一様部材断面積を有する平面トラスのトポロジー・節点位置同時最適化

SIMULTANEOUS OPTIMIZATION OF TOPOLOGY AND GEOMETRY
OF PLANE TRUSSES WITH UNIFORM CROSS-SECTIONAL AREA

田川 浩*, 大崎 純**

Hiroshi TAGAWA and Makoto OHSAKI

A procedure based on a simulated annealing method is presented for simultaneous optimization of topology and geometry of a plane truss with uniform cross-sectional area. A continuous topology transition model is introduced for simulating continuous transition between truss structures with different topologies. In order to improve convergence property of annealing, constraints on allowable nodal locations are considered and re-annealing procedures are introduced. In the examples, optimal solutions are found for cantilever-type and bridge-type plane trusses, and the effects of annealing schedule on optimal solutions are discussed.

Keywords : shape optimization, topology optimization, simulated annealing, plane truss

形状最適化, トポロジー最適化, シミュレーテッドアニーリング, 平面トラス

1. 序

トラス構造物の形状最適化問題には, トポロジー最適化問題と節点位置最適化問題がある。これらは通常別々の問題として扱われ, 一般にトポロジーと節点位置を同時に最適化するのは困難である¹⁾。前者で用いられる ground structure method では, 多くの存在可能部材及び節点からなるトラスから, 不要な部材を除去することにより最適なトポロジーを得る^{2,3)}。この方法では, 無限に多くの部材が存在可能であるとしなければ最適節点位置は得られない。一方, 節点位置最適化問題では, 与えられたトポロジー下で, 節点座標を設計変数として数理計画法を用いて最適化が行われる^{4,5)}。その過程では, 極端に短い部材あるいは近接する平行な複数の部材が存在することを防ぐため節点座標に対し上下限値が与えられており, 近接する節点及び部材の一部を取り除いてトラスのトポロジーを変更することは極めて困難である。

均質化法⁶⁾は, トポロジーと形状を同時に最適化するために有効である。しかし, 板要素とトラスを構成する直線形状の棒材には大きな違いがあり, 部材断面積が一様であるという条件を設けたトラスの形状最適化問題に均質化法を適用するのは困難である。

近年, トラス形状最適化問題に対し, 遺伝的アルゴリズム(GA)やシミュレーテッドアニーリング(SA)等のヒューリスティクス(発見的手法)を使用して近似最適解を求める手法が多く提案されている^{7~14)}。単純な基本トラスを初期解とし, 与えた規則に従って部材を付加あるいは除去していくことにより最適なトポロジーを得る手法も提案されている^{15,16)}。しかし, これらの手法では, トポロジーの変化や部材の付加・除去を行うための経験的・発見的アルゴリズムが必要であり,

そのため対象構造物の規模が大きくなると計算負荷が大きくなるという問題がある。

Ohsaki¹⁷⁾は, シグモイド関数を用いた連続的トポロジー変化モデルを規則的平面トラスに対して構築し, 数理計画法によりトポロジーと節点位置を同時に最適化する手法を提案した。連続的トポロジー変化モデルは, 節点数, 部材数および節点間の接続関係など, 初期に与えた情報を全く変更することなくトポロジーを連続的に変化させるためのモデルである。このモデルを適用すれば, 最適化の過程で節点座標のみを設計パラメータとすればよく計算負荷は小さくなる。筆者らは, このモデルと遺伝的アルゴリズムを併用した手法を提案している¹⁸⁾。しかし対象は規則的平面トラスに限定されていた。

本研究では, 規則性を持たない平面トラスに対して, トポロジーと節点位置を同時に最適化するための手法の構築を目的としている。対象とするトラスは, 部材断面積が全部材に対して一様であるとする。この制約は実用性の観点から重要である。この制約を考慮することによる困難点は, 上述した連続的トポロジー変化モデルの適用により合理的に回避できることが文献¹⁷⁾に示されている。

本論文では, まず, 本研究で想定する最適化問題の特徴について述べる。規則性のない平面トラスに適用できる連続的トポロジー変化モデルを示し, 最適化アルゴリズムに対するSA法の適用について述べる。また, 最適解への収束性を高めるために導入した種々の方法を紹介する。例題を通じて, SA法における温度管理が収束解に及ぼす影響, 最適化過程のトラス形状の変化, 再アニーリングの有効性等について述べるとともに, 本手法の有効性を示す。

注) 本論文の一部は既に文献²⁶⁾に発表している。

* 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 助手・工修

** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 助教授・博士(工学)

Research Assoc., Dept. of Archi. and Architectural Systems,
Kyoto University, M. Eng.

Assoc. Prof., Dept. of Archi. and Architectural Systems, Kyoto University, Dr. Eng.

2. 本研究で対象とする最適化問題の特徴

2.1 トポロジー・節点位置同時最適化

荷重の作用する節点と支点の位置が定められたトラスの形状最適化を考える。例えば、図1(a)に示す片持ち梁型トラスでは支点間距離 H 、荷重の作用する節点と支点の距離 W は固定される。部材の断面積は一定値 A をとるものとする。節点荷重ベクトルを P 、系剛性行列を K 、変位ベクトルを U とすると剛性方程式は次式となる。

$$KU = P \quad (1)$$

変位制約条件下で部材体積を最小化する最適化問題は次のように書ける。

$$\min \sum_{i=1}^N L_i A_i \quad (2)$$

$$\text{subject to } |U_j| \leq \bar{U}_j \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (3)$$

ここに、

N : 部材数

L_i : 第 i 部材の部材長

A_i : 第 i 部材の断面積 (0 または A)

M : 変位の自由度数

U_j : 変位ベクトル U の第 j 成分

$\bar{U}_j$: $|U_j|$ の指定上限値

図1 トラス形状最適化問題の分類: (a) 初期構造物, (b) トポロジー最適化, (c) 節点位置最適化, (d) トポロジー・節点位置同時最適化

図2 平面トラスのトポロジー・節点位置同時最適化のため方法 (模式図)
(I) 数値計画法により得られる最適解において近接する部材を結合する方法
(II) 均質化法により得られる最適解と等価なトラスを生成する方法

本問題では、存在する部材の断面積を、全トラスにわたって一定の A としており、 A は $|U_j|$ が最大となる変位成分において $|U_j| = \bar{U}_j$ となるように決定する。

この問題に対して、トポロジー最適化問題では、図1(b)に示すように節点位置を固定し、部材を除去することにより最適解を求める。一方、節点位置最適化問題では、図1(c)に示すようにトポロジーを固定し、節点位置を移動させることにより最適解を求める。それに対し、本研究で考えるトポロジー・節点位置同時最適化問題では、図1(d)に示すように節点位置およびトポロジーのいずれも固定することなく直接最適解を求める。

2.2 部材断面積が全部材一様であるという制約の導入

実用的なトラス構造物では、各部材断面積が任意の値をとることが許容されない場合が多い。それは、各部材がそれぞれ異なる断面積を有すると、たとえ総体積が小さくても建設コストが高くなる等の理由による。そこで本研究では部材断面積が全部材一様であるという制約を導入する。任意の正の値をとることが可能な場合のトラス形状最適化問題では、図2(I)に示すように数値計画法による最適化の結果得られたトラス構造物 (同(b)図) において近接する部材をまとめて1つの部材とし設計解 (同(c)図) とする方法、あるいは図2(II)に示すように均質化法で得られた最適解 (同(b)図) と等価なトラスを生成し設計解 (同(c)図) とする方法¹⁹⁾も可能である。しかし、これらの手法では、全部材の断面積が一様であるという制約を直接的に考慮することはできない。したがって、この制約を導入することにより最適解を求めることはより困難となる。

3. 規則性のないトラス構造物に対する連続的トポロジー変化モデル

連続的トポロジー変化モデル¹⁹⁾は、節点数、部材数および節点間の接続関係など、初期に与えた情報を全く変更することなくトポロジーを連続的に変化させていくためのモデルである。このモデルを本研究で適用することの長所は2つある。1つはトポロジーを設計変数とする必要がなくなり計算負荷が大幅に軽減されること、もう1つは全部

図3 連続的トポロジー変化モデルの基本概念; (a) トラスユニット (節点 b が節点 a に接近), (b) $\alpha_{ab} - L_{ab}$ 関係曲線

図4 連続的トポロジー変化モデルの適用例

図5 節点移動による近傍解の生成

材が一様断面積を有するという制約を合理的に考慮できる点である。本章では、規則性のない平面トラスに対する連続的トポロジー変化モデルについて説明する。

3.1 基本概念

まず、図3(a)に示す三角形トラスユニットを用いてモデルの基本概念を述べる。節点 k および節点 l をつなぐ部材（以下、部材 kl と呼ぶ）の部材長を L_{kl} で表す。図3(a)左図では L_{ab} 、 L_{bc} 、 L_{ac} のいずれも十分大きく、この場合断面積は全て A である。次に、同右図のように節点 b が節点 a の近くに移動した場合を考える。ここで、図3(b)に示す係数 α_{ab} を導入する。これは、 L_{ab} の関数であり、次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{ab} = \frac{L_{ab}}{L_{\text{limit}}} & (0 \leq L_{ab} < L_{\text{limit}}) \\ \alpha_{ab} = 1 & (L_{\text{limit}} \leq L_{ab}) \end{array} \right. \quad (4a, b)$$

ここに、 L_{limit} は限界部材長である。係数 α_{ab} は、部材 bc あるいは部材 ac のいずれか一方の断面積に対する係数である。図3(a)では、 L_{ab} が L_{limit} より短くなっており、部材 ac の断面積は A を維持し、部材 bc の断面積が減じられ $\alpha_{ab}A$ となっている。以下、1つの部材が L_{limit} より短くなっているトラスユニットにおいて、 L_{limit} より長い2つの部材を互いに“対部材”と呼ぶ（部材 ac と部材 bc は互いに“対部材”である）。節点 b が節点 a に一致すると、部材 bc の断面積は0となり断面積が A である部材 ac のみが存在することになる。

3.2 平面トラス構造物への適用

このモデルを複数のトラスユニットで構成されるトラス構造物に拡張する。図4(a)では、部材12、部材23および部材56の部材長が限界部材長 L_{limit} より短くなっている。節点5,6,9で構成されるトラスユニットについては、部材59あるいは部材69のいずれの断面積が減じられてもよい。ところが、節点1,2,3,6,5で囲まれた領域には、トラスユニットが3個隣接して存在しており、断面積を減ずる部材を選択するには適当なアルゴリズムが必要となる。これを以下に示す。

[STEP 1] 部材長が L_{limit} より長い部材 kl について、その部材を含むトラスユニットの中で部材長が L_{limit} より短い部材の個数 S_{kl} を求める（図4(a)では、 $S_{15}=1$ 、 $S_{25}=2$ 、 $S_{35}=2$ 、 $S_{36}=1$ である）。

[STEP 2] $S_{kl}=1$ の部材（部材15および部材36）のどちらか一方の部材の断面積を A とし（図では部材15の断面積を A とした）、その“対

部材”の断面積を減少させる（部材25の断面積を減ずる）。

[STEP 3] 前STEPで断面積を減少させた部材 pq について、 $S_{pq}=1$ であれば終了、 $S_{pq}=2$ であればその部材の“対部材”のうちで、断面積値が未定の方の断面積を減少させる。

[STEP 4] STEP3に戻る。

なお、[STEP 2]で、 $S_{kl}=1$ の部材のうち断面積を A とする部材の選択方法により最適化の過程は変化する。しかし、後に6.2節で示す方法等を用いれば、最終的に得られるトラスでは L_{limit} より短い部材は極めて短くなるため、選択方法によらずトラスは同一のものとなる。

図4(a)の19部材トラスにおいて節点1,2,3および節点5,6がそれぞれ一致すると、同(b)図の12部材トラスへ変化する。なお、連続的トポロジー変化モデルでは、見かけ上トポロジーが変化するのみであり、実際にトポロジーは変化しない。すなわち最適化の過程において節点間の接続関係等は変わらないため、図4(b)の12部材トラスにおいて節点1,2,3および節点5,6が分離し、再び19部材トラスに戻ることも可能である。ただし、6.3節に示す再アニーリングの開始時において一度結合された節点同士は分離することはできない。

4. ピン接合トラスの最適化における問題点および解決法¹⁷⁾

前節に示したトポロジー変化モデルをピン接合トラスに適用する際に生じる問題点は、次の通りである。

(1) ピン接合トラスでは、近接する節点間の距離が微小であっても、荷重作用時はそれらの相対変位が微小ではなく有限な値をとる場合があるため、トポロジーを連続的に変化させても力学的特性が不連続となる場合がある。

(2) 部材長が極めて小さい部材が存在すると剛性行列が非正則になることがある。

上記問題点を解決するため、(1)についてはピン接合トラスを剛接合トラスに置き換える。ここで、断面2次半径 γ は全部材に対して一定で、十分小さいものとする。ピン接合トラスと剛接合トラスを比較したとき、部材内の局所的変形状態は全く異なるが、部材の曲げ剛性が十分小さい場合には、部材の軸方向変形および各節点の変位量はほぼ等しくなる。(2)については、部材長に関して最小制限値 D を与え、極端に短い部材が存在しないようにする。 D の値は前節に示した L_{limit} の値よりも十分小さい値である。

図6 状態生成時における節点座標の移動方法

5. シミュレーテッドアニーリング法による最適化

シミュレーテッドアニーリング (SA) 法²⁰⁾は、熱統計力学的現象に着想を得た最適化手法である。その特徴は温度概念を用いた確率的ゆらぎの導入と温度制御により、多数の局所的最適解から抜け出し、大域的最適解の近似解（以下、単に最適解と呼ぶ）が求められることである。以下に本研究で用いた方法を示す。

5.1 状態生成

状態生成とは、現設計解の近傍でランダムに設計解（以下、近傍解と呼ぶ）を生成することである。本問題では、以下に示す節点座標移動と部材の強制的除去の2通りの方法で近傍解を生成する。

5.1.1 節点座標移動

図5に示すように第 i 節点の座標を、 $(x_i, y_i) \rightarrow (x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i)$ と移動させることにより近傍解を生成する。ここに、

$$\begin{cases} \Delta x_i = R \cos \theta \\ \Delta y_i = R \sin \theta \end{cases} \quad (5a, b)$$

であり、 θ および R は $(0 \leq \theta < 2\pi)$ 、 $(0 \leq R < R_{\max})$ の区間内で、それぞれ一様乱数を発生させ求める。1度の状態生成時における節点移動には、図6(a),(b)に示すように、次の2通りが考えられる。

- 全節点に対し個別に式(5)を適用し、各々同時に移動させる方法
- 着目する1つの節点のみ移動させ、付した番号に従って着目する節点を変更していく方法。（図6(b)では、着目する節点が1から始まり6に達すると再び1に戻る。）

ここでは次の点を考慮して、(b)の方法を適用する。すなわち、節点移動により生成される近傍解は5.2節に示す置換確率で新設計解として置換されるが、アニーリングの過程（特に後半）において、既に最適解に対し良好な位置にある節点の移動により生成される近傍解は置換され難く、最適解へ収束するためにはさらに移動すべきである節点の移動により生成される近傍解は置換され易いという効果が、(a)の方法では期待できないのに対し(b)の方法では期待できる。

5.1.2 部材の強制的除去

3章で示した連続的トポロジー変化モデルは、3角形トラスユニットに対するモデルであり、7.2節に示す例題2のように四角形ユニットを有するトポロジーを得ることは不可能である。そこで、四角形ユニットの存在を許容するトラス構造物の場合には、第 i 部材の存在を表す変数 $e_i = \{0, 1\}$ を導入する。連続的トポロジー変化モデルにおいて断面積が減じられない部材(3.2節で示した[STEP 2]において断面積を A とする部材)の断面積に対して、 $e_i = 0$ のとき $A_i = 0$ （数値解析上は $A/10000$ とする）、 $e_i = 1$ のとき $A_i = A$ とする。 e_i の値は節点座標と同様にアニーリングの過程で確率的に更新していく。1度の状態生成時における e_i の値の変更は、着目する1つの部材でのみ行い、付した番号に従って着目する部材を変更していく。図6(b)のトラスでは、

図7 状態生成時に着目する節点番号・部材番号と近傍解生成回数の関係および温度更新時刻（図6(b)のトラスの例）

$$Q [= \exp(-\Delta E/T)]$$

図8 $Q \sim \Delta E$ 関係 ($\Delta E > 0$)

図9 節点移動の拘束

着目する部材が(1)から始まり(16)に達すると再び(1)に戻る。

図7に、図6(b)のトラス構造物について、近傍解生成回数と状態生成時に着目する節点の番号あるいは部材の番号との関係を示す。節点座標移動と e_i の値の更新は同時には行わず交互に行う。

5.2 状態変化

状態変化とは、5.1節で述べた状態生成により得られた近傍解を新設計解として確率的に置換することである。近傍解の置換確率 Q には、次式で表されるメトロポリス基準²¹⁾を用いる。

$$Q = \min \left[1, \exp(-\Delta E/T) \right] \quad (6)$$

ここに、

$$\Delta E = E' - E \quad (7)$$

ただし、 E および E' は現設計解および近傍解の総体積、 T は正の値を持つ変数であり5.3節で詳述する。 ΔE が負、即ち生成した近傍解の体積が現設計解の体積より小さい場合には $Q = 1$ 、即ち無条件で置換する。一方、 ΔE が正、即ち生成した近傍解の体積が現設計解の体積より大きい場合には、図8に示すように、同じ T の値に対しては ΔE の値が小さいほど置換確率は大きくなり、同じ ΔE の値に対しては T の値が大きいほど置換確率は大きくなる。

以下では、ステップ数を近傍解が新設計解として置換された回数とする。この場合、近傍解生成回数はステップ数と同じか、あるいは大きい値となる。

5.3 徐冷

アニーリングの過程で温度を下げる操作を徐冷という。具体的には式(6)中の変数 T の値を減少させていく操作である。以下、変数 T を温度と呼ぶ。SA法では、物質を徐冷してエネルギーの低い状態を作る物理プロセスにならって、最初のうちは温度を高く設定して大域的に状態推移を行わせ、温度を徐々に下げていくことにより、評価の高い解の近傍での探索を重点化して最適化問題の解を得ようとする。ここでは、温度管理に指数型アニーリング²²⁾を適用する。すなわち、第 k 番目の温度を T_k としたとき、第 $k+1$ 番の温度を次式から求める。

$$T_{k+1} = \eta T_k \quad (8)$$

η の値として0.95～0.97の値を与える。なお、温度更新は、図7に示したように状態生成時に着目する節点番号あるいは部材番号がそれぞれ一巡した時点で行うことにする。

図10 節点の強制移動

図11 再アニーリング開始時における節点の結合

5.4 アニーリングの終了条件

アニーリングの終了（停止と呼ぶこともある）条件には種々のものが提案されている²²⁾が、ここでは温度 T が指定値まで低下した時点、あるいは近傍解の生成回数が指定回数に達した時点の早い方とする。アニーリングの最終段階では、設計解が最適解に近づいていること、温度が低くなっていることから、近傍解が新設計解として置換される割合が非常に小さくなり、そのため近傍解生成回数がステップ数と比べて急激に増大するという現象が見られる。上述したアニーリング終了条件の後者の方はこの性質に着目したものである。

6. 収束性を高めるための方法

前節までに示した方法を複数の最適化問題に適用したところ、以下に示す条件等を考慮することにより、最適解への収束性が向上した。

6.1 節点移動の拘束

5.1.1項に示した節点座標移動に際して、各トラスユニットを構成する三角形の符号付き面積の符号が変化しない、という拘束を与える。符号付き面積は、三角形の頂点の節点座標が $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ のとき、 $\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}/2$ により求められる。図9の左図において、三角形123の符号付き面積が正であれば、右図では負となる。したがって、符号付き面積の符号に関する制約を与えることにより、交差する部材が現れるのを防止できる。なお、三角形の少なくとも1つの辺の長さが L_{limit} よりも短い場合この条件は考慮しない。交差する部材の存在を許容する問題においては、この拘束は不要である。

6.2 節点の強制移動

本研究で考えている最適化問題では、最終的に得られる解において部材断面積は0あるいは A でなければならない。しかし、部材長が0と限界部材長 L_{limit} の中間の値をとる部材が存在する場合には、断面積が0から A の中間の値をとる部材が存在することになる。そこで、図10に示すように、ある節点を移動させたとき $(a \rightarrow a')$ 、その節点を含む部材の部材長が L_{limit} よりも短くなる場合、その部材長が十分短くなる（4章に示した最小部材長制限値程度）座標まで節点を強制

的に移動させる $(a' \rightarrow a'')$ 。同時に、断面積が減じられる部材の断面積を強制的に $A/10000$ とする。

6.3 節点の結合および再アニーリング

多様なトポロジーの最適トラスを得ることを可能とするためには、初期解における節点数・部材数を十分多くする必要がある。この場合、実際の最適解に比べて節点数が多い局所最適解に収束する可能性が高くなる。そこで、一度アニーリングを行って得られたトラスにおいて、例えば図11左図に示す破線の内円で囲まれた節点群、すなわち節点間の部材長がある指定した値より短い部材で接続される複数の節点を図11右図に示すように結合し1つの節点と考える。節点結合の結果得られたトラスを初期解として再びアニーリングを行う。このようにアニーリングの結果得られた解を初期解として再びアニーリングを行う手法を再アニーリングと呼ぶ²³⁾。一度結合された節点群は再び分離されることはない。節点結合・再アニーリングを繰り返し、節点結合操作時に節点数の減少がなくなれば最適化プロセスを終了する。各再アニーリングにおける終了条件は5.4節に示したものと同一とする。ただし、近傍解生成回数は各再アニーリング開始時に0に戻す。

なお、上述したように節点結合の基準は節点間の部材長が指定値より短いことであるが、6.2節に示した“節点の強制移動”を適用する場合には、全部材は、 L_{limit} より長い部材および部材長が最小部材長制限値程度の部材の2つに分類され、後者の部材長を持つ部材で接続される節点同士を結合することになる。この場合、数値解析上重要なことは、初期に与えた節点間の接続関係を節点結合に応じて変更する必要はないことである。すなわち、再アニーリングの過程において、状態生成時に節点座標を移動させる際には、結合すると想定した節点相互の位置関係を維持しつつ各節点座標を平行移動すればよい。よって、節点間の接続関係など初期に与えた情報を再アニーリング時にも継続して用いることができる。

7. 例題

構築した手法の適用例を4例示す。部材断面積は全部材一様であるとし、部材の交差は許容しない。アニーリングの終了条件は、近傍解生成回数が10000回に達した時点あるいは温度が5以下になる時点の早い方とする。例題1～4において次の値は共通のものを用いる。節点変位指定上限値 $\bar{U}_j = 1.0 \text{ cm}$ 、3.1節に示した限界部材長 $L_{\text{limit}} = 20 \text{ cm}$ 、部材の断面2次半径 $\gamma = 3.1623 \text{ cm}$ 、最小部材長制限値 $D = 0.1 \text{ cm}$ およびヤング係数 $E = 205.8 \text{ GPa}$ 。5.1.2項で述べた部材の強制的除去は例題2でのみ考慮する。すなわち、例題2では4角形トラスユニットの存在を許容する。再アニーリングは例題2, 3および4で行う。

7.1 例題1：片持ち梁型トラス(Type-1)

初期解として図12に示す片持ち梁型トラス(Type-1)の形状最適化を考える。 $W = 300 \text{ cm}$, $H = 150 \text{ cm}$, $P = 980 \text{ kN}$, $R_{\text{max}} = 80 \text{ cm}$ である。表1に示す、初期温度・温度更新係数が異なる4ケースの結果を示す。

図13に総体積の推移を1000ステップまで示す。既に述べたように、ステップ数は解の更新回数に対応しており、近傍解生成回数とは異なる。第1000ステップにおける総体積を比較すると、Case Aが最も小さくなっている。Case Aに対し、Case Bは初期温度が低く、逆にCase Cでは高く、それぞれCase Aより悪い結果となっている。一方、Case Dの初期温度はCase Aと等しいが、温度更新係数が小さく、すなわち徐冷が速く、Case Aよりも悪い結果となっている。図14に各ケース

図 12 片持ち梁型トラス (Type-1)

表 1 初期温度・温度更新係数

	Initial Temp. ; T_0	Temp. update coef. ; η
Case A	3000	0.97
Case B	1500	0.97
Case C	6000	0.97
Case D	3000	0.95

図 13 総体積の推移

図 14 最終形状および総体積の比較

図 15 アニーリング過程におけるトラス形状の推移 (Case A)

(a) 初期形状 (節点数 23) : Volume = 138146 cm³ (b) 第1収束解 (節点数 16) : Volume = 54471 cm³ (c) 第2収束解 (節点数 13) : Volume = 51775 cm³ (d) 第3収束解 (節点数 11) : Volume = 51206 cm³ (e) 最終収束解 (節点数 11) : Volume = 48411 cm³
(破線は準ニュートン法による最適解 : Volume = 48128 cm³)

図 16 片持ち梁型平面トラス (Type-2)

図 17 総体積の推移

最終ステップでのトラス形状および総体積を示す。総体積を比較すると、Case Aが最も小さい。この結果より、初期温度および温度更新係数の違いが最終形状に及ぼす影響が大きいことが分かる。図15にCase Aのアニーリング過程におけるトラス形状の変化を示す。節点位置を明確に示すため、節点位置に○印を記した。トポロジーが変化していく様子が分かる。

7.2 例題2：片持ち梁型トラス (Type-2)

初期解として図16(a)に示す中心軸に対し上下に対称な片持ち梁型トラスの形状最適化を考える。初期解における斜め部材は図中にnodeと示すように交点で接続する (例題3, 4も同様)。W = 600 cm, H = 150 cm, P = 98 kN, $R_{\max} = 40$ cmである。再アニーリングを行い、アニーリング回数は合計4回である。再アニーリング開始時の温度は初期温度と同じとした。同(b), (c), (d), (e)図に各アニーリングにおける収束解を示す。(b), (c), (d)図では節点位置を明確に示すため図15と同様、節点位置に○印を記した。図17に総体積の推移を示す。最終のトラストポロジーはPrager²⁴⁾がMichell²⁵⁾の理論を拡張して求めた“離散化されたMichellトラス”と同一である。

本手法で得られる解は近似最適解であり、より厳密な最適解との対応を明らかにするため、得られたトポロジーのトラスに対して、節点座標を連続変数として準ニュートン法による最適化を行った。得られた形状を図16(e)に破線で示す。本手法による解と良く対応しており、本手法により精度の良い近似最適解が得られていることが分かる。

7.3 例題3および例題4：橋型トラス

橋型トラスの形状最適化を考える。例題3として図18に1つの節点が鉛直荷重を受ける例 (Type-1), 例題4として図19に3つの節点が鉛直荷重を受ける例 (Type-2) を示す。節点移動の過程でトラスの対称性を考慮する。W = 400 cm, P = 98 kN, $R_{\max} = 40$ cmであり、初期解における構造物の高さは100 cmである。図18において水平方向にP/10の水平力を与えるのは、不安定なトラスの生成を避けるためである。いずれも初期構造物に対し体積が半分以下のトラスが得られる。

8. 結論

一様部材断面積を有する平面トラス構造物のトポロジー・節点位置同時最適化問題に対する手法を構築した。例題を通じて本手法の特徴および有効性を示した。得られた結論を以下に示す。

- (1) 短くなった部材の長さに対応して隣接部材の断面積を減じる連続的トポロジー変化モデルとシミュレーテッドアニーリング法の併用は、本問題に対して有効である。
- (2) 連続的トポロジー変化モデルを4角形ユニットの存在を許容するトラスに対して適用するときには、節点座標だけでなく部材の存在を表す変数を導入して、アニーリングの過程で確率的に更新していく必要がある。
- (3) アニーリングに対する温度管理が最終形状に及ぼす影響は大きく、温度管理の方針について検討する必要がある。
- (4) 初期解における節点数・部材数が比較的多く一度のアニーリングで最適解への収束が困難な場合には、アニーリング終了後近接した節点群を結合し再アニーリングする、という操作を繰り返すことにより最適解へ到達することが可能となる。

本論文では変位制約条件のみを考慮したが、本手法は応力制約条件や線形座屈荷重制約条件を考慮した問題にも容易に拡張できる。

(a) 初期形状 (54 部材) ; Volume = 4401 cm³ (b) 最適形状 (16 部材) ; Volume = 1597 cm³

図 18 橋型トラス (Type-1)

(a) 初期形状 (54 部材) ; Volume = 9065 cm³ (b) 最適形状 (19 部材) ; Volume = 3774 cm³

図 19 橋型トラス (Type-2)

参考文献

- 1) U. Kirsh, Integration of reduction and expansion processes in layout optimization, *Structural Optimization*, Vol. 11, pp.13-18, 1996.
- 2) U. Kirsh, Optimal topologies of structures, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.42, pp.223-239, 1989.
- 3) B. H. V. Topping, Mathematical programming techniques for shape optimization of skeletal structures, In: *Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods*, G. I. N. Rozvany (Ed.), pp.349-375, Springer, Wien, 1992.
- 4) E. Sadek, Dynamic optimization of framed structures with variable layout, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp.1273-1294, 1986.
- 5) M. P. Saka, Shape optimization of trusses, *Proc. ASCE*, Vol. 106(ST5), pp.1155-1174, 1980.
- 6) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 71, pp.197-224, 1988.
- 7) 坂本二郎, 尾田十八: 遺伝的アルゴリズムを利用した最適トラス形態決定法, *日本機械学会論文集 (A 編)*, 59 巻, 562 号, pp.156-161, 1993.
- 8) 大崎 純: 遺伝的アルゴリズムに基づく不連続コスト関数を有する構造物の最適設計法, *日本建築学会構造系論文集*, 第 464 号, pp.119-127, 1994.
- 9) M. Ohsaki, Genetic algorithm for topology optimization of trusses, *Comp. and Struct.*, Vol. 57, No. 2, pp.219-225, 1995.
- 10) P. Hajela and E. Lee, Genetic algorithms in truss topological optimization, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 32, No. 22, pp.3341-3357, 1995.
- 11) 三井和男, 登坂宣好: 遺伝的アルゴリズムの空間構造形態解析への応用, *日本建築学会構造系論文集*, 第 484 号, pp.75-83, 1996.
- 12) 大森博司, 河村拓昌, 鬼頭伸彰: 遺伝的アルゴリズムを用いたトラストポロジーの最適設計 (その 1, 2), *日本建築学会大会学術講演梗概集 (B-1)*, pp.417-420, 1998.
- 13) G. Reddy and J. Cagan, An improved shape annealing algorithm for truss topology generation, *J. Mech. Design, ASME*, Vol. 117, No. 2(A), pp.315-321, 1995.
- 14) B. H. V. Topping, A. I. Khan and J. P. De Barros Leite, Topological design of truss structures using simulated annealing, *Struct. Engng. Rev.*, Vol. 8, No. 2/3, pp.301-314, 1996.
- 15) J. J. McKeown, Growing optimal pin-jointed frames, *Structural Optimization*, Vol. 15, pp.92-100, 1998.
- 16) 宮下朋之, 山川 宏, エージェントによる最適設計に関する研究, 第 3 回最適化シンポジウム講演論文集, *日本機械学会*, pp.243-248, 1998.
- 17) M. Ohsaki, Simultaneous optimization of topology and geometry of a regular plane truss, *Comp. and Struct.*, Vol. 66, No. 1, pp.69-77, 1998.
- 18) M. Ohsaki and H. Tagawa, Genetic algorithm for simultaneous optimization of topology and geometry of a regular plane truss, *Proc. OPID 97, Tokyo*, Paper 121, JSME, 1997.
- 19) A. R. Diaz and M. P. Bendsøe, Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method, *Structural Optimization*, Vol. 4, pp.17-22, 1992.
- 20) S. Kirkpatrick, C. Gelatt and M. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science*, Vol. 220, pp.671-680, 1983.
- 21) N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller, Equation of state calculations by fast computing machines, *J. Chemical Physics*, Vol. 21, No.6, pp.1087-1092, 1953.
- 22) B. E. Rosen, 中野良平, シミュレーテッドアニーリングー基礎と最新技術ー, *人工知能学会誌*, Vol. 9, No. 3, pp.365-372, 1994.
- 23) L. Ingber, Very fast simulated re-annealing, *Math. Computer Modeling*, Vol. 12, No. 8, pp.967-973, 1989.
- 24) W. Prager, A note on discretized Michell structures, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.3, pp.349-355, 1974.
- 25) A. G. M. Michell, The limits of economy of materials in frame structures, *Philosophical Magazine*, Vol.8(47), pp.589-597, 1904.
- 26) 田川 浩, 大崎 純: 連続的トポロジー変化モデルおよびシミュレーテッドアニーリング法を用いた平面トラスのトポロジー節点位置同時最適化法, 第 3 回最適化シンポジウム講演論文集, *日本機械学会*, pp.225-230, 1998.

(1998年10月6日原稿受理, 1999年2月12日採用決定)