一般化共役勾配法(GCG法)の有限要素法への適用に関する研究

その4 特異性判定修正式と平面・立体骨組の悪条件下数値実験

APPLICATION OF GENERALIZED CONJUGATE GRADIENT METHOD
TO FINITE ELEMENT ANALYSESPart 4 Modified equations to find singularity and numerical simulations
of plane and space frames in ill-condition

柏木 光博*

Mitsuhiro KASHIWAGI

The generalized conjugate gradient method (the GCG method) is a powerful method to solve large sparse symmetric positive definite linear systems than the direct methods for the solution of linear equations with banded or skylined matrices and is able to check the singularity of matrices. In this paper, modified equations to find the singularity of coefficient matrices, the ordering effect of the GCG method, improvement of diagonal matrix in the incomplete modified Cholesky decomposition and numerical simulations of plane and space frames in ill-condition are given. The results of numerical simulations show that the GCG method is useful in the solution of large sparse systems of equations by the accuracy and stability of this method.

Keywords : *generalized conjugate gradient method, plane and space frame, non-linear analysis, ill-condition*

一般化共役勾配法, 平面・立体骨組, 非線形解析, 悪条件

1. はじめに

構造解析等における有限要素法は、大次元の連立1次方程式あるいは固有値問題に帰着する。不完全修正コレスキ分解を利用するICCG法^{25)~29)}等の前処理を施した共役勾配法系の反復法(POG法)は消去法系解法に比べ主記憶領域を極めて少なくできるため、大次元でスパースな行列に対して特に有効となる。

先に、様々な共役勾配法の変形式を可能とする共役勾配法の一般化式および特異マトリクス判定法を示し、平面・立体骨組の線形および非線形解析に対する特性および適合性などを検証し、GCG法は有効であることを示してきた^{4)~23)}。非線形解析を行う場合、増分ステップ数が増加する毎に骨組の剛性は低下し不安定に近くなり、数値計算上の精度低下につながる。参考文献19)では、長方形の整形骨組で上下水平方向に剛性差のない場合、GCG法の非弾性時での収束に要する反復回数弾性時と比べそれほど増えず、精度も保たれることを報告した。しかし、骨組崩壊時の特異性判定値については、スカイライン法より精度は高いものの一定した判定値を示すほどの定式化はできていなかった。また、梁の軸方向剛性が大きく耐震壁を有する骨組のような剛性差を持たせた骨組ではなかった。

ここでは、特異性判定式についての修正式を提案し、より特異性を判定し易いようにし、以下に対して検証している。剛床の仮定に沿っ

て梁の軸方向剛性を大きくし水平方向自由度に対して対角優位にならない条件数の高い骨組にすると共に、RC造骨組の中間スパンの全層に耐震壁(壁谷沢モデル^{2),3)})を配置し水平方向の剛性差を持たせ、悪条件化した骨組への適合性について非線形モデル数値実験を行っている。また、節点番号の順序付け(オーダーリング)のGCG法に対する影響と全体崩壊型・部分崩壊型・局部崩壊型などの各崩壊型に対する適合性について数値実験し、悪条件骨組に対する精度向上解析法を提案している。

2. 採用したソルバーおよび特異性判定修正式

自由度 n の剛性方程式は

$$Ax = b \quad (1)$$

なる連立1次方程式として表せる。ここに、 A は剛性(係数)マトリクスを、 x は解ベクトルを、 b は右辺ベクトルを示している。GCG法については、参考文献9)に詳述している。今回採用のソルバーとしては、GCG法の中で最も精度が高く安定しているGICCG法を用いる。

弾塑性解析では、多元連立1次方程式を前ステップでのデータを基に解く必要があり、計算中の丸め誤差の累積は解の精度を低下させる。その精度の目安として、剛性マトリクス A の条件数(最大固有値を最小固有値で除した値)がよく用いられる。計算中に混入する丸め誤差

* 九州東海大学工学部建築学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture, School of Engineering, Kyushu Tokai Univ., Dr. Eng.

は連立1次方程式の計算の過程でおよそ条件数倍に拡大される可能性を持つので、条件数の高い悪条件な剛性マトリクスに対する特異性の判定に十分な注意を払う必要がある。参考文献19)の結語の(3)で、特異性判定値はスケーリングの有無などによりその数値が異なることを示した。しかし、スケーリングの有無などの違いにより、特異性判定値を変化させることは数値解析上煩雑である。解法の違いによらない一定の判定値の基に特異行列のほぼ安定した判定を行うことが好ましいので、ここでは特異用数値の見積もり精度を上げることを目的として、以下の特異性判定式を提案する。

式(2)は、参考文献19)を基に共役方向ベクトル p をノーマライズし、より一般性を持たせたものである。参考文献19)の図-3および本論文の図-3から、相対残差ノルム $\|r\|/\|b\|$ (r : 残差ベクトル)

は増分ステップの増加と共に条件数に比例して増大していることがわかる。これを式(2)の分母に持ってくることで特異用数値の見積もり精度を上げ、剛性マトリクスの特異性を数値上判定しやすくした式(3)を提案している。

$$si1 = p^T A p / p^T p \quad (2)$$

$$si2 = (p^T A p / p^T p) / (\|r\| / \|b\|) \quad (3)$$

si1とsi2はGG法の全ての反復過程で計算され、反復毎に特異性の検討を行う⁹⁾。この時、si1とsi2のどちらかを特異用数値とし、この値が特異性判定値よりも小さければ剛性マトリクスは特異とする(骨組は崩壊したものとす)。また、特異用数値によって骨組の崩壊時の特異性を検知できない場合、直前のステップに対する特異用数値の変化を見て対応する方法を利用する¹⁰⁾。以下に、si1とsi2の性状およびそれらの変化量について、数値実験によって検討する。

3. 数値実験

3-1. 実験概要

解析対象としては、GG法系の反復法では建物形状が縦長になる程悪条件化する¹⁰⁾ので、ほぼ同程度の自由度を持つ超縦長モデルからほぼ正方形(立方体)モデルまでの3通りのモデルを、平面および立体骨組について、表-1のように用意した。骨組モデルの1例を図-1に示す。ただし、各種崩壊型に対する特異性判定用のモデルとして3層3スパンの平面骨組を、不完全マトリクスD用として56層1×3スパンの立体骨組を用意した。なお、平面骨組および立体骨組の完全弾塑性解析については参考文献19)の実験概要に記載した方法と同じである。耐震壁については壁谷沢モデル^{2), 3)}を使用し、図-2から分かるように剛性マトリクスを悪条件化した。計算機は、PC9821Rv II 26を使用し、スカラー計算機を対象とした。部材断面の各諸量については、鉄骨モデルは参考文献19)と同一とし、RCモデルは、柱高350cm、スパン長600cm、梁幅40cm(基礎梁50cm)、梁成80cm(基礎梁150cm)、柱幅80cm、柱成80cm、耐震壁板厚20cm、弾性係数210tf/cm²、せん断弾性係数90tf/cm²とした。ただし、立体骨組についてはx、y方向共同の断面性能とした。弾塑性解析での塑性ヒンジ形成は0.95Mp(Mp:全塑性モーメント)以上とした。

荷重は平面・立体骨組共に層せん断力分布係数に比例させて水平方向に作用させ、立体骨組ではねじりが生じるように最外縁1面だけに荷重を作用させた¹⁰⁾(図-1)。また、剛床の仮定に沿うように梁の

表-1 平面・立体骨組の計算対象モデル

タイプ	超縦長モデル	縦長モデル	正方形モデル
平面骨組	I 60×3	40×5	16×14
	II 120×7	80×11	32×29
立体骨組	III 28×3×3	14×3×7	7×7×7

平面骨組: 層数×スパン数, 立体骨組: 層数×X方向スパン数×Y方向スパン数

図-1 計算対象例

図-2 立体骨組の条件数の1例

図-3 増分ステップ毎の相対残差ノルムの変化例

軸方向剛性を大きくする(断面積を実断面積の10倍とする)と共に、平面骨組のスパンの中央に耐震壁を配置し水平方向の剛性差を持たせ、立体骨組でも一最外縁骨組のスパンの中央に耐震壁を配置し剛性

差を持たせた(図-1)。計算は倍精度演算とした。参考文献19)では、計算結果の精度の目安になる収束判定値はGICG法の相対残差ノルムを 10^{-8} 以下になるようにしたが、バンド型やスカイライン型の消去法系解法では弾性範囲で 10^{-11} 程度(図-3は耐震壁を有する立体骨組、28層3×3スパン、の1例)であることを数値実験で経験しており、ここでは消去法解法と同程度もしくはそれ以上の精度を持たせるため収束判定値を 10^{-11} とした。

3-2. 各種崩壊型に対する特異性判定

崩壊メカニズム形成時の鉄筋コンクリート骨組では、脆性的な破壊を行う部材を持たない場合、図-4²⁴⁾の(a), (b), (c), (d), (e), (i)のように、構造物全体またはある階全体が不安定機構を形成する。しかし、脆性的な破壊を行う部材を持つ場合、図-4の(f), (g), (h)のように、構造物のある部分が局部的に崩壊し不安定機構を形成する。これら各種崩壊型に対して、GCG法は特異性を判定できなければならない。ここでは、図-4のような3層3スパンの骨組に対し、式(3)の si_2 を図-5に崩壊型毎に示している。

スカイライン法などの消去法系解法は図-4の各種崩壊型の特異性判定を可能とするが、GCG法のような共役勾配法系解法では、(g)と(h)の特異用数値(微小節点荷重無)は他の崩壊型に比べて大きく崩壊を検知できない。これは、剛性マトリクス中の崩壊要素およびその周辺部の要素が Ap_i の計算に反映されていないことを意味している。 p_0 は右辺ベクトル b を基に作成されるから、これに加えて b の全要素に微小な数値を設定することにより、崩壊要素およびその周辺部の要素が Ap_i の計算に反映される。このような特性に対し、微小な数値として骨組の応力・変形に影響を及ぼさない微小節点荷重($10^{-10} \sim 10^{-14}$, ここでは 10^{-12} を採用)をそれぞれの節点に作用させて解析した結果、図-5(微小節点荷重有)のように、(g), (h)の局部崩壊型における崩壊時の特異用数値は他の崩壊型に比べ小さくなっている。

3-3. 不完全コレスキー分解における不完全対角マトリクス D とCONSTの設定

参考文献9)で示したように、GCG法の不完全逆マトリクスの取り方は、その収束性に大きな影響を与える。特に、不完全逆マトリクスとして不完全修正コレスキー分解を利用する方法は、他の不完全逆マトリクス利用法と比べ、少ない反復回数と短い計算時間で安定した計算を可能としている^{14), 19)}。また、分解時においても、新たに作成するのは不完全対角マトリクスだけであり、剛性マトリクスの対角要素をCONST倍して不完全対角マトリクスの要素を計算している²⁰⁾。参考文献14)と19)で行った長方形の整形骨組で剛性差のない場合の数値実験では、CONSTは1~1.05間で最も反復回数は少ない。よって、CONST=1として増分ステップ毎の不完全対角マトリクスの各要素を計算してきた。しかし、骨組が崩壊に近づくにつれ剛性マトリクスは悪条件化するので、増分ステップ毎の剛性マトリクスを用いた不完全対角マトリクスも悪条件化しGCG法の反復回数は極端に多くなり、場合によっては収束しないときもある。不完全逆マトリクスは理論上正定値であれば何でもよい。不完全コレスキー分解を利用する不完全逆マトリクスは弾性時では特に剛性マトリクスとの積が単位マトリクスに近い。しかし、骨組は崩壊に近づくにつれ悪条件化し反復回数は多くなるの

で、悪条件化していないステップでの不完全逆マトリクスを利用する方法を考えてもよい。ここでは、図-1のような耐震壁を有する立体骨組について、縦長さが特に大きい場合と小さい場合の不完全対角マトリクスの収束性を述べる^{20), 22)}。図-6は、増分毎に不完全対角マトリクスを計算する方法(図中のステップ毎 D)と初期ステップの不完全対角マトリクスを利用する方法(図中の初期ステップ D)による増分ステップ毎の反復回数を、4通りのCONST毎に描いている。7×7×7では2種類の方法による差は殆どないが、CONSTの値によっては増分ステップ数に差を生じている。縦長度の大きい56×1×3では増分ステップ毎 D では、最大反復回数制限(自由度 n の3倍)でも収束しないが、初期ステップ D では収束し、特にCONST=1.04付近で反復回数は少なくなっている。

初期ステップ D を利用し、CONST=1.04として不完全対角マトリクスを計算する方法は、本例題のような縦長比の大きい悪条件な骨組に対しても安定した計算を可能にしている。

3-4. オーダーリングの影響

完全弾塑性解析等の非線形モデル数値実験を行うとき、節点番号のオーダーリング(順序付け)により特異用数値は変化する場合があるので、図-7のようにオーダーリング(HN, HI, DN, VN,

図-4 RC構造物の各種崩壊型

図-5 各崩壊型に対する特異用数値

図-6 不完全対角マトリクスとCONST

VI) した鉄骨骨組について検討する。ここでの特異用数値は式(3)によった。図-8に数値実験結果を示す^{21), 23)}。崩壊寸前までは、5通りの方法共殆ど特異用数値は変化しない。崩壊時のステップでは方法により若干の差を生じている。特に、HI (最上階左端節点から右に向かって連続して番号を付す方法) とVI (最上階左端節点から下に向かって連続して番号を付す方法) は他の方法よりやや低めの数値を示している。GICCG法のような反復法においては、節点と節点のオーダーリングに連続性を持たせることにより精度向上を図れることを示している。しかし、全ての方法で特異用数値は 10^{-16} 以下であることを考慮すると、どの方法でも特異性を確実に判定できるものと思われる。

3-5. 悪条件化骨組における特異性判定

参考文献(19)において、長方形の整形骨組に対するGCG法の有効性を示したが、スケーリングの有無などにより特異性判定値を変更

図-7 オーダーリングモデル図

しなければならない。ここでは、そのような不便さを解消し安定した判定を可能と予想される式(2)と式(3)によって検討する。弾塑性解析時における崩壊時の係数マトリクスの特異性判定について、GICCG法で数値実験した結果を図-9~10に示す。図中のNは純ラーメンで梁の軸方向伸縮を考慮した骨組を、Xは純ラーメンで梁の軸方向剛性を10倍した骨組を、Wは平面骨組ではスパン中央に耐震壁を配置し(図-1)、梁の軸方向剛性をXと同一とし、立体骨組では一最外縁骨組のスパン中央に耐震壁を配置し、梁の軸方向剛性をXと同一にした骨組を意味している。それぞれのタイプ、モデル毎のN, X, Wについて、si1とsi2の2通りの方法を比較している。また、NからXそしてWへと悪条件化している(図-2参考)。

平面骨組では、WとXはほぼ同様なsi1とsi2の値を、Nはそれより小さい値を示している。また、si2はsi1よりかなり小さい値を示している。立体骨組では、XとNはほぼ同様なsi1とsi2の値を、Wはそれより小さい値を示している。また、si2は平面骨組と同様にsi1よりかなり小さい値を示している。

悪条件化した平面・立体骨組共、si1では特異性判定の設定値によっては特異性を見落とす可能性がある。しかし、全モデルでのsi2は 10^{-19} 以下であり、設定値を 10^{-16} 程度とすれば特異性をほとんど判定できるものと思われる。

本数値実験で行った弾塑性解析では、増分ステップ毎に特異用数値を計算でき、図-9、1.0から崩壊時の特異用数値は前ステップでの特異用数値から大きく変化していることが分かる。崩壊時の特異用

図-8 オーダーリング毎の特異用数値

図-9 平面骨組のsi1とsi2

図-10 立体骨組のsi1とsi2

数値が特異用判定値より大きいとき、この特性を利用して崩壊を判定することが可能である。また、崩壊寸前のステップから崩壊時のステップへの特異用数値の減少量は、平面・立体骨組ともsi2はsi1より大きく特異性の判定を容易にしている。しかし、耐震壁を有する平面骨組80層11スパンでは、減少量はsi1で 10^2 程度si2で 10^3 程度と小さく、特異性判定のための減少量判定値次第では見落とす可能性がある。よって、特異用数値とその減少量の両方を検討しながら特異性（骨組の崩壊）を判定する必要があると考える。

3-6. 完全弾塑性解析における荷重変位曲線

以上の数値実験結果を踏まえて、ここでは表-1の耐震壁を有する立体骨組の3モデルについての荷重変位曲線（上端荷重とその作用方向変位曲線、図-1参照）を図-11に示す。ただし、特異性判定値を 10^{-16} に、特異用数値減少量判定値を 10^3 とした。不完全逆マトリクスとして初期ステップにおける不完全コレスキー分解による方法を用いた。図から分かるように本例題ではそれぞれの特異性を検知できている。また、修正コレスキー分解（直接法）を用いた解析でも同じ結果を得ている。

図-11 立体骨組の荷重変位曲線

4. 結語

提案法は非線形解析などにみられる崩壊付近の係数マトリクスの特異性を反復毎に判定できるので、直接法と同様に条件の悪い連立1次方程式を計算できる。

ここでは、悪条件な平面骨組および立体骨組について水平力を作用させ弾塑性解析を行い検討した結果、本例題のような骨組に対して以下のことが判った。

- (1) 各種崩壊型に対する特異用判定を確実にを行うためには、各節点に微小節点荷重を作用させることが有効である。
- (2) 増分毎の不完全マトリクスの取り方として、初期値 D を利用する方法は縦長比の非常に大きい悪条件な骨組に対しても安定した計算を可能にする。また、 $\text{const}=1.04$ とすることにより、縦長比の大きい骨組の反復回数を減少させることができる。
- (3) オーダーリングとして、GICG法のような反復法においては節点の連続性を持たせることにより崩壊時特異用数値を小さく見積もれるが、全てのオーダーリング法で特異用数値は 10^{-16} 以下であることを考慮すると、どのオーダーリングでも特異性を確実に判定できるものと思われる。
- (4) 平面・立体骨組共、si1では特異性判定の設定値によっては特異性を見落とす可能性がある。si2では全モデルで 10^{-19} 以下であり、設定値を 10^{-16} 程度とすれば特異性を見誤ることはないと思われる。しかし、特異用数値とその減少量の両方を検討しながら特異性を判定する必要があると考える。

ただし、ここでは骨組の崩壊を前提として数値実験しており、大変形問題などの増分型つりあい経路における極限点以降を含めた解析法については、剛性マトリクスの0固有値問題の観点から誘導した共役勾配法用の式を得ており、今後別の形で発表する予定である。

参考文献

- 1) 青山博之, 上村智彦: マトリクス法による構造解析, 培風館, 1992.
- 2) 青山博之, 小谷俊介, 壁谷沢寿海: -日米共同研究- 鉄筋コンクリート造実大7層試験体の耐震性に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, p p. 1583-1584, 1982. 10.
- 3) 青山博之: 鉄筋コンクリート建物の終局強度型耐震設計法, 技報堂出版, 1990.
- 4) 柏木光博, 右田健児: 修正CG法による剛節骨組の応力解析, 構造工学論文集, Vol. 34B, pp. 105-111, 1988.
- 5) 柏木光博: 修正共役勾配法による平面骨組の応力解析, 日本建築学会学術講演梗概集, pp. 967-968, 1989. 10.
- 6) 柏木光博: 一般化CG法による平面骨組の応力解析, 九州東海大学工学部紀要, Vol. 16, pp. 79-84, 1989.
- 7) 柏木光博, 松山輝男: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その1・2, 日本建築学会研究報告 (中国・九州支部), 第9号・1, pp. 225-232, 1993. 3.
- 8) 柏木光博, 松山輝男: GCG法 (一般化共役勾配法) の有限要素法への適用に関する研究, その1・2, 日本建築学会大会学術講演梗概集A, p p. 1639-1642, 1993. 9.

- 9) 柏木光博, 松山輝男: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究 (その1 理論およびアルゴリズムの概要), 日本建築学会構造系論文集, pp. 87-95, 1994. 2.
- 10) 柏木光博, 松山輝男, 廣田秀生, 鹿山剛: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その3・4・5, 日本建築学会研究報告 (九州支部), 第34号・1, pp. 201-212, 1994. 3.
- 11) 柏木光博, 松山輝男, 鹿山剛, 岡田真一: GCG法 (一般化共役勾配法) の有限要素法への適用に関する研究, その3・4・5, 日本建築学会大会学術講演梗概集A, pp. 1699-1704, 1994. 9.
- 12) 柏木光博, 松山輝男, 鹿山剛, 岡田真一: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その6・7, 日本建築学会研究報告 (九州支部), 第35号・1, pp. 285-292, 1995. 3.
- 13) 柏木光博, 松山輝男, 鹿山剛, 岡田真一: GCG法 (一般化共役勾配法) の有限要素法への適用に関する研究 (その6・7・8, 日本建築学会大会学術講演梗概集A-2, pp. 377-382, 1995. 8.
- 14) 柏木光博, 松山輝男: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その2 平面・立体骨組の線形モデル数値実験, 日本建築学会構造系論文集, pp. 107-116, 1995. 8.
- 15) 柏木光博, 高谷幸喜, 岡田真一: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その8, 日本建築学会研究報告 (中国・九州支部), 第10号, pp. 317-320, 1996. 3.
- 16) 柏木光博: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その8, 日本建築学会研究報告 (中国・九州支部), 第10号, pp. 317-320, 1996. 3.
- 17) 柏木光博: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その9, 日本建築学会研究報告 (九州支部), 第36号, pp. 653-656, 1997. 3.
- 18) 柏木光博: GCG法 (一般化共役勾配法) の有限要素法への適用に関する研究, その9, 日本建築学会大会学術講演梗概集A-2, pp. 401-402, 1997. 9.
- 19) 柏木光博: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その3 平面・立体骨組の非線形モデル数値実験, 日本建築学会構造系論文集, pp. 131-137, 1997. 10.
- 20) 柏木光博, 濱田敏久, 徳永真由美: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その10, 日本建築学会研究報告 (九州支部), 第37号1, pp. 321-324, 1998. 3.
- 21) 柏木光博, 徳永真由美, 濱田敏久: 一般化共役勾配法 (GCG法) の有限要素法への適用に関する研究, その11, 日本建築学会研究報告 (九州支部), 第37号1, pp. 325-328, 1998. 3.
- 22) 柏木光博, 濱田敏久, 徳永真由美: GCG法 (一般化共役勾配法) の有限要素法への適用に関する研究, その10, 日本建築学会大会学術講演梗概集A-2, pp. 421-422, 1998. 9.
- 23) 柏木光博, 徳永真由美, 濱田敏久: GCG法 (一般化共役勾配法) の有限要素法への適用に関する研究, その11, 日本建築学会大会学術講演梗概集A-2, pp. 423-424, 1998. 9.
- 24) 建設省住宅局建築指導課: 構造計算指針・同解説 1988年版, 日本建築センター, 1990.
- 25) 三好俊郎, 高野直樹, 吉田有一郎: スパコンによる大規模構造解析 (ICCG法による有限要素解析), 日本機械学会論文集 (A編), Vol.

53, No. 492, pp. 1607-1613, 1987.

26) 村田健郎, 小国力三好俊郎, 小柳義夫編著: 工学における数値 シミュレーション・スーパーコンピュータの応用, 丸善, 1988.

27) 吉田裕, 依知川哲治, 中川昌弥: ICG法の有限要素方程式への適用に関する一検討, 構造工学論文集, Vol. 36A, pp. 255-262, 1990.

28) 吉田裕, 中川昌弥, 田中知足: 共役勾配法のスーパーコンピュータ適合アルゴリズム, 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 381-390, 1991.

29) 吉田裕, 中川昌弥, 田中知足: 共役勾配法を基礎とする連立一次方程式解法の効率化に関する考察, 土木学会論文集, No. 437/I-17, pp. 173-182, 1991.

(1998年8月10日原稿受理, 1999年2月25日採用決定)