繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱についての構面外変形発生機構と臨界点理論，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東）構造 II，pp.1077-1078，1988。
- 5) 上谷宏二，榊井 健：繰り返し曲げを受ける片持梁-柱の構面内挙動限界解析法，日本建築学会構造系論文集，第 513 号，pp.97-104，1998。
- 6) K.Uetani and Tsuneyoshi Nakamura：Symmetry limit theory for cantilever beam-columns subjected to cyclic reversed bending，*J. Mech. Phys. Solids*，Vol.31，pp.449-484，1983。
- 7) 上谷宏二：繰返し両振り曲げを受ける弾塑性梁-柱についての対称限界理論と定常状態限界理論，京都大学博士論文，1984。
- 8) 上谷宏二，中村恒善：繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱の定常状態限界理論（その 1），日本建築学会構造系論文報告集，第 438 号，pp.105-115，1992.8。
- 9) 藤本盛久，和田 章，岩田 衛，中谷文俊：鋼構造骨組の三次元非線形解析，日本建築学会構造系論文報告集，第 227 号，pp.75-90，1975.1。
- 10) 修行 稔：ねじりと曲げを受ける薄肉閉断面材の弾塑性挙動，日本建築学会構造系論文報告集，第 436 号，pp.145-154，1992.6。
- 11) 藤谷義信：骨組構造の力学，建築構造力学の最近の発展 - 応力解析の考え方 -，日本建築学会，3.1，1987。
- 12) 上谷宏二：ティモシェンコ梁の有限要素剛性方程式誘導のための縮約法，構造工学論文集，Vol. 39B，pp.65-72，1993。
- 13) R. Hill：A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-plastic Solids，*J. Mech. Phys. Solids*，Vol.6，pp.236-249，1958。
- 14) 上谷宏二，中村恒善，森迫清貴，石田修三：弾塑性構造物の臨界挙動解析のための整合剛性行列形成法，日本建築学会構造系論文集，第 445 号，pp.67-78，1993.12。
- 15) 榊井 健，上谷宏二：繰り返し曲げを受ける H 型鋼片持梁-柱の構面内挙動限界および定常状態限界，日本建築学会大会学術講演梗概集（近畿）構造 I，pp.415-416，1996。
- 16) 上谷宏二，榊井 健：繰り返し両振り曲げを受ける鋼梁-柱の構面内挙動限界および定常状態限界，日本機械学会平成 8 年度材料力学部門講演会講演論文集，Vol. A，pp.295-296，1996。
- 17) 上谷宏二，榊井 健：繰り返し曲げを受ける立体骨組部材の構面内挙動限界および定常状態限界，計算工学講演会論文集，Vol.3，No.3，pp.781-784，1998。

(1998年9月9日原稿受理，1999年1月27日採用決定)