水の入った円筒タンクに生起する非線形振動応答

NONLINEAR OSCILLATION RESPONSE OF
A CYLINDRICAL TANK WITH WATER

皆川 洋一*

Youchi MINAKAWA

Cylindrical shell tanks with water on a shaking table driven with sinusoidal excitation show various nonlinear responses. In order to make clear some causes of the response, we have been examining the system on both theoretical and experimental aspects. Here, basing upon experimental vibration tests of the tank, we show the nonlinear responses higher-harmonic oscillations and sub-harmonic oscillations. Various sub-harmonic oscillations branched out on some frequency regions and became significant responses with large amplitudes. Then, focusing the sub-harmonic responses, we examine relation the instability regions and the natural frequencies of the system, plotted for external frequency and the amplitude.

keywords: cylindrical tank, nonlinear oscillation, sub-harmonic oscillation, out-of-round mode, test on shaking table

§1 はじめに

水の入った円筒タンクの振動問題はふたつの側面から研究されている。ひとつは剛な容器に入った自由表面を有する水が振動するスロッシング振動問題を検討するもので、振動数の小さな外力振動数の下での応答が研究対象となる。他方は水の入ったタンクの振動を扱う問題であり、振動数が比較的大きな外力振動数の下での容器の振動現象が研究対象となる。振動台の上で、周期的な外力を受けると、水の入った円筒タンクに線形振動からは予測できない応答が観測される。Clough等¹⁾は円筒タンクの振動実験を行ない、応答に円筒の断面が変形する (out-of-round) 高次振動モードが観測されること、線形振動理論に基づいてこのような応答が発生する現象を説明することはできないこと、円筒タンクに存在する初期不整がこの高次振動モードの応答を生起させる要因であることを報告している。

水の入ったタンクの解析的な研究は、液体を換算質量に置換する方法を適用して遂行されていた。近年、液体をポテンシャル流体としてモデル化し、この流体と弾性体容器との動的相互作用問題として定式化する方法が適用されている。これに基づいた線形理論の解析が行われ、工学的に有用な知見が報告されている^{2,3)}。

円筒の断面が変形する振動モードの応答は幾何学的非線形性に由来すると推察し、著者等は周期的な外力を受ける円筒シェル容器の水平振動

実験を継続してきた。非線形応答であることを確認するために、線形振動理論による解析と比較⁴⁾し、応答を各振動成分毎、および円筒の周方向の各フーリエ級数展開次数毎の振幅に分析し、周方向展開次数が2以上の振動モードを有する高調波振動や分数調波振動の応答曲線^{12,20)}を報告して来た。また、著者はタンクの弾性変形に伴う流体場の変化を考慮する定式化を示し、実験供試体に観察される非線形振動応答の生起が定性的には説明^{6,14)}できることを示した。

非線形振動応答が出現する要因、生起する振動数領域、および振動の大きさについて定性的な知見を得るためには、詳細に実験を行う必要がある。線形振動は外力の大きさに比例する応答量を示す。しかしながら、非線形振動は、振動の生起が外力の大きさに依存し、外力の大きさと応答量に線形の関係が成立しない。複数の振動モードが関係する非線形振動において、同じような手続きで作製された供試体のわずかな固有振動数の相違に依存して、生起する振動現象に差異が観察される。ここでは、異なる供試体を利用し、水の量、および外力加速度の大きさ等をパラメータとした実験から得られた非線形振動応答¹⁵⁻¹⁷⁾の概要を示し、タンクに大きな影響を与える分数調波振動応答の発生する不安定領域とその生起要因を分析する。これらは円筒タンクの応答を精緻に検討する上での重要な知見となる。

本論文の一部は文献15, 16, 17)に発表している。
* 鹿児島大学工学部建築学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Faculty of Engineering,
Kagoshima Univ., Dr. Eng.

Fig. 1-1 Cylindrical Tank on Shaking Table

Fig. 1-2 Perspective View of Cylindrical Tank with Lid

Fig. 1-3 Tank and Measuring Devices

§ 2 実験装置とデータ処理

2-1 実験装置と測定

振動実験装置は電磁式の加振器(最大加振力45.3kg)、寸法200mm×200mmの振動台、および測定装置から構成されている(Fig.1-1)。振動台は可動方向の両端部に配置されたT型のステンレス板(厚さ0.5mm)を用いて取り付けられ、上下方向と直交方向への移動が拘束されている。円筒部は直径約84mm、高さ200mmであり公称厚さ0.5mmの塩化ビニール・フィルムを用いて作られた。この円筒シェルの頂部にアクリル板のフタ(厚さ8mm)を持つ円筒タンク模型を作製した(Fig.1-2)。塩化ビニール・フィルムののりしろは4-8mmとし、シアノアクリレート系の接着剤を用いて接合された。円筒シェルはアルミニウム製の基盤に取付けられ、振動台に8本のM8ボルトを用いて接合された。塩化ビニール・フィルムとアクリル板のフタおよびアルミニウム製の基盤とはエポキシ樹脂系の接着剤を用いて接合された。また、アクリル板のフタの中央に直径8mmの穴を開け、水の注入、および排出に利用した。

振動台の振動数 ω を円振動数(単位:rad/sec)、または振動数(単位:Hz)($=\omega/2\pi$)として表現する。変位は電磁容量の変化を利用する非接触型の変位計を用いて、3箇所測定された。それらは、振動台の加振方向($\theta=0$ 度)タンクの底から高さ190mmの位置、および100mmの位置、加振方向と直角($\theta=90$ 度)の位置にあるタンクの底から高さ100mmの位置におけるタンクの法線方向の変位(Fig.1-3)である。変位計の測定精度は1/1000mm程度である。円筒シェルの周方向の振動応答モードを特定するために、タンクの底から高さ85mmの位置において円筒シェル表面の周方向に16枚のひずみゲージ(ベース剛性の小さなプラスチック用のもの)が貼付され、周方向のひずみ応答が測定された(Fig.1-3)。非線形振動の生起に系の減衰特性が影響するものと予測されるものの、ここでは減衰量を測定していない。

2-2 データの収集と処理

実験の応答はパーソナル・コンピュータ(PC9801-EX:CPU80286)を利用したAD変換器を用いてデジタル量として測定され、即座にキャリブレーション・データを用いて変換された。具体的に示せば、このパソコンに1枚で16チャンネルを有するAD変換ボードが3枚(PCN-2098:1枚, PCN-2198:2枚, N電子)取付けられ、サンプリングのチャンネル数、および時間間隔はアセンブリ言語を用いソフトウェア的に制御された。この結果、各AD変換器の任意の順番*i*で読み取られたデータと1番目に読み取られたデータとの間に存在する時間遅れは正確に算定された。1番目にPCN-2098、2および3番目にPCN-2198のAD変換ボードを用い、順にAD変換命令を与える。3枚のボードの変換が終わるまでマシン語のLOOPを回して時間待ちを行ない、変換されたデータをメモリに収納した後、1,2,3番目のAD変換ボードに再度変換命令を与える。このような操作を n_i ($1 \leq n_i \leq 16$)回行なうと $3n_i$ 個のデジタル・データを得ることができる。ここで利用した読み取りプログラムでは1番目と2番目、および2番目と3番目のボードの時刻遅れはそれぞれ0.00451msec、および0.00161msecであった。3枚のボードのAD変換、およびデータの収納にかかる時間 Δt_1 は0.0368msecであった。また、この時刻のサンプリングプログラムの終了手続き、およびサンプリング時間間隔を調整するLOOPを n_i 回とすると、この時間は次式のように表される。

$$\Delta t_2 = 0.00292 + 0.00102 n_i \text{ (msec)} \quad (1 \leq n_i \leq 65535) \quad (a)$$

故に、 $3n_i$ 個のデータのサンプリングが完了するまでの時間、すなわちサンプリングの時間間隔 Δt は次式のように表される。

$$\Delta t = n_i \Delta t_1 + \Delta t_2 \quad (b)$$

同一の正弦波振動をこれらのボードを用いて測定し、得られた波形の位相遅れを測定して、これらの時間遅れは算定された。

2-3 データの有限フーリエ級数表示

2-3-1 有限フーリエ級数表示

サンプリング時間間隔を Δt とし、サンプリング個数を $M=2n$ (n : 任意の整数)とし、得られるデータ X_m ($m=0,1,2,\dots,M-1$)を次のように表す。

$$X_m \doteq \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{M/2-1} (A_k \cos \frac{2\pi km}{M} + B_k \sin \frac{2\pi km}{M}) \quad (m=0,1,\dots,M-1) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} X_m \cos \frac{2\pi km}{M} \quad (k=0,1,M/2), \\ B_k &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} X_m \sin \frac{2\pi km}{M} \quad (k=0,1,M/2-1) \end{aligned} \quad (1-a)$$

これらのデータは有限フーリエ級数を用いて次式のように表される。

$$X(t) \doteq \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{M/2-1} (A_k \cos \frac{2\pi kt}{M\Delta t} + B_k \sin \frac{2\pi kt}{M\Delta t}) \quad (2)$$

ここに、 $t=m\Delta t$ 。

2-3-2 測定パラメータと読み取りに伴う時間遅れの修正

外力の円振動数 ω (rad/s) とするとき、外力周期 $T(=2\pi/\omega)$ の p 倍の時間を $M(=2n; n$ は整数)等分した時間間隔でデータを収集する。

$$\Delta t = pT / M = 2\pi p / (\omega M) \quad (3)$$

読み取られたデータは高速フーリエ変換(FFT)を利用して直ちに有限フーリエ・スペクトルに分解される。各データがAD変換された時刻の相対的な時間間隔は算定されているので、応答が周期的であることを仮定すれば各データのサンプリングに伴う時間遅れを補正し、各チャンネルのデータが一時に収集されたデータであるように修正することができる。この方法を示す。各測定点 i の m 個のデータ D_{im} ($m=0,1,\dots,M-1$)を有限フーリエ級数表示すれば、(1)式と同様に、次式のように表現される。

$$D_i(t) \doteq \frac{1}{2}A_{i0} + \sum_{k=1}^{M/2-1} (A_{ik} \cos \frac{k\omega t}{p} + B_{ik} \sin \frac{k\omega t}{p}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} D_{im} \cos \frac{2\pi km}{M} \quad (k=0,1,M/2), \\ B_{ik} &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} D_{im} \sin \frac{2\pi km}{M} \quad (k=0,1,M/2-1) \end{aligned} \quad (4-a)$$

実験において、単一の円振動数 ω を有する正弦波、あるいは余弦波を用いて、振動台を振動させた。外力振動数と応答の位相のずれを把握し易いように、円振動数 ω を有する振動台の変位応答は余弦関数として表されるように時間軸を変更する。余弦関数と表現するときの時刻 t と実験での測定時刻との時間遅れを ϕ_i と表現する。このとき、各測定点 i の測定時刻と振動台との時間遅れを $\Delta\tau_i$ とすれば、次式が成立する。

$$t = \tau + \Delta\tau_i + \phi_i \quad (5)$$

ただし、時間遅れ ϕ_i は振動台の基本振動数、すなわち(4)式の表示の $k=p$ の関数が余弦関数の正のフーリエ係数を有し、正弦波の係数はゼロとなる次式を満たす条件から定められる。

$$A_{ip} \cos \omega \phi_i + B_{ip} \sin \omega \phi_i \geq 0, \quad A_{ip} \sin \omega \phi_i - B_{ip} \cos \omega \phi_i = 0 \quad (6-1,2)$$

(6)式から定められる ϕ_i と既知の $\Delta\tau_i$ を用いて、振動台の変位を余弦波として表現した時刻 t を利用すると、各測定点 i の応答は次式のように表わされる。

$$D_i(t) = \frac{A_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{M/2-1} (A_{ik} \cos \frac{k\omega t}{p} + B_{ik} \sin \frac{k\omega t}{p}) \quad (7)$$

$$A_{ik} = A'_{ik} \cos \frac{k\omega}{p} (\Delta\tau_i + \phi_i) - B'_{ik} \sin \frac{k\omega}{p} (\Delta\tau_i + \phi_i) \quad (k=0,\dots,M/2-1) \quad (7-a)$$

$$B_{ik} = A'_{ik} \sin \frac{k\omega}{p} (\Delta\tau_i + \phi_i) + B'_{ik} \cos \frac{k\omega}{p} (\Delta\tau_i + \phi_i) \quad (7-b)$$

応答実験時に測定パラメータ $p=6$ とし、外力振動数が360Hz以下の領域において $M=64$ 、361Hz以上の領域では $M=32$ とした。

2-3-3 円筒シェルの振動におけるモードの解析

振動台の変位を余弦関数とする時刻軸の変更を行なったとき、円筒シェル周方向のひずみ応答 ε_μ ($\mu=0,1,\dots,N-1$)は次式のように表される。

$$\varepsilon_\mu(t) = \frac{\alpha_{\mu 0}}{2} + \sum_{k=1}^{M/2-1} (\alpha_{\mu k} \cos \frac{k\omega t}{p} + \beta_{\mu k} \sin \frac{k\omega t}{p}) \quad (\mu=0,1,\dots,N-1) \quad (8)$$

有限フーリエ級数を利用して、(8)式の N 個のデータを表す。

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} Q_{00}^c + \sum_{k=1}^{N/2-1} (Q_{0k}^c \cos v\theta + R_{0k}^c \sin v\theta) \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^{M/2-1} \left[\left(\frac{1}{2} Q_{k0}^c + \sum_{v=1}^{N/2-1} (Q_{kv}^c \cos v\theta + Q_{kv}^s \sin v\theta) \right) \cos \frac{k\omega t}{p} \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{2} R_{k0}^c + \sum_{v=1}^{N/2-1} (R_{kv}^c \cos v\theta + R_{kv}^s \sin v\theta) \right) \sin \frac{k\omega t}{p} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$Q_{kv}^c = \frac{2}{N} \sum_{\mu=1}^{N-1} \alpha_{\mu k} \cos \frac{2\pi v\mu}{N}, \quad Q_{kv}^s = \frac{2}{N} \sum_{\mu=1}^{N-1} \alpha_{\mu k} \sin \frac{2\pi v\mu}{N}$$

$$R_{kv}^c = \frac{2}{N} \sum_{\mu=1}^{N-1} \beta_{\mu k} \cos \frac{2\pi v\mu}{N}, \quad R_{kv}^s = \frac{2}{N} \sum_{\mu=1}^{N-1} \beta_{\mu k} \sin \frac{2\pi v\mu}{N} \quad (9-a)$$

円筒シェルの周方向に等間隔で設置した N 個のセンサーから得られた測定データを用いて、円筒底部から85mmの位置のひずみ応答における周方向展開次数(振動モード)が分析される。ここでは $N=16$ として、応答における周方向展開次数 $v=0$ から7までのモードを分析する。

2-3-4 応答曲線の表現方法

表現する応答曲線の数を少なくするために、変位応答は次式で表される各振動成分の振幅と外力振動数(Hz)の関係として表現する。

$$d_{ik} = \sqrt{(A_{ik})^2 + (B_{ik})^2} \quad (k=1,\dots,M/2-1) \quad (10)$$

円筒タンクの周方向のひずみも各振動成分に対応する各周方向フーリエ展開次数に対応する振動モードの振幅の2乗平均値(この後、ひずみの振幅と表現する)と外力振動数(Hz)の関係として表現する。

$$\varepsilon_{kv} = \sqrt{(Q_{kv}^c)^2 + (Q_{kv}^s)^2 + (R_{kv}^c)^2 + (R_{kv}^s)^2} \quad (v=1,\dots,N/2-1; k=1,\dots,M/2-1) \quad (11-a)$$

$$\varepsilon_{00} = Q_{00}^c / 4 \quad (11-b)$$

外力振動数は $k=p$ に対応する。外力振動数の $\mu(k=p)$ 倍の振動数を有する振動成分は $\mu=1$ のとき基本振動成分、 μ が2以上の整数のとき μ 倍の高調波振動成分、 μ が分数のとき k/p 倍の分数調波振動成分と呼ぶ。変位応答、およびひずみ応答はこれら振動成分毎に分析される。これら振動成分毎に、周方向展開次数 v に対応するひずみ応答曲線が描かれる。応答を検討する次節以降において、周方向展開次数を N と表現する。また、測定のパラメータ p 、及び M に依存して、振動成分の分解能力が変化する。ここでは、2-3-2に示した p, M 値を用いた。

§3 実験において観測された応答

3-1 供試体

実験に利用された供試体は8体ある。それらを Mvi ($i=1,\dots,8$)と表現する。ほぼ同一になるように作製されたこれらの供試体の主な寸法、円筒シェルの素材である塩化ビニール・フィルム(公称厚さ0.5mm)の材料特性、のりしろ幅、重量等を表1に示す。表中の記号-は測定されたデータが残っていないことを表わす。フタは初期不整の小さな供試体を作製し、実験中に水があふれることを防止する目的で取り付けられた。このため、周方向展開次数 $N \neq 1$ の振動モードの最小固有振動はタンクの上下端部で変位が拘束されたモードとなる。

Table.1 Material Properties, Size and Weight of Cilindrical Tanks

Model	Vinyl Chloride Film		Cylindrical Shell (mm)			Mass of Shell (kg)			
	Thick-ness (mm)	E (GPa)	Dia-meter	Height	Over-lap Width	Shell	Acrylic Lid	Alumi-num Base	Total Mass
Mv1	0.51	3.38	83.7	200	4	-	-	-	-
Mv2	-	-	84.3	200	-	0.0420	0.0518	0.539	0.633
Mv3	0.51	-	84.1	200	5	0.0412	0.0541	0.531	0.627
Mv4	-	-	84.2	200	5	0.0405	0.0512	0.538	0.651
Mv5	0.509	3.19	84.3	200	5	0.0391	0.0540	0.554	0.662
Mv6	0.509	3.19	83.8	200	5	0.0375	0.0528	0.537	0.643
Mv7	0.51	3.14	84.5	200	5	0.0384	0.0527	0.589	0.697
Mv8	0.51	3.14	84.4	200	7	0.0385	0.0521	0.565	0.675

3-2 水の入った円筒タンクの応答概要

水の入った円筒タンクの水平振動応答の概括的な挙動を示す。供試体Mv6の水高130mmをモデル¹⁵⁾とする。外力振動数を30Hz-540Hzの領域において変化させ、振動台上の外力加速度の実効値を1g、2gおよび3g（これ以後、「外力加速度1g、2gおよび3g」と表現する）として得られた各周方向展開次数に分解されたひずみ応答の振幅（(11)式）を用いる。

3-2-1 基本振動成分の応答

基本振動成分の各周方向展開次数 $N(=0,1,\dots,7)$ に対応するひずみ応答曲線（横軸は外力振動数(Hz)、縦軸はひずみ応答の振幅であり、単位は $\mu(=10^{-6})$ である）をそれぞれFig.3-1に上から順¹⁶⁾に示す。図中の記号○、△、および□はそれぞれ外力加速度1g、2g、および3gに対応する。本論文において特に断らない限り、応答曲線の記号と対応する外力加速度にこれらの表現を用いる。周方向展開次数 $N=0,1,2,3,4,5,6,7$ に対応する最小固有振動数がそれぞれ231Hz,144Hz,162Hz,118Hz,124Hz,172Hz,254Hz,352Hzであると算定された。大域的には、外力加速度に比例して振幅が増大する応答が観察される。これらは線形振動応答の特徴である。測定された基本振動成分の $N=4,5,7$ のモードに対応するひずみ応答の最大振幅は約450 μ である。

3-2-2 分数調波振動応答

1/3倍分数調波振動成分、および1/2倍分数調波振動成分の各周方向展開次数 $N(=0,1,\dots,7)$ に対応するひずみ応答曲線をそれぞれFig.3-2、およびFig.3-3に示す。分数調波振動は大域的に観察すると生起しない応答であるが、ある特定の外力振動数の下で分岐する形で発生し、大きな振幅の振動となる。外力加速度1gの下で、分数調波振動は観測されなかった。外力加速度2g、および3gのとき、分数調波振動応答が出現した。

外力振動数380Hz近傍に1/3倍分数調波振動、および1/2倍分数調波振動が共に分岐している。 $N=5$ 、および $N=6$ に対応するモードの1/2倍分数調波振動、および $N=5$ のモードの1/3倍分数調波振動が主となる応答を示す。外力振動数506Hz近傍には $N=6$ のモードの1/2倍分数調波振動が主となる応答が分岐する。これは、ひずみの最大振幅が750 μ を超える大きな応答である。周方向展開次数 $N=6$ を有するこの振動モードは1/2倍分数調波振動であるから、外力振動数が506Hzのとき253Hzの振動数を有する。前節で示したように、 $N=6$ モードの最小固有振動数は254Hzである。分岐した1/2倍分数調波振動はこの最小固有振動数に対応する。この1/2倍分数調波振動が出現する領域（1/2倍分数調波振動の不安定領域）の一部の領域に $N=4$ のモードの1/3倍分数調波振動が生起する領域（1/3倍分数調波振動の不安定領域）が観察された。外力加速度3gの応答において、連続的に変化しない応答曲線が観測された。これは水が滴となって、表面から飛び出す現象が起こっていることに対応する。

一方、外力振動数350Hz近傍に $N=5$ に対応するモードの1/2倍分数調波振動の不安定領域が出現する。ひずみの最大振幅が400 μ に及ぶ応答である。この振動の振動数は $N=5$ の振動モードの最小固有振動数172Hzとほぼ一致する。分岐した1/2倍分数調波振動は、この最小固有振動数に対応する振動数、および振動モードを有する。この領域では、1/3倍分数調波振動は観測されなかった。

3-2-3 高調波振動応答

2倍高調波振動の各周方向展開次数 $N(=0,1,\dots,7)$ に対応するひずみ応答曲線をFig.3-4に示す。各周方向展開次数の最小固有振動数の1/2倍の外力振動数の下で、2倍高調波振動応答が大きな振幅を示す。周方向展開次数 $N=1,5,6$ のモードに対応する2倍高調波振動はひずみの振幅が100 μ に達する応答を示した。同

脚注: それぞれ(11)式の ε_{00} 、および ε_{kN} に対応する。 $p=6(2-3-2節)$ としているので、基本振動成分は2-3-3節に示したように $k=6$ に対応する。

Fig.3-1 Strain-Frequency for each N of the Fundamental Oscillation Component
(Mv6, Water Height 130mm, Acceleration 1.0,2.0,3.0g)

Fig.3-2 Strain-Frequency for each N of the 1/3-subharmonic Oscillation Component
(Mv6, Water Height 130mm, Acceleration 1.0,2.0,3.0g)

Fig.3-3 Strain-Frequency for each N of the 1/2-subharmonic Oscillation Component
(Mv6, Water Height 130mm, Acceleration 1.0, 2.0, 3.0g)

Fig.3-4 Strain-Frequency for each N of the 2nd-harmonic Oscillation Component
(Mv6, Water Height 130mm, Acceleration 1.0, 2.0, 3.0g)

Fig.3-5 Strain-Frequency for each N of the 3rd-higherharmonic Oscillation Component
(Mv6, Water Height 130mm, Acceleration 1.0, 2.0, 3.0g)

様に、3倍高調波振動の各周方向展開次数 $N(=0, 1, \dots, 7)$ に対応するひずみ応答曲線をFig.3-5に示す。各周方向展開次数の最小固有振動数の1/3倍の外力振動数の下で、3倍高調波振動成分の応答が増大した。これらの高調波振動の応答曲線は振幅が漸増する形で振幅が変化する。測定のパラメータ $M=32$ とした(2-3節)ことに伴い、応答に含まれる3倍高調波振動成分($k=3 \times 6=18$)が分析できなくなった。

§4 系の固有振動数と分数調波振動の不安定領域

分数調波振動はある加速度以下の外力の下では生じない非線形振動である。ある供試体において観測された分数調波振動が、同様に作製された他の供試体において生じないこともある。応答実験で観測された分数調波振動について、系の固有振動数と分数調波振動の不安定領域の振動数との関係、および出現した分数調波振動の主な振動モードに対応するひずみ応答振幅を示す。

4-1 水高をパラメータとした応答

4-1-1 固有振動数(Hz)の特定

タンクの水量を底からの水の高さ(水高)として表現する。水高をパラメータとした供試体 Mv7 の実験応答¹⁷⁾から特定された周方向展開次数 $N=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ の各振動モードに対応する最小固有振動数 ω_{N1} (Hz)をFig.4-1に示す。大きな白抜き記号は実験から特定された振動数、小さな記号は有限要素法¹⁸⁾を用いて解析された固有振動数(Hz)である。この解析において、円筒シェル、およびフタは合計26個の円錐台要素、および流体は水高に応じ最大150個の三角形リング要素を用いたメッシュにモデル化された。塩化ビニル・フィルムのポアソン比0.35、質量密度 $1.38 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ を採用した。アクリルのフタのヤング率3.34GPa、ポアソン比0.35、質量密度 $1.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ を用いた。その他の定数はTable1の値を利用した。

水高が70mm以下のとき、記号○を付けた周方向展開次数 $N=1$ の振動モードがこの系の最小固有振動数となる。この領域において、水高の変化に伴う周方向展開次数 $N>1$ の振動モードの固有振動数の変化は大きい。水高が80mm以上のとき、周方向展開次数 $N=4$ 、あるいは $N=3$ の振動モードがほぼ等しい値をとり、系の最小固有振動数となる。実験から得られた各振動モードに対応する固有振動数と解析値は良く符合する。ただし、軸対称モード(周方向展開次数 $N=0$)の実験値は解析値よりかなり小さな固有振動数となる。

同様に、実験応答から特定された周方向展開次数 $N=0,1,2,3,4,5,6,7$ の各振動モードに対応する小さい方から2番目の固有振動数 ω_{N2} (Hz)をFig.4-2に示す。記号はFig.4-1と同一の周方向展開次数の振動モードを表す。周方向展開次数 $N=1$ の振動モードに関して、両者は十分な精度で符合する。しかしながら、各周方向展開次数に対応する最小固有振動数の図と比較すると、小さい方から2番目の固有振動数の実験値と解析値の差異は大きくなる。この原因を次のように分析している。各周方向展開次数に対応する2番目の固有振動数の応答が観察されるはずの振動数領域において、さまざまな応答が発生し、いくつかの振動モードが複合した応答が観測される。これらの応答のモードを特定することが難しく、適切に特定できなかった振動モードが紛れている可能性がある。

4-1-2 分数調波振動の不安定領域

外力加速度の実効値が1g、および2gの下における供試体Mv7に生じた分数調波振動の不安定領域をそれぞれFig.5-1、およびFig.5-2に示す。これらはすべて1/2倍分数調波振動が主要な振動成分となる不安定領域である。外力加速度1gのとき、水高140mm以上のモデルにおいて、

Fig.4-1 Water Height vs the Lowest Frequencies for Each Circumferential Fourier Number N (Mv7)

Fig.4-2 Water Height vs the Second Lowest Frequencies for Each Circumferential Fourier Number N (Mv7)

外力振動数が周方向展開次数 $N=6$ に対応する振動モードの最小固有振動数の2倍近傍となる振動数領域に、 $N=6$ の振動モードの1/2倍分数調波振動が生起する。この領域はFig.5-1において黒色の領域として示した。同様に、水高70mm、および80mmにおいて、周方向展開次数 $N=5$ に対応する振動モードの最小固有振動数の2倍近傍となる振動数領域に、 $N=5$ の振動モードの1/2倍分数調波振動が生起する。この領域をFig.5-1において灰色の領域として示した。水高60mmのモデルにおいて、周方向展開次数 $N=4$ の振動モードが分岐する振動数領域がある。この領域をFig.5-1において白色の領域として示した。また、水高70mmのモデルにおいて、外力振動数が固有振動数 ω_{51} (Hz)と ω_{61} (Hz)の和の振動数の近傍領域において、これらの固有振動数に対応する周方向展開次数を有するふたつの振動モードが主となる1/2倍分数調波振動、および1/3倍分数調波振動が生起する。この領域において、1/2倍分数調波振動成分の応答が1/3倍分数調波振動成分の応答より大きいものの、後者の成分が必ず含まれる。これをFig.5-1において2重斜線の領域として示した。図中の不安定領域に隣接する数字は主要な振動モードに対応するひずみの最大振幅(単位 μ)を表す。

周方向展開次数 $N=4,5,6$ の振動モードに対応するそれぞれの最小固有振動数 ω_{41} 、 ω_{51} 、 ω_{61} 、および周方向展開次数 $N=1$ の小さい方から2番目の固有振動数 ω_{12} を用い、これらの固有振動数(Hz)の簡単な算術式(図中の矩形枠内に表示)に対応する折れ線を図中に示す。水高が変化し、固有振動数が推移するに連れて、分数調波振動の不安定領域も移動している。逆に、Fig.5-1、およびFig.5-2に示された不安定領域が生起する条件を構成する固有振動数、および対応する振動モードの関係をこの不安定領域の推移は明らかにしている。

Fig.5-1 Water Height vs Instability Regions for Subharmonic Oscillation Components (Mv7, 1g)

Fig.5-2 Water Height vs Instability Regions for Subharmonic Oscillation Components (Mv7, 2g)

4-2 分数調波振動の不安定領域における振動の分類

実験に利用した8体の供試体で観測された分数調波振動の不安定領域は次のような4タイプに大別される。

タイプA: 外力振動数が ω_{j1} ($j=4,5,6$)の2倍近傍の値をとる時、周方向展開次数 $N=j$ の振動モードを有する1/2倍分数調波振動が生起する領域である。これ以外の振動モードや他の分数調波振動成分を混入しない応答として出現する。混入した $N=j$ 以外の振動モードのひずみの最大振幅と主モードのひずみの振幅との比は0.06-0.15程度である。

不安定領域B: 外力振動数が ω_{s1} 、および ω_{s1} の和となる振動数近傍において、周方向展開次数 $N=5$ 、および $N=6$ の振動モードが連成し、1/2倍分数調波振動成分を有する応答が生起する領域である。応答が小さな方の振動モードのひずみの振幅と応答が大きな方の振動モードのひずみの振幅との比は0.28-0.41である。外力加速度が増大すると、この不安定領域内に1/3分数調波振動も分岐する幅の小さな不安定領域が出現する。ここでは周方向展開次数 $N=3$ および $N=4$ の振動モードを有する1/3倍の分数調波振動が混入する。この不安定領域をB'と表現する。

不安定領域C: 外力振動数が、周方向展開次数 $N=4$ の最小固有振動数 ω_{s1} の3倍近傍の振動数領域において、 $N=4$ の振動モードを有する1/3倍分数調波振動が生起する。この応答が観察された供試体において、 ω_{s1} の3倍の振動数は $N=1$ の固有振動数 ω_{s2} に近接していた。

不安定領域D: 外力振動数が周方向展開次数 $N=1$ の固有振動数 ω_{s2} 近傍において、 $N=5$ の振動モードを有する1/2倍分数調波振動が主要なモードとなり、 $N=5$ の振動モードを有する1/3倍分数調波振動(0.55-0.96)、および $N=6$ の振動モードを有する1/2倍分数調波振動(0.36-0.75)、 $N=4$ の振動モードを有する1/2倍分数調波振動(0.15-0.34)等の応答が分岐する。小括弧内の小数は、実験において観察された各振動モード、および振動成分のひずみ応答の振幅と主要モードのひずみ応答の振幅の比である。すなわち、振動モードの連成ばかりでなく、振動成分間にも連成が生ずる不安定領域である。これらの応答が出現する領域にふたつのタイプが観察された。ひとつはこの不安定領域が周方向展開次数 $N=1$ の共振領域と独立と判断された不安定領域(不安定領域D)である。他方は、この不安定領域が周方向展開次数 $N=1$ の固有振動数 ω_{s2} に近接し、この応答

が影響していると判断される領域(不安定領域D')である。

これら分数調波振動の不安定領域、出現する振動成分と振動モード、および観測された供試体と水高の例をTable. 2に示した。表中に下線を付した例は3-2-2、4-1-2で言及した不安定領域である。

u>

これらの不安定領域のうち、不安定領域A、C、およびD'における分数調波振動応答の生起に関しては、円筒タンクとポテンシャル流体の大変形場における動的相互作用問題として定式化された理論的な解析⁽⁴⁾が示されている。

Photo.1 Sloshing under Table Acceleration
2.0g, External Frequency 160Hz
(Mv8, Water Height 140mm)

Table.2 Instability Regions of Subharmonic Oscillations

Instability Region	Subharmonic Oscillations	Main Mode & (Secondary Mode)	Example: Specimen (height of water:mm)
Instability Region A	1/2	4	Mv7(60,90)
		5	Mv7(130), Mv8(130)
		6	Mv5(130), Mv6(170), Mv6(130), Mv7(130,170), Mv8(130,170)
Instability Region B	1/2	6(5)	Mv1(170), Mv3(170), Mv4(170), Mv6(130), Mv7(70,80)
Instability Region B'	1/2 1/3	6(5) 3 or 4	Mv3(170), Mv4(170), Mv6(130)
Instability Region C	1/3	4	Mv2(170), Mv3(170)
Instability Region D	1/2	5(6)	Mv7(70,80)
	1/3	5(6)	
Instability Region D'	1/2	5(6)	Mv1(130,170), Mv3(170), Mv4(170), Mv6(130,170)
	1/3	5(6)	

4-3 高い外力振動数領域におけるスロッシング振動

スロッシング振動^(2,24)は容器が主に振動する領域よりかなり低い振動数領域に起こる。ここで扱っている円筒タンクにおいては10Hz以下の固有振動数を有する。それゆえ、容器が振動する高い外力振動数において、水の表面はさざなみ状に挙動すると考えられてきた⁽²⁾。しかしながら、外力振動数が130Hz以上の領域において波高が6-10mmに達するスロッシング振動応答が観測された。外力加速度2g、外力振動数160Hz、水高140mmの供試体Mv8において観測された周方向展開次数 $N=1$ が主となり、波高振幅が約9mmとなったこの種のスロッシング振動応答を写真1に例示する。このような外力振動数が高い領域において、水面はさざなみ状を呈するとしていた従来の連成問題の仮定が成立しない応答である。これらはビート振動として生起するものと考えられる。生起のメカニズムは今後の課題である。

5 5 結語

5-1 周期的に振動する振動台に載せられた水の入った円筒タンクの応答に、高調波振動応答が観測される。外力振動数が各振動モードに対応する固有振動数の1/2倍、および1/3倍の値となる領域近傍において、このモードに対応する2倍、および3倍の高調波振動応答が発生する。

5-2 水の入った円筒タンク応答のうち、1/2倍分数調波振動、および1/3倍分数調波振動は大きな振幅の振動として、ある振動数領域において分岐する応答として出現する。これらの分数調波振動は容器に大きなひずみを発生させる応答である。この分数調波振動は外力加速度が十分小さい時はまったく発生しない。ある大きさ以上の外力加速度の下で、分数調波振動は出現し、この領域は不安定領域を形成する。この不安定領域は大別すると4種類に分類された。

A: 外力振動数が周方向展開次数 $N=4$ 、 $N=5$ 、および $N=6$ に対応する振動モードの固有振動数の2倍近傍において、この振動モードを有する1/2倍分数調波振動が出現する。このタイプの分数調波振動はさまざまな水高を有するモデルにおいて出現する。これらの振動数領域と周方向展開次数 $N=1$ を有する振動モードの固有振動数が近接しているときには、このモードの主共振領域においてもこれらの分数調波振動は出現する。

B: 外力振動数が、周方向展開次数 $N=5$ および $N=6$ に対応するそれぞれの振動モードの固有振動数の和となる振動数近傍において、これらの振動モードが連成した1/2倍の分数調波振動が出現する。

C: 外力振動数が周方向展開次数 $N=4$ の振動モードに対応する固有振動数の3倍の振動数領域において、周方向展開次数 $N=4$ の1/3倍の分数調波振動が出現する可能性がある。このとき、周方向展開次数 $N=4,5,6$ の振

動モードを有する1/2倍の分数調波振動も観察される。観測されたこの応答の不安定領域の出現に周方向展開次数 $N=1$ の共振領域が重なっている可能性が高い。

D: 外力振動数が周方向展開次数 $N=1$ の固有振動数 ω_{12} 近傍において、 $N=5$ の振動モードを有する1/2倍分数調波振動が主要なモードとなり、 $N=5$ の振動モードを有する1/3倍分数調波振動、および $N=6$ の振動モードを有する1/2倍分数調波振動、 $N=4$ の振動モードを有する1/2倍分数調波振動等の応答が分岐する。

本論文において周方向展開次数 $N=4,5,6$ のモードとして観測された分数調波振動が、タンクの寸法に依存してより高い周方向展開次数のモードとして出現することも有り得る。

5-3 外力振動数が高い領域において、波数の小さいモードを有するスロッシング振動が大きな振幅の応答として生起する。

これらの知見から、次のような推論が成立するものと思われる。「外力加速度の大きさがある程度以上であり、外力振動数が各周方向展開次数 N のモードを有する固有振動数の2倍、および3倍の近傍において、対応する振動モードの1/2倍、および1/3倍の分数調波振動が生起し得る。また、外力加速度の大きさがある程度以上であり、外力振動数が異なる周方向展開次数のモードに対応する固有振動数の和である領域近傍において、これらふたつの振動モードが連成して生起する1/2倍の分数調波振動が生起し得る。1/2倍の分数調波振動は1/3倍のそれよりも出現し易いようである。これらの分数調波振動の生起に周方向展開次数 $N=1$ のモードの共振領域が影響し、この領域と上記の分数調波振動が出現する領域が近接するとき、この共振領域においても分数調波振動が出現する。」これらを実験、あるいは理論解析に基づいて確認することが、水の入った円筒タンクに生起する非線形振動応答の次の課題となる。

謝辞 この研究は平成8-10年度科学研究費補助金((基盤研究(C)(2))課題番号08650678、平成2-3年度科学研究費補助金(一般研究C)課題番号02650405、昭和63-平成元年度科学研究費補助金(一般研究C)課題番号63550416の助成を受けた。準備段階の研究を含めるなら昭和59-60年度科学研究費補助金(一般研究C)課題番号59550377の助成も受けた。

この実験的な研究に15年以上の期間が費やされた。振動台の作製時から、多くの大学院生、および卒論生の献身的な協力が有って、初めて得られた研究成果である。数が多くて氏名を明示できないものの、円筒シェル供試体を作製し、実験を行うだけでも強靱な忍耐力を要求され、振動現象も理解が難しく、応答を整理する手続きも難解な研究に携わったこれらの学生に衷心より感謝する。

参考文献

- 1) Clough, R.W., Niwa, A., and Clough, D.P.: Experimental Seismic Study of Cylindrical Tanks, Proc. ASCE, vol. 105, no. ST12, 1979, pp. 2565-2597
- 2) 堀直人、谷資信、田中弥寿雄: 液体の入った円筒シェルの動的解析、日本建築学会論文報告集、第282号、昭和54年8月、pp. 83-94
- 3) Haroun, M.A. and Housner, G.W.: Dynamic Characteristics of Liquid Storage Tanks: Complications in Free Vibration Analysis of Tanks, Proc. ASCE, Vol. 108, No. EM5, 1982, pp. 783-818

- 4) 皆川洋一、堂元信宏: 液体の入った円筒シェル及び短形容器の水平振動実験、日本建築学会研究報告九州支部、第29号・1、pp. 145-148、昭和61年3月
- 5) 皆川洋一: 液体の入った回転シェルの水平振動へ及ぼす非線形振動の影響の評価に関する研究、昭和60年度科学研究費補助金(一般研究C)研究成果報告集、昭和61年3月
- 6) 皆川洋一: 有限変形場でのポテンシャル流体と弾性体容器の相互作用を支配する汎関数、日本建築学会構造系論文報告集第362号、pp. 105-115、昭和61年4月
- 7) 皆川洋一、岩本茂美、堂元信宏: 水の入った円筒シェルの水平振動実験、日本建築学会大会学術講演梗概集 構造I、pp. 939-940、昭和61年8月
- 8) 皆川洋一、岩本茂美、堂元信宏: 水の入った円筒シェルの水平振動実験、日本建築学会研究報告 中国・九州支部、第7号・1、pp. 121-124、昭和62年3月
- 9) 皆川洋一、岩本茂美: 水の入った円筒シェルの水平振動実験、日本建築学会大会学術講演梗概集 構造I、pp. 1239-1240、昭和62年10月
- 10) 皆川洋一、岩本茂美: 水の入った円筒シェルの水平振動に関する実験的研究、鹿児島大学工学部研究報告 第29号、pp. 53-63、昭和62年11月
- 11) 皆川洋一、岩本茂美、久保浩一: 水の入った円筒シェルの水平振動実験における非線形振動応答、日本建築学会大会学術講演梗概集 構造I、pp. 1313-1314、昭和63年10月
- 12) 皆川洋一: 水の入った円筒シェルの水平振動における非線形振動応答の影響の評価、平成元年度科学研究費補助金(一般研究C)研究成果報告、平成2年3月
- 13) 皆川洋一: 円筒シェルの水平振動実験における高次振動モードおよび非線形振動の生起、日本建築学会大会学術講演梗概集 構造I、pp. 1233-1234、1990年10月
- 14) Y. Minakawa: Nonlinear Oscillation Analysis of Interaction Behaviors Between the Potential Fluid and Tanks of Shell of Revolution in Finite Deformations、日本建築学会構造系論文報告集 No. 435、pp. 91-107、1992年5月
- 15) 皆川洋一、西秀敏、末広康之: 水の入った円筒シェルの水平振動実験における非線形振動、日本建築学会大会学術講演梗概集 B 構造I、pp. 927-928、1993年9月
- 16) 皆川洋一、末広康之: 水の入った円筒シェルの水平振動実験(水位に伴う非線形振動応答の生起)、日本建築学会九州支部、第35号・1、pp. 305-308、1995年3月
- 17) 末広康之、皆川洋一: 水の入った円筒シェルの水平振動実験(水高が非線形振動の生起に及ぼす影響)、日本建築学会大会講演学術講演集、構造I、pp. 553-554、1995年10月
- 18) 皆川洋一: 水の入った円筒シェルの非線形振動応答、シェル・空間構造の自然災害時非線形挙動とその抑止対策論文集、pp. 111-124、京都大学、平成9年10月
- 19) 野間紀男、上菫忠敬、皆川洋一: 水の入った円筒シェル容器の水平振動実験における非線形振動応答、日本建築学会九州支部研究報告、第38号・1、pp. 273-276、1999年3月
- 20) 皆川洋一: 水の入った円筒タンクの水平振動における非線形振動応答の研究、平成4年度科学研究補助金(一般研究C)研究成果報告書
- 21) 皆川洋一: 水平地動を受ける水の入った円筒タンクにおける非線形振動応答に関する研究、平成8-10年度科学研究補助金((基盤研究(C)(2))研究成果報告書
- 22) 木村憲明、大橋弘隆: 軸対称容器におけるスロッシングの非線形応答、日本機械学会論文集、第一部、第385号、1978、pp. 3024-3033
- 23) 池田駿介、秋山成興、中村広昭、白井伸一: 円筒タンクの液体動揺に関する研究、土木学会論文報告集、第290号、1979年10月、pp. 53-65
- 24) 大森博司、松井徹哉、日比野浩: 液体貯槽の有限振幅液面動揺に関する研究、日本建築学会構造系論文報告集、第375号、1987年5月、pp. 65-72

(1999年7月10日原稿受理、1999年12月9日採用決定)