構造信頼性解析における 3, 4 次モーメント法の考察

AN INVESTIGATION ON THE THIRD- AND FOURTH-MOMENT METHODS
FOR STRUCTURAL RELIABILITY

趙 衍 剛*, 小野 徹 郎**

Yan-Gang ZHAO and Tetsuro ONO

Moment methods have been developed to avoid the difficulties involved in searching the design point by iteration using the derivatives of the performance function, a principle shortcoming of reliability methods based on the first-order reliability method (FORM). In order to investigate the accuracy, efficiency and applicability of moment methods, in the present paper, several third- and fourth-moment reliability indices are presented, investigated and compared along with the current third- and fourth-moment methods. Through the investigations, simple third- and fourth moment reliability indices are suggested for moment methods. It is found that the third-moment method can be significantly improved by the proposed simple third moment reliability index and the forth-moment reliability index has sufficient accuracy as a reliability index based on third-moment standardization.

Keywords: structural reliability, performance function, FORM, SORM, third-moment method, fourth-moment method
構造信頼性、限界状態関数、1 次信頼性解析、2 次信頼性解析、3 次モーメント法、4 次モーメント法

1. はじめに

構造信頼性理論では、破壊確率を効率よく計算するために、様々な近似法が考えられ、その中でも一次信頼性解析法(FORM)は、構造信頼性解析の一般的な手法として認識されている^[1]。FORM信頼性指標は u 空間における原点から限界状態曲面への最短距離として定義され、1) Rosenblatt変換、2) u 空間における限界状態曲面の1次近似、3) 繰返しによる設計点の探索等のステップから破壊確率を求める。こうしたステップを踏むFORMの問題点は、次のようにまとめられる^[2]。

- 1) 不連続な限界状態関数や、導関数が求めにくい限界状態関数などへの適用が難しい^[3]。
- 2) 限界状態関数は設計点において線形関数で近似されるので、非線形性が強い限界状態関数のときは精度に問題がある^{[3][4][5]}。
- 3) 設計点を求めるには、局部収束または発散する可能性があり^[6]、多設計点を求めることが困難となる場合がある^[7]。
- 4) 限界状態関数を陽な式で記述する必要があり、パラメータの不確実性を考慮した動的信頼性解析への適用は困難である^[8]。
- 5) Rosenblatt変換の存在が前提条件であり、分布形が分からない確率変数を含む信頼性問題に適用できない^[9]。

FORMの上記の問題点を改善するために、これまで幾つかの近似法が提案されてきた。

最初の問題点である限界状態関数の導関数の使用を回避するため、応答曲面法(RSA)^{[10][11]}が提案された。RSAの欠点としては、限界状態関数によって収束の問題があり、近似点の選択に結果が依存することである^[12]。

第2の問題点であるFORMの精度の改善手法として、2次信頼性解析法(SORM)が定着しており^{[3][13]}、放物面近似に対してはBreitung^[14]、Tvedt等^[15]の漸近式と積分式、Koyluoglu等^[16]及びCai等^[17]の級数展開式、趙・小野の経験式^{[18][19]}及びモーメント式^[20]が提案されている。SORMは一般的により結果を与えるが、破壊確率を正確に求めるためには、設計点が探索できることが前提となる。

第3の問題点である設計点や多設計点に関わる問題は最近注目され^[7]、遺伝的アルゴリズム(GA)^{[6][21]}などによる試みがあるが、その取り扱い方には簡単な手法が存在しないと指摘されている^[21]。

第4の問題点に対して、補助確率変数が導入され、パラメータの不確実性を考慮した動的信頼性解析手法^[8]が提案されており、RSAによる導関数計算の回避^[22]、SORM近似との併用による計算精度の向上^[9]等の試みもある。

第5の問題点に対して、筆者等はRosenblatt変換の代わりに高次積率標準化(HOMST)^{[23][24]}を用いて、確率変数を標準正規確率変数に変換して分布形が分からない確率変数を取り扱う手法を提示してきた^[9]。

* 名古屋工業大学 助教授・工博

** 名古屋工業大学 教授・工博

Assoc. Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

FORMの第4、5の問題点を改善するために提案された手法も第3の問題点である設計点の探索ができるかどうかに着目される。

FORMの問題点を改善するために上述の多くの手法が提案されたが、設計点に関わる問題は線形計画法を用いる繰返し計算に固有な問題点であり、改善することは難しい。また、FORMに基づく信頼性解析法は限界状態関数の1次・2次テーラー展開に基づいており、その精度は限界状態関数によってテーラー近似の精度に制限されている。従って、現代構造信頼性理論の発展を支えてきたこのFORM設計点の概念は構造信頼性理論の発展と普及のネックになっているといっても過言ではない。

こうしたFORM設計点に関する問題点を回避するために、限界状態関数の確率モーメントを利用して破壊確率を計算するモーメント法が考えられる^[2]。限界状態関数の分布形はそのモーメントと直接関係があり、その関係を簡便に表せば、信頼性指標または破壊確率も簡単に計算できる。確率モーメントに基づく構造信頼性解析法として最も古典的な手法は2次モーメント法である。2次モーメント法では破壊確率は確率変数および限界状態関数の非正規性を考慮せずに、確率変数の平均値と標準偏差から得られた限界状態関数の平均値と標準偏差を用いて評価される。現代構造信頼性理論の主流としてのFORMは、まさにその精度と信頼性指標の不変性に存在する問題を解決するために発展してきたのである。近年、確率変数および限界状態関数の非正規性を考慮するために、確率変数および限界状態関数の高次モーメントを利用する手法として、1次近似3次モーメント法(FOTM)^[4]とHOMST^{[23][24]}などの高次モーメントを利用する手法が提案されている。いずれも1次近似の概念に基づいており、信頼性指標は設計点またはテーラー展開点に依存している。また、限界状態関数の高次モーメントが既知という前提でのモーメント法の信頼性指標がいくつか提案された^{[25][26]}。しかし、限界状態関数のモーメントを求めることが難しい。筆者等は1次近似の概念を用いず、直接確率変数の分布形から限界状態関数のモーメントを求めよう^[27]という考え方に立て、3、4次モーメント法を提示した^[2]。

3、4次モーメント信頼性指標は限界状態関数の3、4次までのモーメントを用いて比較的簡便な式で表され、形式上では構造信頼性解析への適用が可能であるものの、その精度に関して十分検討されていない。本論文では、文献[2]の検討に基づいて、さらにいくつかの3、4次モーメント信頼性指標を提示し、3、4次モーメント法を比較的に詳しく考察して、その精度、適用性などにおける問題点を明らかにすることを目的とする。

2.3、4次モーメント信頼性指標

3、4次モーメント法を考察するために、本節では既存の3、4次モーメント信頼性指標として、宇賀田の3次モーメント信頼性指標とHOMSTに基いた4次モーメント信頼性指標を示すとともに、新たにいくつかの3、4次モーメント信頼性指標を提示する。

2.1 宇賀田の3次モーメント信頼性指標

対数正規分布、指数分布など、一般に理論分布として知られている分布の形状は歪み具合や尖り具合は違うものの、いわゆる釣鐘型をしている。そこで、宇賀田^[26]はこの共通点に着目し、あまり形状の複雑でない確率分布の非超過確率と無次元3次モーメントの関係は分布

形状によらずほぼ一定であるという仮定を設け、対数正規分布の非超過確率と無次元3次モーメントの関係を一般化して、式(1)の3次モーメント信頼性指標を提案している^[26]。以下の検討では式(1)をTM-1信頼性指標という。

$$\beta_{TM} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{\ln[1 + \zeta\beta_{SM}]}{\zeta} \quad \alpha_{3G} \neq 0$$

$$\beta_{TM} = \beta_{SM} \quad \alpha_{3G} = 0 \quad (1)$$

ただし、

$$\zeta = \frac{1}{3}\tan^{-1}(\alpha_{3G}) \quad (2)$$

α_{3G} は限界状態関数 $Z=G(X)$ の無次元3次モーメントであり、分布形の歪度(skewness)を表している。 β_{SM} は2次モーメント信頼性指標(SM信頼性指標)であり、次式で表される。

$$\beta_{SM} = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (3)$$

μ_G 、 σ_G は、それぞれ $Z=G(X)$ の平均値、標準偏差であり、本論では直接限界状態関数及び各確率変数の分布形から推定している。

2.2 HOMSTに基いた4次モーメント信頼性指標

小野・井戸田のHOMST^{[23][24]}では、 $Z=G(X)$ の標準化確率変数

$$Z_u = \frac{Z - \mu_G}{\sigma_G} \quad (4)$$

に対して、3次モーメント標準化関数は次式のように設定される。

$$Y = Z_u + cZ_u^2 \quad (5)$$

$$u = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \quad (6)$$

ここで c は次式を満足する未定係数である^[23]。

$$(\alpha_{6G} - 3\alpha_{4G} + 2)c^3 + 3(\alpha_{5G} - 2\alpha_{3G})c^2 + 3(\alpha_{4G} - 1)c + \alpha_{3G} = 0 \quad (7)$$

小野・井戸田^{[23][24]}の結果より、一般的な分布形に対して、 $|c| \ll 1$ として、 c は次式により表される。

$$c = \frac{\alpha_{3G}}{3(1 - \alpha_{4G})} \quad (8)$$

3次モーメントの標準化関数は次式のように示されている^[20]。

$$u = \frac{\alpha_{3G} + 3(\alpha_{4G} - 1)Z_u - \alpha_{3G}Z_u^2}{\sqrt{(9\alpha_{4G} - 5\alpha_{3G}^2 - 9)(\alpha_{4G} - 1)}} \quad (9)$$

α_{4G} は $Z=G(X)$ の無次元4次モーメントであり、分布形の尖度(kurtosis)を表す。

式(10)の破壊確率の定義より4次モーメント信頼性指標は式(11)のように与えている^{[20][21]}。

$$P_F = \text{Prob}[Z \leq 0] = \text{Prob}\left[Z_u \leq -\frac{\mu_G}{\sigma_G}\right] = \text{Prob}[Z_u \leq -\beta_{SM}] \quad (10)$$

$$\beta_{FM} = \frac{3(\alpha_{4G} - 1)\beta_{SM} + \alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1)}{\sqrt{(9\alpha_{4G} - 5\alpha_{3G}^2 - 9)(\alpha_{4G} - 1)}} \quad (11)$$

以下の検討では式(11)をFM-1信頼性指標という。

2.3 HOMST に基いた 3 次、高次モーメント信頼性指標の提示

FM-1 信頼性指標は式(8)の近似式に基づいており、 $|c| \ll 1$ の仮定が前提条件となる。式(8)により、 $|c| \ll 1$ になるためには、 $|\alpha_{3G}|$ が小さいか α_{3G} が大きいことが必要となる。 $Z=G(\mathbf{X})$ の尖度を正規確率変数のそれと等しいと仮定すれば、FM-1 信頼性指標は次式のように 3 次までのモーメントのみを用いて計算される。

$$\beta_{TM} = \frac{6\beta_{SM} + \alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1)}{\sqrt{36 - 10\alpha_{3G}^2}} \quad (12)$$

この時、 $|c| \ll 1$ になるためには、 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さいことが必要となり、式(12)は次式のように簡潔に表される。

$$\beta_{TM} = \beta_{SM} + \frac{1}{6}\alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1) \quad (13)$$

式(13)はHOMSTに基づいた 3 次モーメント信頼性指標であり、式(1)より明らかに簡潔である。いうまでもなく、限界状態関数の非正規性が強くないことが前提となる。以下の検討では式(13)をTM-2 信頼性指標という。

$|\alpha_{3G}|$ が大きい時、 $|c| \ll 1$ の仮定は成り立たず、FM-1 信頼性指標の精度に疑問が残る^{[20][2]}。この問題点を検討するために、ここでは、 c を式(7)の方程式から精算し、式(5)、(6)から、3 次モーメント標準化関数を導くと次式のようになる。

$$u = \frac{Z_u + cZ_u^2 - c}{\sqrt{(\alpha_{4G}-1)c^2 + 2\alpha_{3G}c + 1}} \quad (14)$$

式(10)の関係を用いることによって、3 次モーメント標準化に基づく信頼性指標は次のように与えられる。

$$\beta_{HM} = -\frac{c\beta_{SM}^2 - \beta_{SM} - c}{\sqrt{(\alpha_{4G}-1)c^2 + 2\alpha_{3G}c + 1}} \quad (15)$$

式(15)を計算するには、式(7)から分かるように限界状態関数の 6 次までの高次モーメントが必要となる。以下の検討では式(15)をHM 信頼性指標という。

2.4 Cornish-Fisher 展開に基いた 3、4 次モーメント信頼性指標の提示

非正規性があまり強くない確率変数 x と標準正規確率変数 u との間には次の関係が成立する^{[28][29]}。

$$x = u + \sum_{r=1}^{\infty} P_r(u, K) \quad (16)$$

$$u = x - \sum_{r=1}^{\infty} N_r(x, K) \quad (17)$$

ただし、 $K=\{k, r>0\}$ は x の積率であり、式(16)はCornish-Fisher 展開として知られる^{[28][29]}。 $N_r(x, K)$ と $P_r(u, K)$ の一般関係は文献[29]に与えられ、1 次、2 次の逆Cornish-Fisher 展開は次式で表すことができる。

$$N_1(x, K) = \frac{1}{6}k_3(x^2 - 1) \quad (18)$$

$$N_2(x, K) = \frac{1}{24}k_4(x^3 - 3x) - \frac{1}{36}k_3^2(4x^3 - 7x) \quad (19)$$

式(10)の関係を用いると、3、4 次モーメント信頼性指標はそれぞれ次のように与えられる。

$$\beta_{TM} = \beta_{SM} + \frac{1}{6}\alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \beta_{FM} = & \beta_{SM} + \frac{1}{6}\alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1) \\ & - \frac{1}{24}(\alpha_{4G} - 3)\beta_{SM}(\beta_{SM}^2 - 3) + \frac{1}{36}\alpha_{3G}^2\beta_{SM}(4\beta_{SM}^2 - 7) \end{aligned} \quad (21)$$

式(20)と式(13)とは同じ形式を有しており、非正規性が強くない確率変数に対しては、高次積率標準化とCornish-Fisher 展開は同じ 3 次モーメント信頼性指標を与えることが分かる。

非正規性が強くないことは式(20)と式(21)の前提条件である。 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さいと仮定すれば、式(21)の α_{3G}^2 項を略し、4 次モーメント信頼性指標は次式のように簡潔に記述することができる。

$$\beta_{FM} = \beta_{SM} + \frac{1}{6}\alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1) - \frac{1}{24}(\alpha_{4G} - 3)\beta_{SM}(\beta_{SM}^2 - 3) \quad (22)$$

4 次モーメント信頼性指標としては、 $\alpha_{3G}=0$ のとき、式(11)は $\beta_{FM}=\beta_{SM}$ となり、4 次モーメントの影響を考慮できないが、式(21)と式(22)ではそういう問題点がない。以下の検討では式(21)をFM-2 信頼性指標といい、式(22)をFM-3 信頼性指標という。

2.5 Gram-Charlier 級数に基いた 4 次モーメント信頼性指標の提示

式(4)に示す非正規標準化確率変数 Z_u の確率分布関数 F は、次のGram-Charlier 級数に展開することができる^[28]。

$$F(z_u) = \Phi(z_u) - \phi(z_u) \left[\frac{1}{6}\alpha_{3G}H_2(z_u) + \frac{1}{24}(\alpha_{4G} - 3)H_3(z_u) \right] \quad (23)$$

ただし、 Φ と ϕ は標準正規確率変数の確率分布関数と確率密度関数である。 $H_2(x)=x^2-1$ 、 $H_3(x)=x^3-3x$ はそれぞれ 2 次、3 次 Hermite 級数である。

(10)式の関係を使うと、4 次モーメント信頼性指標と破壊確率は次のように得られる。

$$P_{FM} = \Phi(-\beta_{SM}) - \phi(\beta_{SM}) \left[\frac{1}{6}\alpha_{3G}H_2(-\beta_{SM}) + \frac{1}{24}(\alpha_{4G} - 3)H_3(-\beta_{SM}) \right] \quad (24)$$

$$\beta_{FM} = -\Phi^{-1}(P_{FM}) \quad (25)$$

以下の検討では式(24)と式(25)をFM-4 信頼性指標という。

3. 確率モーメントを求める標準化点推定法

前述のモーメント法を展開するには、限界状態関数の各次確率モーメントが必要である。確率モーメントを求めるには点推定法が提案されているが^{[30][31][32][33]}、限界状態関数によって、推定精度を維持することが困難であり、確率変数の種類によって、推定点は確率変数の定義領域以外にある場合がある^[27]。本研究では、これらの問題点を改善した標準化点推定法^[27]を用いる。標準化点推定法では標準正規空間で標準化推定点を求め、各標準化推定点でRosenblatt 逆変換により原空間の推定点を求めることにより、限界状態関数の確率モーメントを求める。限界状態関数は次式のように近似される。

$$G(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n (G_i - G_\mu) + G_\mu \quad (26)$$

ただし、

$$G_\mu = G(\mu) \quad (27)$$

$$G_i = G[T^{-1}(\mathbf{U}_i)] \quad (28)$$

$\mathbf{U}_i = [u_{\mu 1}, u_{\mu 2}, \dots, u_{\mu n}]^T$ 、 μ は平均値ベクトルであり、 $u_{\mu k}$ 、 $k=1, \dots, n$ は μ に対応する u 空間の第 k 個目の値である。 T^{-1} は Rosenblatt 逆変換

である。

式(28)では、 G_i は u_i だけの関数である。Rosenblatt変換の特性により、 $\mathbf{X}$ の相関性と関係なく、 G_i は互いに独立になる。4次までのモーメントは次式より表される^[27]。

$$\mu_G = \sum_{i=1}^n (\mu_i - G_\mu) + G_\mu \quad (29)$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (30)$$

$$\alpha_{3G} \sigma_G^3 = \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} \sigma_i^3 \quad (31)$$

$$\alpha_{4G} \sigma_G^4 = \sum_{i=1}^n \alpha_{4i} \sigma_i^4 + 6 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \sigma_i^2 \sigma_j^2 \quad (32)$$

ここで μ_i , σ_i , α_i はそれぞれ G_i の平均値、標準偏差、及び無次元 r 次モーメントである。 G_i は u_i だけの関数で

あり、 $G_i = g(u_i)$ とすると、 μ_i , σ_i , α_i は次式のようにになる。

$$\mu_i = \sum_{k=1}^m P_k g(u_k) \quad (33)$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^m P_k [g(u_k) - \mu_i]^2 \quad (34)$$

$$\alpha_{ri} \sigma_i^r = \sum_{k=1}^m P_k [g(u_k) - \mu_i]^r \quad (35)$$

ただし、 u_k , P_k ($k=1, \dots, m$)は標準化推定点に対応する重みである (付録A 参照)。

4. 3、4次モーメント法に基づく信頼性指標の考察

4.1 R-S信頼性モデル

ここでは、まず次式の限界状態関数を用いて、上述の3、4次モーメント法に基づくSM, TM-1, TM-2, FM-1, FM-2, FM-3, FM-4, HMの8つの信頼性指標を考察する。

$$G(\mathbf{X}) = R - S \quad (36)$$

限界状態関数が単純なので、4次までのモーメントは正確に求められ、5、6次モーメントは標準化7点推定及び式(29)～(32)を用いて求められる。 R , S の変動係数はそれぞれ0.2、0.4とした。精算値は、サンプリング数が5,000,000のMonte-Carlo Simulation (MCS)により求めた。異なる確率分布に従う R , S を仮定して、Table 1に示す12ケースについて考察する。

ケース1～12におけるMCS, SM, TM-1, TM-2, FM-1, FM-2, FM-3, FM-4, HMの9つの信頼性指標を計算し、信頼性指標と中央安全係数(CFS)との関係を、それぞれFig.1～12に示す。12ケースの無次元3、4次モーメント α_3 , α_4 をそれぞれFig.13, Fig.14に示す。Fig.1～14より次のことがわかる。

(1) Fig.1では、検討した全ての信頼性指標はほぼ重なっており、ケース1に対して検討した全ての3、4次モーメント法の信頼性指標は十分な結果を与えることが分かる。Fig.13, Fig.14により、ケース1の限界状態関数の無次元3次モーメント α_3 は、ほぼ0となり、無次元4次モーメント α_4 は、ほぼ3となっている。 $\alpha_3=0$, $\alpha_4=3$ が正規分布確率変数の特徴であり、ケース1の限界状態関数はほぼ正規分布に従うことが分かる。このとき、3、4次モーメント法は2次モーメント法と同一となり、適切な信頼性指標の結果を与える。

(2) Fig.13, Fig.14により、CFSが小さくなるにつれて、限界状態関数の無次元3次モーメント α_3 が0から、4次モーメント α_4 が3からずれることが分かる。Fig.1～

Fig.1 CFS- β curves for Case-1

Fig.2 CFS- β curves for Case-2

Fig.3 CFS- β curves for Case-3

12により、検討した全ての12ケースでは、CFSが小さくなるにつれて信頼性指標はほぼ重なり、 β_{SM} と同様な信頼性指標の結果を与え、精算値に追従していくことが分かる。これは3、4次モーメント法の信頼性指標には β_{SM} が α_3, α_4 の因子になっており、CFSが小さくなるにつれて β_{SM} も小さくなっており、 α_3, α_4 の影響を弱めているからである。

(3) Fig.1～12の結果は、検討した全ての12ケースでは、FM-1, HM信頼性指標はほぼ重なり、4次までのモーメントだけ用いる3次モーメントの標準化関数の近似式に基づくFM-1信頼性指標は、5、6次モーメントを用いた、3次モーメント標準化関数の精算式に基づくHM信頼性指標と同程度の結果を与えることを示している。即ちFM-1信頼性指標は3次モーメント標準化に基づく信頼性指標として適当であるといえる。また、全てのケースで、TM-2, FM-1, HM信頼性指標はほぼ重なり、TM-2信頼性指標は3次までのモーメント情報のみ用いているものの、FM-1, HM信頼性指標と同じ程度の結果を与えていることが分かる。

TM-2信頼性指標は簡潔であり、3次モーメント信頼性指標として有効である。

(4) Fig.10では、式(24)から計算された破壊確率がマイナスなので、FM-4信頼性指標は計算できない。Gram-Charlier級数では確率分布関数の定義域に問題があり¹²⁾、それに基づくFM-4信頼性指標は、定義域外で求められない場合があることを示している。

(5) Fig.1～5では、FM-1信頼性指標はMCS信頼性指標をよく追従しており、Fig.6～10では、信頼性指標が大きいきFM-1信頼性指標はMCS信頼性指標から離れている。Fig.13, 14により、ケース1～5の無次元3、4次モーメントはそれぞれ0と3を中心に変動しており、ケース6～10の無次元3、4次モーメントはそれぞれ0.5と3.6を中心に変動していることが分かる。即ち、限界状態関数の非正規性があまり大きくないときFM-1信頼性指標は良好な結果を与えており、非正規性が大きいときは3次モーメント標準化に基づく信頼性指標は不十分と考えられる。

(6) Fig.1～12により、12ケース全てで、TM-1信頼性指標で誤差

Fig.4 CFS- β curves for Case-4 Fig.5 CFS- β curves for Case-5 Fig.6 CFS- β curves for Case-6 Fig.7 CFS- β curves for Case-7 Fig.8 CFS- β curves for Case-8 Fig.9 CFS- β curves for Case-9

Fig.10 CFS- β curves for Case-10 Fig.11 CFS- β curves for Case-11 Fig.12 CFS- β curves for Case-12 Fig.13 CFS- α_3 curves for Example 1 Fig.14 CFS- α_4 curves for Example 1 Fig.15 R - β curves for Example 2

が最も大きい。また、ほとんどの場合、TM-1信頼性指標とMCS信頼性指標はSM信頼性指標の反対側にあり、TM-1信頼性指標はSM信頼性指標より誤差が大きいが分かる。

(7) Fig.1 ~ 12により、Cornish-Fisher展開に基づいたFM-2, FM-3信頼性指標は限界状態関数の非正規性があまり強くないときMCS信頼性指標をよく追従しているが、全体的にはFM-3より、FM-2のほうが適切な信頼性指標を与える。

4.2 SORM との比較

SORMと比較するために、標準空間における式(37)で示される放物面の限界状態関数^[13]について検討する。

$$G(U) = \beta_F - u_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j a u_j^2 \quad (37)$$

ただし、 a は放物面の曲率の大きさを表す常数である。

ここで比較する精算値はIFFT法^[19]によるもので、SORMの値は、

2次信頼性指標の経験式^[18]を用いている。限界状態関数の4次モーメントまでは、標準化5点推定により求めた。

Fig.15は、曲率半径 R と信頼性指標の関係について、本報で示した各信頼性指標と精算値やSORMの値との対応を示す(1次信頼性指標は2、確率変数の数は8とする)。Fig.15において、検討した全ての3、4次モーメント信頼性指標はFORMよりよい結果を与え、曲率半径が比較的大きい時に精算値とよい近似を示す。SM, TM-1信頼性指標は、曲率半径が小さい場合に大きな誤差があり、TM-2, FM-1, FM-2信頼性指標では広範囲にわたり、精算値及びSORMの値とよい対応を示す。

4.3 dR - S 信頼性モデル

次式の限界状態関数について検討する。

$$G(X) = dR - S \quad (38)$$

R は抵抗力で、 $\mu_R=400$, $\sigma_R=80$ の対数正規分布に従い、 S は荷重で、変動係数0.4のWeibull分布に従う。 d は $\mu_d=1$, $\sigma_d=0.1$ の正規分布を持

Fig.16 CFS-β curves for Example 3

つ抵抗力 R の修正係数である。

限界状態関数の4次モーメントまでは、標準化7点推定により求めた。 R , S の変動係数はそれぞれ0.2, 0.4とした。精算値は、5,000,000点のMCSにより求めた。Fig.16に、信頼性指標と S の平均値との関係を示す。TM-2, FM-1, FM-2 信頼性指標は実際の値のよい近似を示す。また、 $\mu_S < 125$ のとき、式(24)から計算された破壊確率がマイナスなので、FM-4 信頼性指標は計算することができなかった。

4.4 システム信頼性への適用

Fig. 17a)に示した簡単な門型1層1スパン骨組の終局耐力に関する信頼性を評価する。この骨組が有する全崩壊機構はFig. 17b)～e)に示した4種類で、システムの限界状態関数は次式で定義される。

$$G(\mathbf{X}) = \min \{g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), g_3(\mathbf{X}), g_4(\mathbf{X})\} \quad (39a)$$

$$g_1(\mathbf{X}) = 2M_1 + 2M_3 - 4.5S \quad (39b)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 2M_1 + M_2 + M_3 - 4.5S \quad (39c)$$

$$g_3(\mathbf{X}) = M_1 + M_2 + 2M_3 - 4.5S \quad (39d)$$

$$g_4(\mathbf{X}) = M_1 + 2M_2 + M_3 - 4.5S \quad (39e)$$

M_i , S は相互独立な対数正規確率変数であり、それらの平均値をそれぞれと200, 50と設定し、変動係数をそれぞれ0.15, 0.4と設定した。

式(39)の限界状態関数のモーメントを求めるとき、式(26)を構成する G_i は次のように得られる。

$$G_\mu = 575 \quad (40a)$$

$$G_1 = \min \{ 2M_1 + 175, M_1 + 375 \} \quad (40b)$$

$$G_2 = \min \{ 575, 2M_2 + 175, M_2 + 375 \} \quad (40c)$$

$$G_3 = \min \{ 2M_3 + 175, M_3 + 375 \} \quad (40d)$$

$$G_4 = 800 - 4.5S \quad (40e)$$

標準化7点推定により G_1 , G_2 , G_3 , G_4 および G のモーメントは Table 2 のように計算される。Table 2に示されたモーメントの値により、計算した各3, 4次モーメント法の信頼性指標を Table 3に示す。比較するため、式(39)の限界状態関数に対して500,000点のMCSを行い、破壊確率は 5.66×10^{-4} として得られ、対応する信頼性指標は3.255となる。Table 2, Table 3によると、限界状態関数の非正規性が強いと、TM-

Fig.17 Structural model for Example 4

Table 2 Moments

	μ	σ	α_3	α_4
G_1	564.019	44.168	-0.428	2.915
G_2	553.038	32.857	-1.393	3.842
G_3	564.019	44.168	-0.428	2.915
G_4	575.000	90.000	-1.264	5.968
G	531.076	114.374	-0.698	4.140

Table 3 Reliability Index

Method	β
SM	4.643
TM-2	2.251
FM-1	3.263
FM-2	3.140
MCS	3.255

2, FM-2 信頼性指標に大きな誤差が現れ、FM-1 信頼性指標のみ MCS の結果に近い。

5. まとめ

本論文ではいくつかの3, 4次モーメント法の信頼性指標を提示、比較、考察することにより、3次モーメント法として、TM-2信頼性指標、4次モーメント法として、FM-1信頼性指標の有効性を示した。あらゆるケースを網羅することは困難であるが、本研究の考察範囲で得られた結論は以下の通りである。

- 1) SM 信頼性指標が小さいとき、無次元3, 4次モーメントの影響が弱くなり、3, 4次モーメント法は比較的に良好な結果を与える。
- 2) Gram-Charlier級数では確率分布関数の定義の範囲に問題があり、それに基づくFM-4信頼性指標は、定義域外で得られない箇所がある。
- 3) 一般にはTM-1信頼性指標はSM信頼性指標より誤差が大きい。
- 4) FM-2, FM-3信頼性指標はCornish-Fisher展開に基づいており、限界状態関数の非正規性があまり強くないときMCS信頼性指標をよく追従しており、全体的には、FM-3より、FM-2のほうが適切な信頼性指標を与える。
- 5) TM-2信頼性指標はCornish-Fisher展開に基づいており、限界状態関数の非正規性が強くないときHOMSTからも導かれる。TM-2信頼性指標は簡潔であり、検討したほとんどの場合でFM-1, FM-2と

同程度の信頼性指標の結果を与える。しかし、限界状態関数の非正規性が強いとき（例えば4.4節の例では、 $\alpha_3 = -0.698$ ）は誤差が大きい。

6) 原則的にはFM-1 信頼性指標は式(8)の近似式に基づいており、 $|c| \ll 1$ の仮定が前提条件となる。 $|c| \ll 1$ になるためには、 $|\alpha_{3c}|$ が小さいか、あるいは α_{4c} が大きいことが必要となる。しかし本論文の範囲では、4次までのモーメントだけを用いる3次モーメントの標準化関数の近似式に基づくFM-1 信頼性指標は、5、6次モーメントを用いて、3次モーメントの標準化関数の精算式に基づくHM 信頼性指標とほぼ同様な結果を与える。従って、FM-1 信頼性指標は3次モーメント標準化に基づく信頼性指標として適当であるといえる。

7) FM-1 信頼性指標は限界状態関数の非正規性があまり強くないときMCS 信頼性指標をよく追従しており、検討した全ての信頼性指標の中で、最も良好な結果を与えている。しかし、限界状態関数の非正規性が著しく強いとき、FM-1 信頼性指標は無視できない誤差が生じる。限界状態関数の非正規性が著しく強いとき、3次モーメント標準化に基づく信頼性指標は不十分と考えられ、さらなる研究が必要となる。

いずれにせよ、30年以上にわたり研究されてきたFORM に基づく構造信頼性解析法に比べ、モーメント法に関する研究は少ない。しかし、モーメント法は、より適切な信頼性指標を与え簡単に構造信頼性設計へ適用されることが期待される。

付録 A. 標準化推定点と重み

A.1 標準化 5 点推定

$u_2 = -2.85697$	$P_2 = 1.12574 \times 10^{-2}$	(A.1-a)
$u_1 = -1.35563$	$P_1 = 0.22208$	(A.1-b)
$u_0 = 0$	$P_0 = 0.53333$	(A.1-c)
$u_{1+} = 1.35563$	$P_{1+} = 0.22208$	(A.1-d)
$u_{2+} = 2.85697$	$P_{2+} = 1.12574 \times 10^{-2}$	(A.1-e)

A.2 標準化 7 点推定

$u_3 = -3.75044$	$P_3 = 5.48269 \times 10^{-4}$	(A.2-a)
$u_2 = -2.36676$	$P_2 = 3.07571 \times 10^{-2}$	(A.2-b)
$u_1 = -1.15441$	$P_1 = 0.24012$	(A.2-c)
$u_0 = 0$	$P_0 = 0.45714$	(A.2-d)
$u_{1+} = 1.15441$	$P_{1+} = 0.24012$	(A.2-e)
$u_{2+} = 2.36676$	$P_{2+} = 3.07571 \times 10^{-2}$	(A.2-f)
$u_{3+} = 3.75044$	$P_{3+} = 5.48269 \times 10^{-4}$	(A.2-g)

参考文献

- [1] Bjerager, P. (1991). "Methods for Structural Reliability Computation." *Reliability Problems: General Principles and Applications in Mechanics of Solid and Structures*, ed. by F. Casciati, Springer Verlag Wien-New York, 89-136.
- [2] 趙 衍剛、小野徹郎等、確率モーメントを用いる構造信頼性解析法、その1～3、日本建築学会東海支部研究報告集、Vol.37, 133-144, 1999.2.
- [3] Fiessler, B., Neumann, H.-J., and Rackwitz, R., (1979). "Quadratic Limit States in Structural Reliability." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 105(4), 661-676.
- [4] Tichy, M., (1994). "First-order third-moment reliability method." *Structural Safety*, 16, 189-200.
- [5] Zhao, Y.G. and Ono, T., (1999). "A general procedure for first/second-order reliability method", *Structural Safety*, 21(2), 95-112.
- [6] 小野徹郎、趙 衍剛、鈴木 誠、知能生物に基づいたGAサーチ、日本建築学会構造系論文集、No.469, 45-52, 1995.3.
- [7] Der Kiureghian, A. and Dakessian, T., (1998). "Multiple design points in first and second-order reliability." *Structural Safety*, 20(1), 37-50.
- [8] Wen, Y.K. and Chen, H.C., (1987). "On fast integration for time variant structural reliability." *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2(3).
- [9] Zhao, Y.G., Ono, T. and Idota, H., (1999). "Response uncertainty and time variant reliability analysis for hysteretic MDF structures." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28(10), 1187-1213.
- [10] Faravelli, L. (1989). "Response surface approach for reliability analysis." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 115(12), 2763-2781.
- [11] Liu, Y.W. and Moses, F., (1994). "A sequential response surface method and its application in the reliability analysis of aircraft structural systems." *Structural Safety*, 16, 39-46.
- [12] Zhao, Y.G. and Ono, T., (1998). "System reliability evaluation of ductile frame structures." *J. Struct. Engrg., ASCE*, 124(6), 678-685.
- [13] Der Kiureghian, A. and De Stefano, M., (1988). "Efficient Algorithm for Second-Order Reliability Analysis." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 117(12), 2904-2923.
- [14] Breitung, K., (1984). "Asymptotic Approximation for Multi-normal Integrals." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 10(3), 357-366.
- [15] Tvedt, L., (1990). "Distribution of quadratic forms in the normal space - application to structural reliability." *Journal of Engrg. Mech., ASCE*, 116(6), 1183-1197.
- [16] Koyluoglu, H.U. and Nielsen, S.R.K., (1994). "New Approximations for SORM integrals." *Structural Safety*, 13, 235-246.
- [17] Cai, G.Q. and Elishakoff, I., (1994). "Refined Second-Order Reliability Analysis." *Structural Safety*, 14, 267-276.
- [18] Zhao, Y.G. and Ono, T., (1999). "New approximation for SORM: Part 1." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 125(1), 79-85.
- [19] Zhao, Y.G. and Ono, T., (1999). "New approximation for SORM: Part 2." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 125(1), 86-93.
- [20] Zhao, Y.G. and Ono, T., (1999). "New approximation for SORM: Part 3." Tentatively accepted by *J. Engrg. Mech., ASCE*.
- [21] Kuschel, N., Pieracci, A. and Rackwitz, R., (1999). "Multiple β -points in structural reliability." *Computational Stochastic Mechanics*, Spanos (ed), Balkema, Rotterdam, 181-190.
- [22] 趙 衍剛、小野徹郎、パラメータの不確定性を考慮した動的信頼性評価、日本建築学会構造系論文集、No.497, 33-38, 1997.7.
- [23] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率標準化手法の提案とそれに基づく信頼性指標の設定、日本建築学会構造系論文報告集、No.359, 43-49, 1986.1.
- [24] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率標準化手法の設計法への展開とその有効性、日本建築学会構造系論文報告集、No.365, 40-47, 1986.7.
- [25] 米澤政昭等、1次元4次モーメント近似による構造物の信頼性解析、材料、Vol.31, No.351, 82-88, 1982.12.
- [26] 宇賀田 健、3次モーメント法の提案、日本建築学会大会学術講演梗概集（北海道）、構造I、3-4, 1995.8.
- [27] Zhao, Y.G. and Ono, T., (2000). "New point estimates for probability moments." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 126(4) (To be published).
- [28] Stuart, A. and Ord, J. K. (1987) *Kendall's advanced theory of statistics*. London, Charles Griffin & Company LTD., Vol.1, 210-275.
- [29] Withers, C. S. (1984) Asymptotic expansions for distributions and quantiles with power series cumulants. *J. R. Statist. Soc. B*, 46, 389-396.
- [30] Rosenblueth, E. (1975). Point estimates for probability moments, *Proc. of National Academy of Science of USA*, Vol. 72, No.10, 3812-3814.
- [31] Gorman, M.R. (1980). *Reliability of structural systems*, Ph.D Thesis, Case Western Reserve University, 320-332.
- [32] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率を用いた鋼圧縮材及び曲げ材の抵抗強度に関する統計論的研究、日本建築学会構造系論文報告集、No.370, 19-27, 1986.12.
- [33] 井戸田秀樹、小野徹郎、早川由則、高次不静定骨組の信頼性解析法に関する研究、構造物の安全性及び信頼性、JCOSSAR'91, 497-502, 1991.

(1999年9月10日原稿受理、1999年11月18日採用決定)