性能関数のモーメント推定

EVALUATION OF STATISTICAL MOMENTS FOR PERFORMANCE FUNCTIONS

趙 衍 剛*, 小野 徹 郎**
Yan-Gang ZHAO and Tetsuro ONO

In the fields of structural safety and structural dynamics, there are many areas in which it is often desirable to compute the first few statistical moments of a performance function. In previous studies, five- and seven-point estimates for statistical moments have been proposed, in which the estimating points are independent of the random variable in original space and high-order moments of the original random variables are not required. These methods have been verified to be generally efficient for estimating the first two moments of a function of random variables. In the present study, in order to improve the estimation accuracy for high-order moments, the general relationship between the weights and concentrations in arbitrary number are derived, and the concentrations up to 21 points for a function of a single random variable as well as the formulas for the first six moments of a function of multiple random variables are presented. From several numerical examples, it is shown that high-order moments can be estimated with high accuracy using the proposed formulations.

Keywords: Response uncertainty, structural reliability, performance function, statistical moment, point estimates
応答不確定性、構造信頼性、性能関数、確率モーメント、点推定法

1. はじめに

近年、外力や抵抗に含まれている不確定性を考慮した信頼性設計が取り入れられる傾向にあり、日本建築学会でも、建築物の限界状態設計指針（案）¹⁾が示されるに至っている。

構造物の性能（変形能力や動的応答など）は、外力や抵抗に含まれている不確定性によってばらつきがあり、信頼性の考え方に立脚した構造設計を目指すためには構造物の性能の不確定性を把握しておくことが肝要である。構造物の性能は、外力や抵抗に含まれている不確定性を表す確率変数の関数である性能関数として表され、その不確定性を把握するには性能関数の平均値と標準偏差などのモーメントを求める必要がある。

一方、構造信頼性解析における高次積率標準化手法^{2)[3]}およびモーメント法^{4)[5][6]}では、破壊確率を求めるために性能関数の一種である限界状態関数の高次モーメントを求めることも要求されている。

性能関数を確率変数ベクトル $\mathbf{X}$ の関数 $G(\mathbf{X})$ で表せば、上述の性能関数のモーメントを求める問題は次の積分に帰着することができる。

$$\mu_G = \int G(\mathbf{X})f(\mathbf{X})d\mathbf{X} \quad (1)$$

$$M_{kG} = \int (G(\mathbf{X}) - \mu_G)^k f(\mathbf{X})d\mathbf{X} \quad \text{for } k \geq 2 \quad (2)$$

ただし、 μ_G は $G(\mathbf{X})$ の平均値であり、 M_{kG} は $G(\mathbf{X})$ の第 k 次中心モーメントである。 $f(\mathbf{X})$ は $\mathbf{X}$ の結合確率密度関数である。

式(1)と式(2)のモーメントを求める方法は、統計的解法としてはモンテカルロ法、非統計的解法としては摂動法、テーラー展開法などがある⁷⁻¹¹⁾。モンテカルロ法では膨大な計算時間が必要であり、摂動法とテーラー展開法では性能関数の導関数を計算する必要がある。これらの問題点を回避するために、2点推定法^{12)[13]}と3点推定法¹⁴⁻¹⁷⁾が提案されている。2ないし3点推定法は2ないし3点で評価される重みのついた関数値を扱う方法であり、性能関数の陽的表現および導関数を必要とせず、その簡便性の反面、2ないし3の推定点しか用いないので、性能関数によって、推定精度を維持することが難しいことと、任意な確率変数に適用する一般性がない、などの問題点がある¹⁸⁾。筆者らは標準正規空間で5、7点の推定点と重みを提供し、性能関数のモーメントを求める標準化点推定法を提案した^{5)[19]}。標準化点推定法では、推定点と重みは原空間の確率変数 $\mathbf{X}$ の分布に左右されず、従来の2ないし3点推定法の上述の問題点をかなり改善しているが、性能関数の非線形性の強さによって、5、7点の推定点だけでは、高次モーメントを求めるには不十分である点が残っている。一般には性能関数の不確定性を把握するには平均値と標準偏差の2次までのモーメントが分かれば良いが、モーメント法を用いて破壊確率を

* 名古屋工業大学 助教授・工博
** 名古屋工業大学 教授・工博

Assoc. Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.
Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

求めるには3、4次のモーメント、時には5、6次のモーメントが必要となる¹⁴⁾。本論文では性能関数の高次モーメントを求めるに必要な任意数の推定点と重みの一般関係を示し、21点までの推定点と重みを提供するとともに、標準化点推定法の性能関数のモーメント推定における適応性を検討する。

2. 標準化点推定法の概要

本節では既に提案された標準化点推定法を点推定法の概念から概説する。

点推定法は有限数の点で評価される重みのついた関数値を扱う方法であり、確率変数 x の分布形を m 点に集中させると、推定点と重みは原則的には次の連立方程式を満足するように決められる。

$$\sum_{j=1}^m P_j = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m P_j x_j = \mu_x \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^m P_j (x_j - \mu_x)^k = M_{kx} \quad \text{for } k \geq 2 \quad (5)$$

x を変数にもつ関数 $y=y(x)$ のモーメントは次のように計算される。

$$\mu_y = \sum_{j=1}^m P_j y(x_j) \quad (6)$$

$$M_{ky} = \sum_{j=1}^m P_j (y(x_j) - \mu_y)^k \quad \text{for } k \geq 2 \quad (7)$$

ただし、 x_j は推定点であり、 P_j は x_j に対応する重みである。

推定点の数 m が奇数であれば、 x_j と P_j を決めるには式(3)、(4)、(5)のような $2m-1$ 個の方程式が必要となり、 x の $2m-2$ 次モーメントが必要となる。推定点の数 $m=2$ と $m=3$ のとき、推定点 x_j と重み P_j は x の4次までのモーメントを用いる計算式で既に与えられている^[12-17]。しかし、確率変数の種類によって、推定点は確率変数の定義領域以外にある場合があり、任意な確率変数に適用する一般性がなく、2、3の推定点しか用いないので、性能関数によって、推定精度を維持することが困難である。推定精度を向上させるためには推定点の数を増やすことが考えられるが、推定点と重みを求めるために確率変数 x そのものの高次積率を用いなければならず、推定点数を増やすことは高次積率の数が大きくなり(例えば5つの推定点を求めるには8次モーメントまで必要になる)、 P_j と x_j の一般計算式を求めるには問題がある。

これらの欠点を改善するために、標準化点推定法^{[5][19]}では標準正規空間で標準化推定点を求め、各標準化推定点でRosenblatt逆変換により原空間の推定点を求めて、性能関数のモーメントを求める。式(6)と式(7)に示した $y=y(x)$ のモーメントは標準化点推定法で計算すると、次式のようになる。

$$\mu_y = \sum_{j=1}^m P_j y \left[(T^{-1}(u_j)) \right] \quad (8)$$

$$M_{ky} = \sum_{j=1}^m P_j \left(y \left[(T^{-1}(u_j)) \right] - \mu_y \right)^k \quad \text{for } k \geq 2 \quad (9)$$

ただし、 u_j 、 P_j は標準化推定点とその対応する重みであり、 T はRosenblatt変換である。

標準正規確率変数では、平均値が0、分布形が左右対称形になっているので、推定点を求めることは容易である。さらに、求められた

標準化推定点は原空間の確率変数 x の分布には左右されず、 x の高次モーメントを用いる必要がない。

標準正規確率変数のモーメント特徴を利用すれば、式(4)と式(5)は次式となり、

$$\sum_{j=1}^m P_j u_j^k = 0 \quad \text{for odd } k \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^m P_j u_j^k = (k-1)!! \quad \text{for even } k \quad (11)$$

推定点と重みは比較的容易に得られる。

m が小さいとき(例えば $m=5, 7$ など)、推定点と重みは式(10)と式(11)の連立方程式により求めることができるが、 m が大きいつき式(10)と式(11)の連立方程式の次数と個数とも大きくなり、推定点と重みを求めることが難しくなる。

3. 標準化点推定法の任意数の推定点と重み

3.1 推定点と重みの導出

任意数の推定点と重みを導出するために、 $y=y(x)$ を直接標準正規確率変数 u の関数で表し、式(9)に対して次の関数代替を行う。

$$z(u) = \left(y \left[(T^{-1}(u)) \right] - \mu_y \right)^k \quad (12)$$

$y=y(x)$ のモーメントの定義と前述の点推定法の概念により、式(9)は次のように標準正規空間で表すことができる。

$$\int z(u) \phi(u) du = \sum_{j=1}^m P_j z(u_j) \quad (13)$$

即ち、

$$\int z(u) \exp \left(-\frac{1}{2} u^2 \right) du = \sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^m P_j z(u_j) \quad (14)$$

ただし、 $\phi(u)$ は u の確率密度関数である。

式(14)の左辺はGaussian型積分^[20]である。数値積分の原理^[20]により、この種の積分は重み関数が $\exp(-u^2/2)$ の直交多項式の分点と重みから次のように計算される。

$$\int z(u) \exp \left(-\frac{1}{2} u^2 \right) du = \sum_{j=1}^m w_j z(u_j) \quad (15)$$

ただし、 u_j と w_j はそれぞれ重み関数が $\exp(-u^2/2)$ の直交多項式であるHermite多項式 $H_m(u)$ (付録参照)の分点と重みであり、 u_j は一次元代数方程式 $H_m(u)=0$ の根である。

式(14)と式(15)を比較することにより、標準化推定点法における任意数 m の推定点 u_j はHermite多項式 $H_m(u)$ の分点、即ち $H_m(u)=0$ の根であることが分かる。以下 u_j に対応する重み P_j の計算式を導く。

$u = \sqrt{2}t$ とすれば式(15)は次式のようになる。

$$\int z(\sqrt{2}t) \exp(-t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^m w_j z(\sqrt{2}t_j) \quad (16)$$

式(16)の左辺は重み関数が $\exp(-t^2)$ のGaussian積分であり、次の数値積分公式から計算される^[20]。

$$\int z(\sqrt{2}t) \exp(-t^2) dt = \sum_{j=1}^m w'_j z(\sqrt{2}t_j) \quad (17)$$

ただし、 t_j と w'_j はそれぞれ重み関数が $\exp(-t^2)$ の直交多項式であるHermite多項式 $H_m(t)$ (付録参照)の分点と重みであり、任意数 m の分

点 t_j に対応する重み w_j は次式より計算される^[20]。

$$w_j = \frac{2^{m-1} m! \sqrt{\pi}}{m^2 H_{m-1}^2(t_j)} \quad (18)$$

式 (14)、式 (15)、式 (16) と式 (17) を比較することにより、 P_j 、 w_j と w_j' の間に次の関係が得られる。

$$P_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} w_j' \quad (19)$$

$H_m(t)$ と $H_{em}(u)$ の間の次に示す関係式 (付録参照)

$$H_m(t) = 2^{m/2} H_{em}(u) \quad (20)$$

を式 (18) に代入し、式 (19) より、任意数 m の推定点 u_j に対応する重み P_j が次のように得られる。

$$P_j = \frac{m!}{m^2 H_{em-1}^2(u_j)} \quad (21)$$

奇数の m に対しては、 $H_{em-1}(0)=(m-2)!!$ となり、中心点 $u_j=0$ に対応する重み P_0 は次式から簡単に計算することができる。

$$P_0 = \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad (22)$$

例えば、 $m=3$ のとき、 $P_0=2/3$ 、 $m=5$ のとき、 $P_0=8/15$ 、 $m=7$ のとき、 $P_0=16/35$ 、 $m=9$ のとき、 $P_0=128/315$ 、 m が大きくなればなるほど中心点の重みが小さくなる事が分かる。

上述の計算方法を用い、 $m=21$ までの推定点と重みは Table 1 のように得られる。偶数と奇数の m に対する重みと標準正規確率変数 u の確率密度関数 ϕ の関係をそれぞれ Fig. 1 と Fig. 2 に示す。

3.2 標準化点推定法の精度の検討

現実の性能関数は多種多様であり、一意的に検討することは難しいが、ここでは性能関数の非線形を表す一つの目安として、性能関数に含まれる標準正規確率変数 u の次数に関して検討する。

文献 [20] により、 m 個の推定点に対しては、式 (17) の誤差は次式で表すことができる。

$$R_m = \frac{m! \sqrt{\pi}}{(2m)!} z^{(2m)}(\sqrt{2}\xi) \quad -\infty < \xi < +\infty \quad (23)$$

ただし、 $z^{(2m)}(\sqrt{2}\xi)$ は $z(\sqrt{2}t)$ の $2m$ 次導関数の ξ での値を表している。 ξ は任意の実数である。

式 (23) によると、 m 個の推定点では、関数 $z(u)=u^{2m-1}$ の $2m$ 次導関数は 0 になるので、式 (17) の誤差 R_m も 0 になる。即ち、 m 個の推定点では、関数 $z(u)=u^{2m-1}$ の期待値を正確に推定することができる。従って、 u の r 次関数の期待値あるいは u の 1 次関数の r 次モーメントを推定するには $(r+1)/2$ 個の推定点が必要となる。

一般には、 u の r 次関数の k 次モーメントを推定するに必要となる推定点の数は次式で表わされる。

$$m = \frac{k r + 1}{2} \quad (24)$$

例えば、 u の 4 次関数の 4 次モーメントを推定するには、9 個の推定点が必要となり、6 次関数の 6 次モーメントを推定するには、19 個の推定点が必要となる。

以上の検討によると、性能関数を Rosenblatt 変換により標準正規空間に変換すると、非線形性を表す目安としての u の次数は判断しがたいが、Table 1 の $m=21$ までの推定点と重みを利用して、かなり強い非

線形性を有する性能関数のモーメントを推定することができる。

4. 多変数の関数の点推定

性能関数は多変数の関数であり、そのモーメントは、原則的に前述の推定点と重みを多重積分式に代入して計算できる。しかし、推定点数が m 、確率変数の数が n あるとすると、 m^n 回の関数値を計算する必要がある。ここでは、次式で性能関数を近似する。

$$G(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n (G_i - G_\mu) + G_\mu \quad (25)$$

ただし、 G_μ と G_i を次のように設定する。

$$G_\mu = G(\boldsymbol{\mu}) \quad (26)$$

$$G_i = G[T^{-1}(\mathbf{U}_i)] \quad (27)$$

$\mathbf{U}_i = [u_{\mu 1}, u_{\mu 2}, \dots, u_{\mu i}, \dots, u_{\mu n}]^T$ 、 $\boldsymbol{\mu}$ は平均値ベクトルであり、 $u_{\mu k}$ 、 $k=1, \dots, n$ は $\boldsymbol{\mu}$ に対応する u 空間の第 k 個目の値である。

式 (26) と (27) の定義により、 G_i は u_i だけの関数である。Rosenblatt 変換の特性により、 $\mathbf{X}$ の相関性と関係なく、 G_i は互いに独立になる。従って、 $G(\mathbf{X})$ の 6 次までのモーメントは次式より表される。

$$\mu_G = \sum_{i=1}^n (\mu_i - G_\mu) + G_\mu \quad (28)$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (29)$$

$$\alpha_{3G} \sigma_G^3 = \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} \sigma_i^3 \quad (30)$$

$$\alpha_{4G} \sigma_G^4 = \sum_{i=1}^n \alpha_{4i} \sigma_i^4 + 6 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \sigma_i^2 \sigma_j^2 \quad (31)$$

$$\alpha_{5G} \sigma_G^5 = \sum_{i=1}^n \alpha_{5i} \sigma_i^5 + 10 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \sigma_i^2 \sigma_j^3 (\alpha_{3i} \sigma_i + \alpha_{3j} \sigma_j) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{6G} \sigma_G^6 = & \sum_{i=1}^n \alpha_{6i} \sigma_i^6 + 90 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j>i}^{n-1} \sum_{k>j}^n \sigma_i^2 \sigma_j^2 \sigma_k^2 \\ & + 15 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \sigma_i^2 \sigma_j^2 \left(\alpha_{4i} \sigma_i^2 + \alpha_{4j} \sigma_j^2 + \frac{4}{3} \alpha_{3i} \sigma_i \alpha_{3j} \sigma_j \right) \end{aligned} \quad (33)$$

ここで μ_i 、 σ_i 、 α_{ri} はそれぞれ G_i の平均値、標準偏差、及び無次元 r 次モーメントである。 G_i は u_i だけの関数であるので、 μ_i 、 σ_i 、 α_{ri} は前節の各式で計算する。

5. 性能関数のモーメント推定

5.1 1 確率変数の場合の標準化点推定法の考察

本論文の性能関数のモーメント推定は 1 確率変数の関数のモーメント推定に基づいているので、次の 1 確率変数の簡単な関数を対象として、標準化点推定法の計算手順を示すとともに、1 確率変数の関数のモーメント推定に標準化点推定法の精度を考察する。

$$y = x^2 \quad (34)$$

ただし、 x は平均値が 1 の対数正規分布に従う確率変数である。

x の変動係数 $V=0.2$ の時、 $\ln(x)$ の平均値と標準偏差はそれぞれ $\lambda=-0.0196$ と $\zeta=0.198$ であり、Rosenblatt 逆変換は次式により簡単に行なえる。

$$x = \exp(\zeta u + \lambda) = \exp(0.198u - 0.0196) \quad (35)$$

Table 1 Estimating Points and Weights for Point Estimates in Standard Normal Space

$\pm u_i$	P_i	$\pm u_i$	P_i	$\pm u_i$	P_i
m=2		m=12		m=18	
1.0000 0000	$5.0000\ 0000 \times 10^{-1}$	0.4444 0300	$3.2166\ 4362 \times 10^{-1}$	0.3652 4576	$2.7278\ 3235 \times 10^{-1}$
		1.3403 7520	$1.4696\ 7048 \times 10^{-1}$	1.0983 9552	$1.6068\ 5304 \times 10^{-1}$
m=3		2.2594 6445	$2.9116\ 6879 \times 10^{-2}$	1.8397 7992	$5.4896\ 6325 \times 10^{-2}$
0.0000 0000	$6.6666\ 6667 \times 10^{-1}$	3.2237 0983	$2.2033\ 8069 \times 10^{-3}$	2.5958 3369	$1.0516\ 5178 \times 10^{-2}$
1.7320 5081	$1.6666\ 6667 \times 10^{-1}$	4.2718 2585	$4.8371\ 8492 \times 10^{-5}$	3.3747 3654	$1.0654\ 8480 \times 10^{-3}$
		5.5009 0170	$1.4999\ 2717 \times 10^{-7}$	4.1880 2023	$5.1798\ 9614 \times 10^{-5}$
m=4		m=13		5.0540 7269	$1.0215\ 5240 \times 10^{-6}$
0.7419 6378	$4.5412\ 4145 \times 10^{-1}$	0.0000 0000	$3.4099\ 2341 \times 10^{-1}$	6.0077 4591	$5.9054\ 8848 \times 10^{-9}$
2.3344 1422	$4.5875\ 8548 \times 10^{-2}$	0.8566 7949	$2.3787\ 1523 \times 10^{-1}$	7.1394 6485	$4.4165\ 8877 \times 10^{-12}$
		1.7254 1838	$7.9168\ 9559 \times 10^{-2}$		
m=5		2.6206 8997	$1.1770\ 5605 \times 10^{-2}$		
0.0000 0000	$5.3333\ 3333 \times 10^{-1}$	3.5634 4438	$6.8123\ 6350 \times 10^{-4}$	m=19	
1.3556 2618	$2.2207\ 5922 \times 10^{-1}$	4.5913 9845	$1.1526\ 5965 \times 10^{-5}$	0.0000 0000	$2.8377\ 3192 \times 10^{-1}$
2.8569 7001	$1.1257\ 4113 \times 10^{-2}$	5.8001 6725	$2.7226\ 2764 \times 10^{-8}$	0.7120 8504	$2.2094\ 1712 \times 10^{-1}$
				1.4288 7668	$1.0360\ 3657 \times 10^{-1}$
m=6		m=14		2.1555 0276	$2.8666\ 6910 \times 10^{-2}$
0.6167 0659	$4.0882\ 8470 \times 10^{-1}$	0.4125 9046	$3.0263\ 4627 \times 10^{-1}$	2.8980 5128	$4.5072\ 3542 \times 10^{-3}$
1.8891 7588	$8.8615\ 7460 \times 10^{-2}$	1.2426 8896	$1.5408\ 3340 \times 10^{-1}$	3.6644 1655	$3.7850\ 2109 \times 10^{-4}$
3.3242 5743	$2.5557\ 8440 \times 10^{-3}$	2.0883 4475	$3.8650\ 1088 \times 10^{-2}$	4.4658 7263	$1.5351\ 1460 \times 10^{-5}$
		2.9630 3658	$4.4289\ 1911 \times 10^{-3}$	5.3205 3638	$2.5322\ 2003 \times 10^{-7}$
m=7		3.8869 2458	$2.0033\ 9554 \times 10^{-4}$	6.2628 9116	$1.2203\ 7085 \times 10^{-9}$
0.0000 0000	$4.5714\ 2857 \times 10^{-1}$	4.8969 3640	$2.6609\ 9134 \times 10^{-6}$	7.3825 7902	$7.4828\ 3005 \times 10^{-13}$
1.1544 0539	$2.4012\ 3179 \times 10^{-1}$	6.0874 0955	$4.8681\ 6126 \times 10^{-9}$		
2.3667 5941	$3.0757\ 1240 \times 10^{-2}$				
3.7504 3972	$5.4826\ 8856 \times 10^{-4}$				
		m=15		m=20	
m=8		0.0000 0000	$3.1825\ 9518 \times 10^{-1}$	0.3469 6416	$2.6079\ 3063 \times 10^{-1}$
0.5390 7981	$3.7301\ 2258 \times 10^{-1}$	0.7991 2907	$2.3246\ 2294 \times 10^{-1}$	1.0429 4535	$1.6173\ 9334 \times 10^{-1}$
1.6365 1904	$1.1723\ 9908 \times 10^{-1}$	1.6067 1007	$8.9417\ 7954 \times 10^{-2}$	1.7452 4732	$6.1506\ 3721 \times 10^{-2}$
2.8024 8586	$9.6352\ 2012 \times 10^{-3}$	2.4324 3683	$1.7365\ 7745 \times 10^{-2}$	2.4586 6361	$1.3997\ 8374 \times 10^{-2}$
4.1445 4719	$1.1261\ 4538 \times 10^{-4}$	3.2890 8242	$1.5673\ 5750 \times 10^{-3}$	3.1890 1482	$1.8301\ 0313 \times 10^{-3}$
		4.1962 0771	$5.6421\ 4641 \times 10^{-5}$	3.9439 6735	$1.2882\ 6280 \times 10^{-4}$
m=9		5.1900 9359	$5.9754\ 1960 \times 10^{-7}$	4.7345 8133	$4.4021\ 2109 \times 10^{-6}$
0.0000 0000	$4.0634\ 9206 \times 10^{-1}$	6.3639 4789	$8.5896\ 4990 \times 10^{-10}$	5.5787 3881	$6.1274\ 9026 \times 10^{-8}$
1.0232 5566	$2.4409\ 7503 \times 10^{-1}$			6.5105 9016	$2.4820\ 6236 \times 10^{-10}$
2.0768 4798	$4.9916\ 4068 \times 10^{-2}$	m=16		7.6190 4854	$1.2578\ 0067 \times 10^{-13}$
3.2054 2900	$2.7891\ 4132 \times 10^{-3}$	0.3867 6060	$2.8656\ 8521 \times 10^{-1}$		
4.5127 4586	$2.2345\ 8440 \times 10^{-5}$	1.1638 2910	$1.5833\ 8373 \times 10^{-1}$		
		1.9519 8035	$4.7284\ 7524 \times 10^{-2}$	m=21	
m=10		2.7602 4505	$7.2669\ 3760 \times 10^{-3}$	0.0000 0000	$2.7026\ 0183 \times 10^{-1}$
0.4849 3571	$3.4464\ 2335 \times 10^{-1}$	3.6008 7362	$5.2598\ 4927 \times 10^{-4}$	0.6780 4569	$2.1533\ 3716 \times 10^{-1}$
1.4659 8909	$1.3548\ 3703 \times 10^{-1}$	4.4929 5530	$1.5300\ 0322 \times 10^{-5}$	1.3597 6582	$1.0839\ 2286 \times 10^{-1}$
2.4843 2584	$1.9111\ 5805 \times 10^{-2}$	5.4722 2571	$1.3094\ 7322 \times 10^{-7}$	2.0491 0247	$3.3952\ 7298 \times 10^{-2}$
3.5818 2348	$7.5807\ 0934 \times 10^{-4}$	6.6308 7820	$1.4978\ 1472 \times 10^{-10}$	2.7505 9298	$6.4396\ 9705 \times 10^{-3}$
4.8594 6283	$4.3106\ 5263 \times 10^{-6}$			3.4698 4669	$7.0804\ 7795 \times 10^{-4}$
		m=17		4.2143 4398	$4.2192\ 3474 \times 10^{-5}$
m=11		0.0000 0000	$2.9953\ 8370 \times 10^{-1}$	4.9949 6394	$1.2253\ 5484 \times 10^{-6}$
0.0000 0000	$3.6940\ 8369 \times 10^{-1}$	0.7518 4260	$2.2670\ 6308 \times 10^{-1}$	5.8293 8201	$1.4506\ 6128 \times 10^{-8}$
0.9288 6900	$2.4224\ 0300 \times 10^{-1}$	1.5098 8331	$9.7406\ 3712 \times 10^{-2}$	6.7514 4472	$4.9753\ 6860 \times 10^{-11}$
1.8760 3502	$6.6138\ 7461 \times 10^{-2}$	2.2810 1944	$2.3086\ 6570 \times 10^{-2}$	7.8493 8290	$2.0989\ 9122 \times 10^{-14}$
2.8651 2316	$6.7202\ 8524 \times 10^{-3}$	3.0737 9718	$2.8589\ 4606 \times 10^{-3}$		
3.9361 6661	$1.9567\ 1930 \times 10^{-4}$	3.9000 6572	$1.6849\ 1432 \times 10^{-4}$		
5.1880 0122	$8.1218\ 4979 \times 10^{-7}$	4.7785 3159	$4.0126\ 7945 \times 10^{-6}$		
		5.7444 6008	$2.8080\ 1612 \times 10^{-8}$		
		6.8891 2244	$2.5843\ 1492 \times 10^{-11}$

Fig.1 Estimating points and weights of even number

Fig.2 Estimating points and weights of odd number

Fig.3 Point estimates for μ

Fig.4 Point estimates for COV

Fig.5 Point estimates for α_3 Fig.6 Point estimates for α_4 Fig.7 Point estimates for α_5 Fig.8 Point estimates for α_6

Table 1 により、 $m=5$ の時標準正規空間での推定点は $u_1=-2.85697$, $u_2=-1.35563$, $u_3=0$, $u_4=1.35563$, $u_5=2.85697$ であり、式 (35) よりこれらの推定点の対応する元の空間での推定点は $x_1=0.5569$, $x_2=0.7497$, $x_3=0.9806$, $x_4=1.2826$, $x_5=1.7267$ と得られ、各推定点で対応する式 (34) の関数値は $y_1=0.3101$, $y_2=0.5621$, $y_3=0.9615$, $y_4=1.6450$, $y_5=2.9814$ となる。これらの関数値及び Table 1 に示される重み $P_1=0.011257$, $P_2=0.22208$, $P_3=0.40883$, $P_4=0.22208$, $P_5=0.011257$ を式 (8), (9) に代入し、 y の 6 次までのモーメントは $\mu=1.04$, $\sigma=0.4286$, $\alpha_3=1.3037$, $\alpha_4=6.0577$, $\alpha_5=22.159$, $\alpha_6=99.652$ のように計算できる。

x の変動係数 V をパラメータとし、従来の 3 点推定と標準化 5, 7, 9, 11, 13, 15 点推定を用いて、6 次までの無次元モーメントの推定値を Fig.3 から Fig.8 に示す。Fig.3 から Fig.8 により以下のようなことが読み取れる。

- (1) 変動係数 V が大きくなるにつれて点推定の精度が悪くなる。これは変動係数 V が大きくなると、対数標準偏差 ζ も大きくなり、式 (35) の Rosenblatt 逆変換関数あるいは式 (34) の性能関数の非

線形性が強くなるからである。

- (2) 従来の点推定法は平均値と標準偏差だけに適当な推定結果を与えており、標準化点推定は従来の点推定の結果をかなり改善していることが分かる。
- (3) 本例では平均値と標準偏差に対しては 5, 7 点を用いて十分な推定結果が得られたが、無次元 3, 4 次モーメントを適切に推定するには 9, 11 点の推定点が必要となり、無次元 5, 6 次モーメントを適切に推定するには 13, 15 点の推定点が必要となる。

5.2 限界状態関数のモーメント推定

片持ち梁に曲げモーメント M_y , M_z と捩れモーメント T が作用した場合を想定し、次のせん断応力に関する限界状態関数を対象として、多確率変数の関数のモーメント推定の計算手順を示すとともに、その精度を考察する。

$$G(\mathbf{X}) = M_{\text{yield}}^2 - M_y^2 - M_z^2 - T^2 \quad (36)$$

Table 2 Moments of performance function for Ex. 2

method	μ	σ	α_3	α_4	α_5	α_6
3P ^[17]	2469.5	2156.3	2.1998	7.2804	20.792	62.551
5P	2469.5	2155.1	2.6174	14.520	81.721	480.29
7P	2469.5	2156.3	2.7263	18.319	158.76	1679.8
9P	2469.5	2156.3	2.7299	18.741	182.26	2541.8
11P	2469.5	2156.3	2.7299	18.765	185.73	2827.3
13P	2469.5	2156.3	2.7299	18.766	186.04	2882.6
15P	2469.5	2156.3	2.7299	18.766	186.06	2889.7
Exact	2469.5	2156.3	2.7299	18.766	186.06	2890.4

ただし、 M_{yield} , M_y , M_z と T を全て変動係数が0.35の対数正規確率変数とし、平均値をそれぞれ50, 10, 10, 10とする。

式(26), (27)の定義により式(25)を構成する G_μ , G_1 , G_2 , G_3 および G_4 は次のように得られる。

$$G_\mu = 2200 \quad (37a)$$

$$G_1 = M_{\text{yield}}^2 - 300 \quad (37b)$$

$$G_2 = 2300 - M_y^2 \quad (37c)$$

$$G_3 = 2300 - M_z^2 \quad (37d)$$

$$G_4 = 2300 - T^2 \quad (37e)$$

式(37)の G_1 , G_2 , G_3 および G_4 は1確率変数の関数であり、 $m=5$ の時6次までのモーメントは5.1節で示した手順で次のように容易に計算できる。

$$\mu_1 = 2506.3, \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2187.8, \sigma_1 = 2149.9, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 85.996,$$

$$\alpha_{31} = 2.6368, \alpha_{32} = \alpha_{33} = \alpha_{34} = -2.6368, \alpha_{41} = 14.630, \alpha_{42} = \alpha_{43} = \alpha_{44} = 14.630,$$

$$\alpha_{51} = 82.583, \alpha_{52} = \alpha_{53} = \alpha_{54} = -82.583, \alpha_{61} = 486.20, \alpha_{62} = \alpha_{63} = \alpha_{64} = 486.20$$

式(28)-(33)より G の6次までのモーメントは $\mu = 2469.5$, $\sigma = 2155.1$, $\alpha_3 = 2.6174$, $\alpha_4 = 14.520$, $\alpha_5 = 81.721$, $\alpha_6 = 480.29$ のように得られる。

15点までの点推定の結果をTable 2に示し、表中、太文字は精算値に対して誤差が2%を越える結果を示している。Table 3より、推定点数を増やすことにより、式(37)の限界状態関数の6次までのモーメントでも、かなりよい精度で推定できることが分かる。

5.3 構造システムの限界状態関数のモーメント推定

次の骨組システムの限界状態関数^[2]のモーメントを推定する。

$$G(\mathbf{X}) = \min \{g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), g_3(\mathbf{X}), g_4(\mathbf{X})\} \quad (38a)$$

$$g_1(\mathbf{X}) = 2M_1 + 2M_3 - 4.5S \quad (38b)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 2M_1 + M_2 + M_3 - 4.5S \quad (38c)$$

$$g_3(\mathbf{X}) = M_1 + M_2 + 2M_3 - 4.5S \quad (38d)$$

$$g_4(\mathbf{X}) = M_1 + 2M_2 + M_3 - 4.5S \quad (38e)$$

M_i , S は相互独立的な対数正規確率変数であり、それらの平均値をそれぞれと200, 50と設定し、変動係数をそれぞれ0.15, 0.4と設定した。式(25)を構成する G_i は次のように得られる。

$$G_\mu = 575 \quad (39a)$$

Table 3 Moments of performance function for Ex. 3

	μ	σ	α_3	α_4	α_5	α_6
3P ^[17]	537.608	114.207	-0.613	3.150	-4.564	16.397
5P	532.958	114.485	-0.704	4.098	-9.492	40.670
7P	531.076	114.374	-0.698	4.140	-10.131	48.536
9P	530.071	114.301	-0.695	4.143	-10.140	49.238
11P	529.453	114.252	-0.694	4.145	-10.135	49.310
13P	529.037	114.218	-0.693	4.146	-10.132	49.346
15P	528.741	114.193	-0.693	4.147	-10.131	49.373
MCS	540.961	114.021	-0.621	4.221	-9.315	49.248

$$G_1 = \min \{ 2M_1 + 175, M_1 + 375 \} \quad (39b)$$

$$G_2 = \min \{ 575, 2M_2 + 175, M_2 + 375 \} \quad (39c)$$

$$G_3 = \min \{ 2M_3 + 175, M_3 + 375 \} \quad (39d)$$

$$G_4 = 800 - 4.5S \quad (39e)$$

標準化15点までの点推定の結果をTable 3に示し、7点以上では安定な推定結果が得られていることが分かる。比較するため、式(38)の限界状態関数に対してサンプリング数が100,000のモンテカルロシミュレーション(MCS)を行い、得られた各次モーメントをTable 3に示す。Table 3によると、 σ , α_3 , α_6 については標準化点推定の結果はMCSの結果に良い精度で追従しているが、 μ , α_4 , α_5 について推定点数を増やしても、無視できない隔りが残る。これは式(25)の近似式などの問題点と考えられ、さらなる研究が必要となる。

5.4 不規則応答の不確定性推定

動的荷重が作用する1自由度線形システムの不規則振動解析を通して本手法の有効性について考察する。入力ホワイトノイズで、不規則振動解析により、最大応答の平均値と標準偏差は次のように計算される。

$$\mu_m = \sqrt{\frac{\pi s}{4(2\pi f)^3 \zeta}} \left[\sqrt{2 \ln fD} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln fD}} \right] \quad (40)$$

$$\sigma_m = \frac{\pi}{\sqrt{12 \ln fD}} \sqrt{\frac{\pi s}{4(2\pi f)^3 \zeta}} \quad (41)$$

ただし、 s は入力のパワースペクトル密度、 D は継続時間、 f は固有振動数、 ζ は減衰定数である。

パラメータの不確定性を取り入れるために、式(40), (41)のパラメータとしての s, D, f, ζ は相互独立的確率変数とする。 s は平均値0.25と変動係数0.60の極値II型分布とし、 f は平均値2Hzと変動係数0.1の正規分布とする。 D と ζ を対数正規分布とし、それぞれの平均値は $D=10$ 秒、 $\zeta=0.02$ とし、変動係数はそれぞれ0.3と0.4とする。各パラメータが確定値として、 s, D, f, ζ がそれぞれ平均値を取るとき、最大応答の不確定性の結果として $\mu_m = 0.2705$, $\sigma_m = 0.02445$, $V = 0.0904$ が得られている。 s, D, f, ζ に含まれている不確定性を取り入ると、 μ_m, σ_m は確率変数 $\mathbf{X} = [s, D, f, \zeta]$ の関数となり、最大応答の平均値と標準偏差は次のように与えられる^[18]。

Table 4 Uncertainties of stochastic response for Example 4

	$E[\mu_m^2(\mathbf{X})]$	$E[\sigma_m^2(\mathbf{X})]$	μ_M	σ_M	V
5P	0.04283	0.001718	0.1966	0.07679	0.3906
MCS	0.04312	0.001714	0.1969	0.07787	0.3959
difference	0.673%	0.233%	0.152%	1.387%	1.339%

$$\mu_M = E[\mu_m(\mathbf{X})] \quad (42)$$

$$\sigma_M^2 = E[\sigma_m^2(\mathbf{X})] + E[\mu_m^2(\mathbf{X})] - \mu_M^2 \quad (43)$$

推定点は確率変数の定義領域以外にあるので、確率変数 s に対しては従来の3点推定法は適用できない。標準化5点推定を用いて、式(42)、(43)の $E[\sigma_m^2(\mathbf{X})]$ 、 $E[\mu_m^2(\mathbf{X})]$ を推定し、不規則応答の不確定性の結果をTable 4に示す。比較するため、式(42)、(43)の $E[\sigma_m^2(\mathbf{X})]$ 、 $E[\mu_m^2(\mathbf{X})]$ をサンプリング数が100,000のMCSで求め、得られた各次モーメントもTable 4に示す。Table 4により点推定法の結果は良い精度でMCSの結果と対応している。また、パラメータに含まれている不確定性を取り入ると、最大応答の変動係数が0.3906となり、確定的パラメータの場合の0.0904よりかなり大きくなることが分かる。

6. まとめ

本論文の考察により得られた結論は以下の通りである。

- 1) 標準化点推定法は有限数の点で評価される性能関数値の単純代数計算のみで構成されており、性能関数の陽的表現および導関数が必要とせず、性能関数のモーメントを推定するには有効な手段と考えられる。
- 2) 標準化推定法における任意数 m の推定 u_j は Hermite 多項式 $H_{em}(u)$ の分点、即ち $H_{em}(u)=0$ の根である。
- 3) 標準化推定法における任意数の推定点と重みの一般的関係を提示し、21点までの推定点と重みを提供した。これらの推定点と重みは原空間の確率変数の分布には左右されず、非線形が強い性能関数の高次モーメントを求めるには有用である。

付録： Hermite 多項式 $H(x)$ と $H_e(u)$ ^[20]

本論文で用いている Hermite 多項式 $H(x)$ と $H_e(u)$ はそれぞれ次のように定義されている。

$$H_m(x) = \frac{(-1)^m}{\exp(-x^2)} \frac{d^m[\exp(-x^2)]}{dx^m} \quad (44)$$

$$H_{em}(u) = \frac{(-1)^m}{\phi(u)} \frac{d^m[\phi(u)]}{du^m} \quad (45)$$

$u = \sqrt{2}x$ とすれば、 $H_m(x)$ と $H_{em}(u)$ の関係式が得られる。

$$H_m(x) = 2^{m/2} H_{em}(u) \quad (46)$$

例えば、5次までの $H_m(x)$ と $H_{em}(u)$ はTable 5に示す。

Table 5 First 5 polynomials of $H_m(x)$ and $H_{em}(u)$

m	$H_m(x)$	$H_{em}(u)$
1	$2x$	u
2	$4x^2 - 2$	$u^2 - 1$
3	$8x^3 - 12x$	$u^3 - 3u$
4	$16x^4 - 48x^2 + 12$	$u^4 - 6u^2 + 3$
5	$32x^5 - 160x^3 + 120x$	$u^5 - 10u^3 + 15u$

謝辞

本論文の査読者からは、本論文の内容と構成についていくつかの貴重なコメントを頂いた。付して感謝の意を表す。

参考文献

- [1] 日本建築学会限界状態設計法小委員会、建築物の限界状態設計指針(案)、1999.3.
- [2] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率標準化手法の提案とそれに基づく信頼性指標の設定、日本建築学会構造系論文報告集、No. 359, 43-49, 1986.1.
- [3] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率標準化手法の設計法への展開とその有効性、日本建築学会構造系論文報告集、No. 365, 40-47, 1986.7.
- [4] Tichy, M., (1994) "First-order third-moment reliability method." *Structural Safety*, Vol. 16, 189-200.
- [5] 趙 衍剛、小野徹郎等、確率モーメントを用いる構造信頼性解析法、その1～3、日本建築学会東海支部研究報告集、Vol. 37, 133-144, 1999.2.
- [6] 趙 衍剛、小野徹郎、構造信頼性解析における3、4次モーメント法の考察、日本建築学会構造系論文報告集、No. 530, 2000.4
- [7] Shinozuka, M., "Structural response variability." *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 113, No. 6, 825-842, 1987.
- [8] Ibrahim, R.A., Structural dynamics with parameter uncertainties, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 40, No. 3, 309-328, 1987.
- [9] 高田毅士、不確定モデルの解析、応用力学シリーズ、非線形・不確定モデリング、1999.2.
- [10] Takada, T., "Weighted integral method in stochastic finite element analysis." *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 5, No. 3, 146-156, 1990.
- [11] Suzuki, M., and Takada, T., "Response of pile embedded in stochastic ground media." *Structural Safety*, Vol. 19, 105-120, 1997.
- [12] Rosenblueth, E., "Point estimates for probability moments." *Proc. of National Academy of Science of USA*, Vol. 72, No.10, 3812-3814, 1975.
- [13] Rosenblueth, E., "Two-point estimate in probabilities." *Appl. Math. Modeling*, Vol. 5, 329-335, 1980.
- [14] Gorman, M.R., "Reliability of structural systems", Ph.D Thesis, Case Western Reserve University, 320-332, 1980.
- [15] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率を用いた鋼圧縮材及び曲げ材の抵抗強度に関する統計論的研究、日本建築学会構造系論文報告集、No.370, 19-27, 1986.12.
- [16] Li, K.S., "Point-estimate method for calculating statistical moments." *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 118, No. 7, 1506-1511, 1992.
- [17] 井戸田秀樹、小野徹郎、早川由則、高次不静定骨組の信頼性解析法に関する研究、構造物の安全性及び信頼性、JCROSSAR'91, 497-502.
- [18] Zhao, Y.G., Ono, T. and Idota, H., (1999), "Response uncertainty and time variant reliability analysis for hysteretic MDF structures." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, No. 10, 1187-1213.
- [19] Zhao, Y.G. and Ono, T., (2000). "New point estimates for probability moments." *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol.126, No.4, 2000.4.
- [20] Abramowitz, M. and Stegun, I.E. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, tenth printing.

(1999年10月10日原稿受理、2000年3月2日採用決定)