集中質量を有する Mindlin 平板の自由振動解析

FREE VIBRATION ANALYSIS OF MINDLIN PLATES WITH A LUMPED MASS

内山 武司^{*1}, 上田 正生^{*2}, 大家 史^{*3}
Takeshi UCHIYAMA, Masaiki UEDA and Fumito OYA

Based on Mindlin's plate theory, it is presented a free vibration analysis of plates with a lumped mass. By using the method of superimposition, it is shown that solutions which satisfy both the differential equation and the boundary condition are obtained. The rectangular plates under consideration are as follows: a) all edges simply supported and b) all edges built-in. Eigenvalues of four digit accuracy are provided for a wide range of plate aspect ratio. Numerical results are compared with those by Rayleigh-Ritz method and interpolative values using Dunkerley's equation, to verify the accuracy of the proposed method.

Keywords: free vibration, Mindlin's plate, lumped mass, superimposition method, Rayleigh-Ritz method, Dunkerley's equation, eigenvalue
自由振動、Mindlin平板、集中質量、重ね合せ法、Rayleigh-Ritz法、Dunkerley式、固有値

1. はじめに

平板の曲げ振動理論は、Kirchhoff仮定に基づく古典理論と、剪断変形と回転慣性を考慮したMindlin理論¹⁾に大別される。平板の曲げ自由振動解析として代表的なものとして、D. J. Gorman²⁾の重ね合せ法を用いた古典理論解があり、種々の境界条件を有する長方形平板について系統的に固有振動数とモード形状を求め、ほぼ整備された状態にある。他方、Mindlin平板の自由振動解についても、筆者等³⁻⁸⁾が各種の境界条件を有する長方形板を対象に、重ね合せ法を使用した級数解を求めてきた。これとは別個に、K. M. Liew等⁹⁾も代数関数を使用したRitz解を求めている。これ等の自由振動解析に共通していることは、固有振動解に影響を及ぼす重要な因子の一つである質量分布を平板内で一定、即ち一様分布質量を前提にしていることである。実際の構造物の床スラブ等では、積載荷重が偏在することもあり質量分布が非一様分布となる場合がある。このようなことをD. J. Gormanも指摘しているが、筆者等の知る限り、質量分布が偏在したり集中する場合の解は提示されていないようである。

本報告は、平板の質量が自重のように一様分布するのに加え、積載荷重等が集中する場合を想定し、固有振動解に及ぼす集中質量の影響を検討するものである。解析方法は、既報告⁸⁾の「点支持を有するMindlin平板の自由振動解析」に倣い、周辺単純支持と周辺固

定の両長方形平板について、重ね合せ法を用いた級数解を求めると共に、代数関数を使用したRayleigh-Ritz解との比較から、提示した解析方法の妥当性を検討したものである。また、集中質量が平板の基本振動数に及ぼす影響をDunkerley式¹⁰⁾を利用した補間式で近似的に推定できることを確認し、集中質量を伴った周辺単純支持板と周辺固定板の振動特性を明らかにしたものである。

2. 基礎微分方程式と境界条件

2.1) 基礎微分方程式

平板の自由振動方程式で、平板中央面の変位成分を

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向: } & U(x, y, z, t) = z \cdot \theta_x(x, y) \cdot \cos \omega t \\ y \text{ 方向: } & V(x, y, z, t) = z \cdot \theta_y(x, y) \cdot \cos \omega t \\ z \text{ 方向: } & W(x, y, z, t) = w(x, y) \cdot \cos \omega t \end{aligned} \right\} (1)$$

但し、 θ_x, θ_y, w : x, y 方向の回転角、 z 方向の変位
 ω, t : 角振動数、時間

とおくと、平板の中央面に垂直な方向の分布荷重 $q(x, y, t)$ が作用する場合、剪断変形と回転慣性の効果を考慮した平板の自由振動に関する基礎微分方程式が得られる¹⁾。

$$\frac{D}{2} \left\{ \nu_1 \Delta \theta_x + \nu_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} - \kappa G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) + \frac{\omega^2 \rho h^3}{12} \theta_x = 0 \quad \left| \right.$$

*1 北海道大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 教授・工博

*2 北海道大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻
助教授・工博

*3 北海道大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 大学院生

Prof., Graduate School of Hokkaido Univ., Dr. Eng.

Assoc. Prof., Graduate School of Hokkaido Univ., Dr. Eng.

Graduate Student, Graduate School of Hokkaido Univ.

$$\frac{D}{2} \left\{ \nu_1 \Delta \theta_y + \nu_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} - \kappa G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \frac{\omega^2 \rho h^3}{12} \theta_y = 0 \quad (2)$$

$$\kappa G h (\Delta w + \Phi) + \omega^2 \rho h w + q = 0$$

但し、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $\nu_1 = 1-\nu$, $\nu_2 = 1+\nu$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad \Phi = \partial \theta_x/\partial x + \partial \theta_y/\partial y$$

E, G, ν : ヤング係数、剪断弾性係数、ポアソン比

ρ, h, κ : 密度、板厚、剪断補正係数

また、平板の内部に生ずる曲げ・振りモーメント M_x, M_y, M_{xy} と剪断力 Q_x, Q_y は、既報告³⁾ に記した通りである。

平板上に位置する集中質量 M の変位成分 MW は、平板と同位相で振動することから、次のように表示できる。

$$MW = M w \cdot \cos \omega t \quad (3)$$

従って、集中質量の慣性力による集中荷重 P は、

$$P = M \omega^2 \cdot M w \cdot \cos \omega t \quad (4)$$

で表される。

2.2) 境界条件と連続条件

周辺単純支持と周辺固定の両平板の座標を図-1のように設定すると、境界条件は無次元化した座標表示で次のようになる。

周辺単純支持板³⁾ :

$$\left. \begin{aligned} w(0, \eta) = M_x(0, \eta) = M_{xy}(0, \eta) = 0 \\ w(1, \eta) = M_x(1, \eta) = M_{xy}(1, \eta) = 0 \\ w(\xi, 0) = M_y(\xi, 0) = M_{xy}(\xi, 0) = 0 \\ w(\xi, 1) = M_y(\xi, 1) = M_{xy}(\xi, 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

周辺固定板²⁾ :

$$\left. \begin{aligned} w(0, \eta) = \theta_x(0, \eta) = \theta_y(0, \eta) = 0 \\ w(1, \eta) = \theta_x(1, \eta) = \theta_y(1, \eta) = 0 \\ w(\xi, 0) = \theta_x(\xi, 0) = \theta_y(\xi, 0) = 0 \\ w(\xi, 1) = \theta_x(\xi, 1) = \theta_y(\xi, 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

また、集中質量の変位は、平板との接触問題となることから、次のようになる。

$$MW = w(\xi_M, \eta_M) \quad (7)$$

但し、 ξ_M, η_M : 集中質量の作用する無次元化した座標位置

3. 集中質量を有する平板の固有振動解

3.1) 非斉次解

集中質量の作用する位置で、集中荷重 P をフーリエ級数で表示すると、次のようになる。

$$q(\xi, \eta, t) = \frac{4P}{a^2 \phi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \mu_m \xi_M \sin \mu_n \eta_M \cdot \sin \mu_m \xi \sin \mu_n \eta \cdot \cos \omega t \quad (8)$$

但し、 $\phi = b/a$, $\mu_m = m\pi$, $\mu_n = n\pi$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$

これから、変位成分に関する非斉次解は、以下となる³⁾。

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{4Pa^2}{\phi D} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{mn} \sin \mu_m \xi \sin \mu_n \eta}{(\mu_m^2 + \alpha_n^2 - \Omega_1)(\mu_m^2 + \alpha_n^2 - \Omega_2)} \\ \theta_x &= \frac{4Pa}{\phi D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_{xmn} \cos \mu_x \xi \sin \mu_n \eta}{(\mu_m^2 + \alpha_n^2 - \Omega_1)(\mu_m^2 + \alpha_n^2 - \Omega_2)} \\ \theta_y &= \frac{4Pa}{\phi D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_{ymn} \sin \mu_x \xi \cos \mu_n \eta}{(\mu_m^2 + \alpha_n^2 - \Omega_1)(\mu_m^2 + \alpha_n^2 - \Omega_2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

但し、 $\alpha_n = \mu_n/\phi$, $\lambda^2 = \omega^2 \rho h a^4/D$

$$L_{mn} = \left\{ 1 + \frac{\mu_m^2 + \alpha_n^2}{6\nu_1 \kappa} \frac{h^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{72\nu_1 \kappa} \frac{h^4}{a^4} \right\} \sin \mu_m \xi_M \sin \mu_n \eta_M$$

図-1 平板の全体座標と無次元化座標

$$\Theta_{xmn} = \mu_m \sin \mu_m \xi_M \sin \mu_n \eta_M, \quad \Theta_{ymn} = \alpha_n \sin \mu_m \xi_M \sin \mu_n \eta_M$$

$$\Omega_{1,2} = \frac{\lambda^2(2+\nu_1 \kappa)}{24\nu_1 \kappa} \frac{h^2}{a^2} \pm \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda^4(2-\nu_1 \kappa)}{576\nu_1^2 \kappa^2} \frac{h^4}{a^4}}$$

但し、 Ω_1 は正符号、 Ω_2 は負符号である。

これは、周辺単純支持と固定の両平板について共通した境界条件

$$w(0, \eta) = w(1, \eta) = w(\xi, 0) = w(\xi, 1) = 0 \quad (10)$$

を満たしている。

3.2) 斉次解

斉次解は、境界条件(10)の他に、周辺単純支持板について、

$$M_x(0, \eta) = M_x(1, \eta) = M_y(\xi, 0) = M_y(\xi, 1) = 0$$

また、周辺固定板について、

$$\theta_x(\xi, 0) = \theta_x(\xi, 1) = \theta_y(0, \eta) = \theta_y(1, \eta) = 0$$

の条件を充足する斉次解は、次の形で得られる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{a^2}{D} \left[\sum_m \{ {}_1X_m \cdot {}_1w_m(\eta) + {}_2X_m \cdot {}_2w_m(1-\eta) \} \sin \mu_m \xi \right. \\ &\quad \left. + \sum_n \{ {}_1Y_n \cdot {}_1w_n(\xi) + {}_2Y_n \cdot {}_2w_n(1-\xi) \} \sin \mu_n \eta \right] \\ \theta_x &= \frac{a}{D} \left[\sum_m \{ {}_1X_m \cdot {}_1\theta_{xm}(\eta) + {}_2X_m \cdot {}_2\theta_{xm}(1-\eta) \} \cos \mu_m \xi \right. \\ &\quad \left. + \sum_n \{ {}_1Y_n \cdot {}_1\theta_{xn}(\xi) + {}_2Y_n \cdot {}_2\theta_{xn}(1-\xi) \} \sin \mu_n \eta \right] \\ \theta_y &= \frac{a}{D} \left[\sum_m \{ {}_1X_m \cdot {}_1\theta_{ym}(\eta) + {}_2X_m \cdot {}_2\theta_{ym}(1-\eta) \} \sin \mu_m \xi \right. \\ &\quad \left. + \sum_n \{ {}_1Y_n \cdot {}_1\theta_{yn}(\xi) + {}_2Y_n \cdot {}_2\theta_{yn}(1-\xi) \} \cos \mu_n \eta \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

但し、単純支持板の場合 : $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

固定板の場合 : $m, n = 1, 2, 3, \dots$

3.3) 未定係数の決定

集中質量を有する周辺単純支持平板と周辺固定平板の固有振動数と固有振動モードは、未充足の境界条件、即ち

周辺単純支持板の場合 :

$$M_{xy}(0, \eta) = M_{xy}(1, \eta) = M_{xy}(\xi, 0) = M_{xy}(\xi, 1) = 0$$

周辺固定板の場合 :

$$\theta_x(0, \eta) = \theta_x(1, \eta) = \theta_y(\xi, 0) = \theta_y(\xi, 1) = 0$$

と、平板と集中質量の接触条件

$$MW = {}_0w(\xi_M, \eta_M) + {}_1w(\xi_M, \eta_M)$$

を用い、フーリエ正弦・余弦級数に展開して得られる下記の形の固有方程式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_1X_m \\ {}_2X_m \\ {}_1Y_n \\ {}_2Y_n \\ P \end{Bmatrix} = 0 \quad (12)$$

を解くと求まる。

3.4) Rayleigh-Ritz法による固有振動解

集中質量を有するMindlin平板の固有振動解析を行うに当たって、本報告で提示した重ね合せ法を用いた級数解法の精度を確認するため、代数関数を使用したRayleigh-Ritz法による固有振動解を求めた。この場合、使用したエネルギー汎関数は

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int \int \left[D \left\{ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 - 2\nu_1 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} \right. \\ \left. + \kappa G h \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right)^2 \right\} \right. \\ \left. - \omega^2 \rho h \left\{ w^2 + \frac{h^2}{12} (\theta_x^2 + \theta_y^2) \right\} \right] dx dy \\ - \frac{1}{2} \omega^2 M w(x_M, y_M)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

で表され、多項式は既報告⁸⁾に倣い各変数共、55項を採用した。

4. 計算結果の比較と考察

4.1) 計算の概要

数値計算は、ポアソン比を $\nu=0.2$ 、剪断補正係数を $\kappa=5/6$ として行い、固有振動数を下式で無次元化し、 λ の値で整理する。

$$\omega = \frac{\lambda}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (14)$$

また、集中質量を有する平板の振動性状を検討するために、変数として下記の量を設定した。

平板の辺長比： $\phi = b/a = 1.0, 1.2, 1.5, 2.0$

平板の板厚比： $h/a = 0.010, 0.025, 0.050, 0.075, 0.100$

集中質量の比： $k = M/abh\rho = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$

また、集中質量の作用する位置を

$x_M/a = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ $y_M/b = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$

の範囲で移動させ、周辺単純支持と固定平板について、6次迄の固有振動数を求めた。尚、級数は各61項を採用した(付録を参照)。

4.2) 集中質量を有する周辺単純支持平板

表-1は、集中質量を伴った周辺単純支持平板の固有振動の内、基本振動数(1次固有振動数)の一部を掲げたものである[高次の固有振動数については、紙面の都合上、割愛する]。提示した解法の妥当性を検討するため、代数関数を使用したRayleigh-Ritz解との比較を、集中質量が平板の中央点に作用する場合について行った。図-2は、両解法から得られた結果を比較したもので、両者は、ほぼ一致し、その差は最大でも1~2%程度であり、図上では差異を認められない。基本振動数に及ぼす集中質量の影響は、平板の中央部に集中質量が作用する場合、比較的小さな質量でも、急激な基本振動

図-2 周辺単純支持平板の基本振動数に及ぼす集中質量の影響(集中質量の作用位置: 平板の中央点)

図-3 集中質量を有する周辺単純支持平板の基本振動数の補間(集中質量の作用位置: 平板の中央点)

数の低下が見られ、集中質量の占める割合が増加するに従って低下の度合いは鈍化する。当然のことながら、集中質量が支持辺の近傍に作用する場合、基本振動数の低下する割合は、中央部に作用する場合に比べて小さくなる。

基本振動数に及ぼす集中質量の影響は、S. Dunkerleyの式¹⁰⁾を利用し、2点間を補間すると、ほぼ推定することができる。これは、集中質量を伴わない平板の基本固有振動数と、集中質量を伴った平

板の固有振動数から、集中質量単独による振動数を分離し、この値を用いて、任意の集中質量に対する固有振動数を推定するものである。即ち集中質量単独による角振動数の推定は、Dunkerley式から

$$\frac{1}{\omega^2} \approx \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_p^2} \quad (15)$$

但し、 ω ：集中質量を伴った平板の角振動数

ω_0 ：集中質量を伴わない平板の角振動数

表-1 集中質量を有する周辺単純支持平板の基本振動数 λ （単位： $\omega = \lambda\sqrt{D/\rho h/a^2}$ ）

$\frac{b}{a}$	$\frac{y_M}{b}$	$\frac{M}{abh\rho}$	$h/a = 0.01$					$h/a = 0.05$					$h/a = 0.10$				
			x_M/a					x_M/a					x_M/a				
			0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	0.5	0.1	16.51	16.71	17.32	18.28	19.24	16.07	16.26	16.85	17.77	18.71	15.35	15.54	16.09	16.96	17.87
		0.5	11.02	11.27	12.13	14.01	17.48	10.70	10.94	11.76	13.54	16.90	10.13	10.34	11.08	12.68	15.85
		1.0	8.435	8.645	9.382	11.11	15.32	8.184	8.382	9.075	10.69	14.64	7.706	7.881	8.487	9.879	13.28
	0.6	0.1	16.71	16.90	17.49	18.39	19.28	16.26	16.45	17.01	17.88	18.75	15.54	15.71	16.24	17.06	17.91
		0.5	11.27	11.52	12.38	14.24	17.64	10.94	11.18	11.99	13.76	17.05	10.34	10.52	11.29	12.87	15.99
		1.0	8.645	8.855	9.592	11.32	15.53	8.382	8.579	9.270	10.88	14.83	7.881	8.054	8.656	10.04	13.44
	0.7	0.1	17.32	17.49	17.98	18.70	19.37	16.85	17.01	17.48	18.18	18.84	16.09	16.24	16.68	17.35	18.00
		0.5	12.13	12.38	13.23	15.03	18.09	11.76	11.99	12.79	14.50	17.50	11.08	11.29	12.00	13.53	16.44
		1.0	9.382	9.592	10.33	12.06	16.20	9.075	9.270	9.957	11.56	15.45	8.487	8.656	9.244	10.60	13.95
	0.8	0.1	18.28	18.39	18.70	19.13	19.50	17.77	17.88	18.18	18.60	18.96	16.96	17.06	17.35	17.76	18.12
0.5		14.01	14.24	15.03	16.60	18.78	13.54	13.76	14.50	16.00	18.19	12.68	12.87	13.53	14.91	17.19	
1.0		11.11	11.32	12.06	13.76	17.47	10.69	10.88	11.56	13.12	16.68	9.879	10.04	10.60	11.89	15.03	
0.9	0.1	19.24	19.28	19.37	19.50	19.60	18.71	18.75	18.84	18.96	19.06	17.87	17.91	18.00	18.12	18.22	
	0.5	17.48	17.64	18.09	18.78	19.41	16.90	17.05	17.50	18.19	18.87	15.85	15.99	16.44	17.19	17.98	
	1.0	15.32	15.53	16.20	17.47	19.08	14.64	14.83	15.45	16.68	18.44	13.28	13.44	13.95	15.03	17.13	
ref.	0.0	19.63					19.10					18.26					
1.2	0.5	0.1	13.99	14.15	14.66	15.47	16.31	13.66	13.82	14.31	15.09	15.91	13.13	13.28	13.73	14.48	15.28
		0.5	9.325	9.516	10.18	11.69	14.70	9.092	9.274	9.906	11.34	14.25	8.663	8.828	9.399	10.69	13.44
		1.0	7.134	7.290	7.844	9.185	12.69	6.949	7.096	7.619	8.880	12.18	6.593	6.723	7.186	8.289	11.15
	0.6	0.1	14.17	14.32	14.80	15.57	16.34	13.84	13.99	14.45	15.19	15.94	13.29	13.43	13.87	14.57	15.31
		0.5	9.554	9.744	10.41	11.90	14.84	9.312	9.492	10.12	11.54	14.39	8.864	9.027	9.595	10.88	13.58
		1.0	7.328	7.484	8.038	9.379	12.88	7.133	7.280	7.802	9.061	12.35	6.753	6.888	7.347	8.444	11.30
	0.7	0.1	14.70	14.83	15.23	15.84	16.42	14.35	14.48	14.86	15.45	16.02	13.77	13.90	14.26	14.83	15.39
		0.5	10.33	10.52	11.17	12.62	15.26	10.05	10.23	10.85	12.22	14.81	9.541	9.701	10.26	11.50	14.00
		1.0	8.001	8.157	8.714	10.06	13.49	7.772	7.919	8.438	9.687	12.92	7.328	7.455	7.905	8.979	11.78
	0.8	0.1	15.51	15.60	15.86	16.21	16.53	15.13	15.22	15.47	15.82	16.13	14.53	14.61	14.85	15.19	15.50
0.5		11.98	12.16	12.78	14.04	15.89	11.63	11.80	12.38	13.59	15.45	10.98	11.13	11.66	12.77	14.68	
1.0		9.545	9.707	10.27	11.60	14.67	9.232	9.380	9.900	11.12	14.06	8.612	8.737	9.174	10.20	12.80	
0.9	0.1	16.32	16.35	16.43	16.53	16.61	15.92	15.95	16.03	16.13	16.22	15.29	15.32	15.40	15.50	15.58	
	0.5	14.89	15.01	15.37	15.93	16.46	14.46	14.58	14.94	15.49	16.05	13.69	13.80	14.16	14.75	15.38	
	1.0	13.16	13.32	13.85	14.85	16.17	12.66	12.81	13.30	14.27	15.69	11.64	11.77	12.19	13.06	14.73	
ref.	0.0	16.64					16.25					15.61					
1.5	0.5	0.1	11.92	12.05	12.46	13.15	13.90	11.69	11.82	12.21	12.88	13.62	11.31	11.42	11.80	12.44	13.17
		0.5	7.899	8.030	8.502	9.644	12.29	7.737	7.860	8.307	9.394	11.96	7.423	7.534	7.938	8.923	11.32
		1.0	6.028	6.130	6.505	7.468	10.29	5.898	5.994	6.346	7.254	9.908	5.638	5.722	6.033	6.834	9.148
	0.6	0.1	12.07	12.20	12.59	13.24	13.93	11.84	11.96	12.34	12.97	13.65	11.45	11.56	11.92	12.53	13.20
		0.5	8.105	8.236	8.708	9.844	12.43	7.935	8.059	8.505	9.585	12.09	7.606	7.718	8.119	9.097	11.46
		1.0	6.203	6.305	6.681	7.645	10.46	6.066	6.161	6.514	7.420	10.07	5.790	5.874	6.184	6.979	9.282
	0.7	0.1	12.54	12.64	12.97	13.49	14.01	12.29	12.40	12.71	13.22	13.73	11.88	11.98	12.28	12.77	13.27
		0.5	8.796	8.929	9.401	10.51	12.86	8.601	8.726	9.171	10.22	12.51	8.222	8.333	8.731	9.681	11.88
		1.0	6.805	6.910	7.290	8.257	11.04	6.643	6.739	7.093	7.996	10.61	6.311	6.395	6.701	7.481	9.736
	0.8	0.1	13.24	13.31	13.52	13.83	14.10	12.98	13.05	13.25	13.55	13.82	12.54	12.61	12.81	13.10	13.37
0.5		10.24	10.38	10.84	11.84	13.49	9.995	10.12	10.56	11.51	13.17	9.512	9.624	10.01	10.88	12.58	
1.0		8.173	8.285	8.684	9.661	12.21	7.945	8.047	8.414	9.313	11.73	7.475	7.560	7.867	8.621	10.72	
0.9	0.1	13.92	13.95	14.02	14.10	14.17	13.65	13.67	13.74	13.82	13.90	13.20	13.22	13.29	13.37	13.44	
	0.5	12.73	12.83	13.12	13.58	14.04	12.43	12.52	12.81	13.27	13.75	11.87	11.96	12.24	12.72	13.27	
	1.0	11.29	11.42	11.82	12.63	13.76	10.93	11.04	11.43	12.20	13.41	10.17	10.26	10.59	11.28	12.66	
ref.	0.0	14.20					13.92					13.47					
2.0	0.5	0.1	10.28	10.37	10.69	11.29	12.02	10.14	10.23	10.53	11.11	11.84	9.870	9.953	10.24	10.80	11.52
		0.5	6.704	6.773	7.042	7.786	10.04	6.596	6.660	6.911	7.614	9.772	6.369	6.425	6.645	7.276	9.253
		1.0	5.082	5.131	5.327	5.904	7.928	4.996	5.040	5.220	5.761	7.666	4.806	4.843	4.999	5.474	7.137
	0.6	0.1	10.42	10.51	10.81	11.38	12.05	10.27	10.36	10.65	11.20	11.87	10.00	10.08	10.36	10.89	11.55
		0.5	6.887	6.957	7.229	7.974	10.19	6.774	6.839	7.091	7.794	9.927	6.535	6.591	6.813	7.441	9.397
		1.0	5.236	5.285	5.483	6.061	8.087	5.144	5.189	5.370	5.910	7.813	4.942	4.980	5.135	5.607	7.261
	0.7	0.1	10.84	10.92	11.18	11.63	12.12	10.68	10.76	11.01	11.45	11.94	10.39	10.47	10.71	11.14	11.63
		0.5	7.503	7.577	7.859	8.609	10.69	7.371	7.439	7.701	8.404	10.42	7.091	7.149	7.377	8.001	9.867
		1.0	5.767	5.819	6.023	6.610	8.634	5.655	5.701	5.888	6.431	8.319	5.408	5.446	5.603	6.070	7.688
	0.8	0.1	11.46	11.52	11.70	11.96	12.21	11.29	11.35	11.52	11.78	12.03	10.99	11.05	11.21	11.47	11.72
0.5		8.792	8.876	9.180	9.914	11.50	8.621	8.698	8.980	9.672	11.25	8.257	8.324	8.568	9.183	10.74	
1.0		6.972	7.031	7.260	7.880	9.858	6.809	6.862	7.068	7.633	9.465	6.448	6.490	6.657	7.124	8.659	
0.9	0.1	12.06	12.08	12.14	12.22	12.28	11.89	11.91	11.97	12.04	12.10	11.58	11.60	11.66	11.73	11.79	
	0.5	11.01	11.09	11.32	11.72	12.15	10.81	10.88	11.11	11.51	11.96	10.39	10.46	10.68	11.10	11.62	
	1.0	9.734	9.817	10.11	10.74	11.84	9.470	9.546	9.810	10.41	11.56	8.870	8.931	9.144	9.647	10.86	
ref.	0.0	12.31					12.13					11.82

図-4 集中質量を有する周辺単純支持平板の振動モード ($b/a = 1.2, h/a = 0.05, M/abh\rho = 1.0, x_M/a = 0.7, y_M/b = 0.7$)

ω_P : 集中質量単独による平板の角振動数

今、 ω, ω_0 は(14)式で固有振動数を無次元化し、 ω_P を

$$\omega_P = \frac{\lambda_P}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{D}{M}} \quad (16)$$

で無次元化すると、(15)式から次式が得られる。

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{k}{\lambda_P^2} \quad (17)$$

但し、 $k = M/abh\rho$: 集中質量と平板質量の比

上式は、集中質量による影響を近似表示することができる。図-3は、

平板の全質量に対する集中質量の比が $k = 1.0$ の値で λ_P の値を推定し、 λ_0, λ_P, k から補間した値と級数解の比較を行ったもので、中間の値は最大誤差 5 % 程度の範囲で補間できることが分かる。微小な集中質量に関しては、表-1に掲げた $k = 0.1$ や $k = 0.5$ から算出した λ_P の値を求めて補間すると、誤差の少ない形で基本振動数を推定できる。図-4は、平板の辺長比 $b/a = 1.2$ 、板厚比 $h/a = 0.05$ 、質量比 $k (= M/abh\rho) = 1.0$ 、作用位置 $x_M/a = 0.7, y_M/b = 0.7$ の場合について、6 次迄の固有振動モードを、この種平板の振動モードの一例として掲げたものである。

図-5 周辺固定平板の基本振動数に及ぼす集中質量の影響 (集中質量の作用位置: 平板の中央点)

図-6 集中質量を有する周辺固定平板の基本振動数の補間 (集中質量の作用位置: 平板の中央点)

4.3) 集中質量を有する周辺固定平板

表-2は、集中質量を伴った周辺固定平板の内、基本振動数の一部を掲げたものである〔高次の固有振動数は、紙面の都合上、割愛する〕。提示した本方法の妥当性を検討するため、Rayleigh-Ritz解との比較を集中質量が平板の中央点に作用する場合について行い、比較の結果を図-5に掲げた。この場合、平板が細長く、且つ平板の板厚比 h/a の値が大きくなると、両者の間に相違を生ずる傾向にあ

る。このような現象は、静的問題を扱った場合^{11, 12)} にも見受けられ、Rayleigh-Ritz法は、正方形板に比べて細長い長方形板では収束性が若干劣るようで、図からも容易に読み取れる。

基本振動数に及ぼす集中質量の影響は、平板の中央部に集中質量が位置する場合、比較的小さな質量でも、基本振動数の急激な低下が見られ、平板自重等、平板の全面に分布する質量に比べて集中質量の占める割合が増加するに伴って振動数の低下現象は鈍化する。

表-2 集中質量を有する周辺固定平板の基本振動数 λ (単位: $\omega = \lambda \sqrt{D/\rho h/a^2}$)

$\frac{b}{a}$	$\frac{y_M}{b}$	$\frac{M}{abh\rho}$	$h/a = 0.01$					$h/a = 0.05$					$h/a = 0.10$				
			x_M/a					x_M/a					x_M/a				
			0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	0.5	0.1	27.94	28.61	30.69	33.82	35.74	27.25	27.88	29.87	32.90	34.86	25.43	25.98	27.72	30.51	32.57
		0.5	16.93	17.52	19.64	24.83	34.42	16.38	16.92	18.84	23.43	32.89	14.97	15.39	16.85	20.16	27.48
		1.0	12.61	13.06	14.71	18.97	31.18	12.16	12.57	14.04	17.68	27.60	11.04	11.35	12.43	14.88	20.43
	0.6	0.1	28.61	29.25	31.23	34.10	35.77	27.88	28.49	30.39	33.19	34.90	25.98	26.52	28.19	30.80	32.62
		0.5	17.52	18.10	20.20	25.35	34.63	16.92	17.45	19.34	23.89	33.15	15.39	15.80	17.23	20.47	27.72
		1.0	13.06	13.50	15.14	19.35	31.56	12.57	12.97	14.41	18.00	27.87	11.35	11.65	12.70	15.09	20.53
	0.7	0.1	30.69	31.23	32.81	34.84	35.85	29.87	30.39	31.92	33.93	34.98	27.72	28.19	29.59	31.56	32.72
		0.5	19.64	20.20	22.23	27.22	35.17	18.84	19.34	21.14	25.51	33.89	16.85	17.23	18.55	21.56	28.46
		1.0	14.71	15.14	16.69	20.77	32.78	14.04	14.41	15.76	19.16	28.79	12.43	12.70	13.64	15.81	20.89
	0.8	0.1	33.82	34.10	34.84	35.59	35.92	32.90	33.19	33.93	34.71	35.06	30.51	30.80	31.56	32.42	32.82
0.5		24.83	25.35	27.22	31.50	35.72	23.43	23.89	25.51	29.32	34.73	20.16	20.47	21.56	24.04	29.94	
1.0		18.97	19.35	20.77	24.50	34.83	17.68	18.00	19.16	22.09	30.80	14.88	15.09	15.81	17.50	21.70	
0.9	0.1	35.74	35.77	35.85	35.92	35.95	34.86	34.90	34.98	35.06	35.09	32.57	32.62	32.72	32.82	32.86	
	0.5	34.42	34.63	35.17	35.72	35.93	32.89	33.15	33.89	34.73	35.07	27.48	27.72	28.46	29.94	32.68	
	1.0	31.18	31.56	32.78	34.83	35.91	27.60	27.87	28.79	30.80	34.91	20.43	20.53	20.89	21.70	24.02	
ref.	0.0	35.95					35.09					32.87					
1.2	0.5	0.1	23.86	24.37	26.02	28.73	30.53	23.35	23.83	25.41	28.05	29.88	21.97	22.40	23.81	26.25	28.15
		0.5	14.42	14.82	16.33	20.25	29.08	14.01	14.38	15.76	19.29	27.79	12.93	13.23	14.33	16.98	23.48
		1.0	10.73	11.03	12.17	15.28	25.27	10.40	10.67	11.71	14.44	22.63	9.539	9.757	10.55	12.51	17.41
	0.6	0.1	24.47	24.96	26.53	29.01	30.56	23.93	24.40	25.91	28.33	29.92	22.48	22.90	24.25	26.53	28.19
		0.5	14.99	15.39	16.87	20.75	29.31	14.54	14.90	16.26	19.74	28.07	13.35	13.65	14.71	17.30	23.71
		1.0	11.17	11.47	12.59	15.65	25.63	10.80	11.04	12.08	14.76	22.89	9.854	10.07	10.84	12.73	17.53
	0.7	0.1	26.34	26.75	28.00	29.72	30.64	25.72	26.12	27.34	29.05	30.00	24.07	24.44	25.57	27.25	28.29
		0.5	17.00	17.39	18.82	22.55	29.91	16.38	16.73	18.02	21.33	28.85	14.80	15.07	16.05	18.43	24.46
		1.0	12.76	13.04	14.10	17.03	26.83	12.23	12.48	13.42	15.93	23.77	10.94	11.13	11.81	13.51	17.94
	0.8	0.1	29.00	29.22	29.79	30.42	30.70	28.32	28.54	29.12	29.77	30.06	26.50	26.72	27.33	28.03	28.37
0.5		21.74	22.12	23.47	26.69	30.50	20.64	20.97	22.16	25.05	29.75	17.98	18.21	19.03	20.99	26.02	
1.0		16.73	16.99	17.98	20.64	29.23	15.68	15.90	16.72	18.87	25.80	13.34	13.48	14.01	15.31	18.89	
0.9	0.1	30.56	30.59	30.64	30.70	30.72	29.91	29.94	30.00	30.07	30.09	28.17	28.21	28.29	28.37	28.40	
	0.5	29.58	29.73	30.13	30.54	30.71	28.52	28.71	29.23	29.82	30.08	24.68	24.88	25.51	26.73	28.32	
	1.0	27.30	25.59	28.48	29.90	30.69	24.69	24.92	25.66	27.27	29.97	18.65	18.74	19.01	19.64	21.50	
ref.	0.0	30.73					30.09					28.41					
1.5	0.5	0.1	20.86	21.21	22.42	24.85	26.78	20.45	20.78	21.95	24.31	26.27	19.33	19.62	20.68	22.85	24.88
		0.5	12.47	12.68	13.56	16.19	24.46	12.14	12.34	13.15	15.55	23.11	11.27	11.43	12.09	13.96	19.42
		1.0	9.242	9.392	10.03	12.02	19.50	8.980	9.119	9.706	11.49	17.73	8.290	8.403	8.872	10.22	14.24
	0.6	0.1	21.43	21.77	22.94	25.16	26.82	21.00	21.32	22.45	24.63	26.31	19.82	20.11	21.12	23.16	24.92
		0.5	13.00	13.21	14.07	16.67	24.79	12.63	12.83	13.63	15.99	23.44	11.67	11.83	12.47	14.29	19.64
		1.0	9.653	9.801	10.43	12.38	19.81	9.359	9.495	10.07	11.81	17.97	8.591	8.700	9.152	10.45	14.37
	0.7	0.1	23.15	23.44	24.41	25.96	26.89	22.65	22.94	23.88	25.42	26.39	21.30	21.56	22.44	23.96	25.02
		0.5	14.86	15.07	15.92	18.41	25.72	14.35	14.54	15.31	17.54	24.49	13.04	13.18	13.78	15.44	20.40
		1.0	11.12	11.27	11.86	13.70	20.92	10.70	10.82	11.35	12.97	18.82	9.620	9.717	10.12	11.27	14.83
	0.8	0.1	25.51	25.68	26.15	26.69	26.96	24.97	25.14	25.61	26.18	26.46	23.50	23.67	24.16	24.77	25.10
0.5		19.19	19.42	20.29	22.58	26.70	18.27	18.47	19.23	21.24	26.00	16.01	16.15	16.67	18.03	22.08	
1.0		14.76	14.90	15.46	17.14	23.69	13.88	13.99	14.46	15.84	20.90	11.88	11.95	12.26	13.13	15.93	
0.9	0.1	26.85	26.87	26.91	26.96	26.98	26.34	26.36	26.41	26.46	26.48	24.94	24.97	25.03	25.10	25.13	
	0.5	26.04	26.16	26.47	26.81	26.97	25.22	25.36	25.75	26.23	26.47	22.15	22.29	22.76	23.71	25.04	
	1.0	24.18	24.38	25.04	26.18	26.94	22.05	22.21	22.74	23.90	26.30	16.84	16.89	17.06	17.49	18.87	
ref.	0.0	26.98					26.49					25.13					
2.0	0.5	0.1	18.71	18.86	19.53	21.49	24.29	18.35	18.50	19.14	21.03	23.85	17.36	17.49	18.07	19.76	22.63
		0.5	10.84	10.89	11.20	12.52	18.57	10.56	10.61	10.90	12.12	17.49	9.821	9.863	10.10	11.08	15.00
		1.0	7.973	8.006	8.215	9.164	13.78	7.756	7.787	7.981	8.851	12.86	7.180	7.206	7.366	8.057	10.88
	0.6	0.1	19.26	19.42	20.08	21.95	24.34	18.88	19.03	19.67	21.48	23.91	17.84	17.97	18.54	20.18	22.70
		0.5	11.32	11.37	11.68	12.98	18.97	11.01	11.02	11.34	12.54	17.83	10.19	10.23	10.46	11.41	15.23
		1.0	8.340	8.373	8.577	9.506	14.06	8.095	8.125	8.314	9.161	13.09	7.452	7.477	7.630	8.295	11.03
	0.7	0.1	20.92	21.09	21.72	23.18	24.45	20.49	20.65	21.26	22.70	24.02	19.28	19.43	19.99	21.37	22.83
		0.5	13.01	13.07	13.38	14.63	20.38	12.57	12.62	12.90	14.03	19.04	11.43	11.47	11.69	12.55	16.03
		1.0	9.652	9.684	9.877	10.75	15.08	9.290	9.318	9.493	10.27	13.94	8.380	8.402	8.536	9.118	11.57
	0.8	0.1	23.21	23.34	23.71	24.23	24.53	22.75	22.87	23.25	23.79	24.11	21.44	21.56	21.95	22.56	22.94
0.5		17.00	17.08	17.45	18.70	23.49	16.18	16.24	16.55	17.62	21.93	14.15	14.19	14.39	15.11	17.88	
1.0		12.89	12.93	13.13	13.93	17.79	12.14	12.17	12.33	12.99	16.08	10.41	10.43	10.54	10.93	12.83	
0.9	0.1	24.44	24.46	24.50	24.54	24.56	24.01	24.03	24.07	24.12	24.14	22.81	22.83	22.89	22.95	22.98	
	0.5	23.69	23.78	24.04	24.36	24.54	22.93	23.04	23.36	23.83	24.12	19.91	19.98	20.24	20.86	22.41	
	1.0	21.74	21.86	22.28	23.26	24.48	19.65	19.72	19.97	20.63	22.68	14.91	14.93	15.00	15.22	16.09	
ref.	0.0	24.56					24.14					22.98

図-7 集中質量を有する周辺固定平板の振動モード ($b/a = 1.2, h/a = 0.05, M/abh\rho = 1.0, x_M/a = 0.7, y_M/b = 0.7$)

集中質量が固定辺の近傍に位置する場合、中央部に位置する場合に比べて、基本振動数に及ぼす影響の少ないことが、表-2から容易に分かる。集中質量と平板の全面に分布する全質量の比が $k = 1.0$ の値を用いて λ_P の値を求め、この値と集中質量の存在しない平板の固有振動数から、中間の値に対する固有振動数を推定補間したものを級数解と比較した。補間値は最大誤差 5 % 以内の範囲で基本振動数を近似表示することができ、図-6は補間式による近似状況を示したもので、ほぼ一致することが分かる。

図-7は、平板の辺長比 $b/a = 1.2$ 、板厚比 $h/a = 0.05$ 、質量比 $M/abh\rho = 1.0$ 、集中質量の作用位置 $x_M/a = 0.7, y_M/b = 0.7$ の場合について、6次迄の固有振動モードを、この種平板の振動モードの一例として掲げたものである。

5. むすび

本報告では、平板の質量分布が自重のように平板内に一様分布するのに加え、1点に集中する質量が作用する場合の基本振動数に及ぼす影響を、周辺単純支持と周辺固定の両平板について重ね合せ法を用いた級数解法を提示し、数値解析の結果を検討した。集中質量による影響は、集中質量の存在しない平板と、特定の集中質量を有する平板の固有振動数の両者を用いて、中間値をDunkerley式で比較的精度よく近似表現できることを確認した。ここで提示した方法は、質量分布が部分的に偏在する場合にも容易に拡張でき、今後、この問題についても検討を行ってみる所存である。

付録

本報告で提示した級数解法で、採用した項数と5次迄の固有振動数 λ の収束状況を、参考のため下記の付表に示す。

付表 採用した級数の項数と5次迄の固有振動数 λ の収束状況 ($\phi = b/a = 1.0, x_M/a = 0.5, y_M/b = 0.5$: 単位 $\omega = \lambda\sqrt{D/\rho h/a^2}$)

	$\frac{M}{abh\rho}$	項数	$h/a = 0.01$					$h/a = 0.05$					$h/a = 0.10$				
			1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次
周辺単純支持板	0.1	21	16.51	49.15	49.15	75.12	78.46	16.08	47.63	47.63	71.33	74.68	15.38	44.59	44.59	62.83	67.70
		31	16.51	49.15	49.15	75.06	78.45	16.07	47.63	47.63	71.05	74.68	15.37	44.59	44.59	62.07	67.70
		41	16.51	49.15	49.15	75.03	78.45	16.07	47.63	47.63	70.87	74.68	15.36	44.59	44.59	61.54	67.70
		51	16.51	49.15	49.15	75.01	78.45	16.07	47.63	47.63	70.72	74.68	15.36	44.59	44.59	61.12	67.70
		61	16.51	49.15	49.15	75.00	78.45	16.07	47.63	47.63	70.61	74.68	15.35	44.59	44.59	60.77	67.70
	1.0	21	8.439	49.15	49.15	56.20	78.45	8.210	47.63	47.63	52.72	74.68	7.789	44.59	44.59	45.37	67.70
		31	8.437	49.15	49.15	56.10	78.45	8.200	47.63	47.63	52.31	74.68	7.759	44.46	44.59	44.59	67.70
		41	8.436	49.15	49.15	56.06	78.45	8.193	47.63	47.63	52.05	74.68	7.737	43.85	44.59	44.59	67.70
		51	8.436	49.15	49.15	56.04	78.45	8.188	47.63	47.63	51.84	74.68	7.720	43.38	44.59	44.59	67.70
		61	8.435	49.15	49.15	56.02	78.45	8.184	47.63	47.63	51.68	74.68	7.706	43.01	44.59	44.59	67.70
周辺固定板	0.1	21	27.95	73.26	73.26	100.2	107.9	27.30	70.23	70.23	93.06	101.8	25.59	63.04	63.04	78.03	88.66
		31	27.94	73.26	73.26	100.1	107.9	27.28	70.23	70.23	92.55	101.8	25.53	63.04	63.04	78.82	88.66
		41	27.94	73.26	73.26	99.99	107.9	27.27	70.23	70.23	92.19	101.8	25.49	63.04	63.04	75.96	88.66
		51	27.94	73.26	73.26	99.96	107.9	27.26	70.23	70.23	91.92	101.8	25.46	63.04	63.04	75.30	88.66
		61	27.94	73.26	73.26	99.94	107.9	27.25	70.23	70.23	91.70	101.8	25.43	63.04	63.04	74.75	88.66
	1.0	21	12.62	73.26	73.26	81.54	107.9	12.26	70.23	70.23	75.26	101.8	11.31	62.52	63.04	63.04	88.66
		31	12.61	73.26	73.26	81.40	107.9	12.22	70.23	70.23	74.61	101.8	11.20	61.25	63.04	63.04	88.66
		41	12.61	73.26	73.26	81.31	107.9	12.20	70.23	70.23	74.16	101.8	11.13	60.39	63.04	63.04	88.66
		51	12.61	73.26	73.26	81.28	107.9	12.18	70.23	70.23	73.84	101.8	11.08	59.76	63.04	63.04	88.66
		61	12.61	73.26	73.26	81.25	107.9	12.16	70.23	70.23	73.57	101.8	11.04	59.25	63.04	63.04	88.66

(1999年3月9日原稿受理、1999年7月13日採用決定)