組み合わせ荷重を受ける構造物の限界状態設計法

—残存構造要素の耐力の統計量を用いた拡張2次モーメント法—

PROBABILITY-BASED LIMIT STATES DESIGN OF STRUCTURES
UNDER LOAD COMBINATIONS—Advanced first-order and second-moment method with the statistics
of the resistance of survived structural element—

洪 起*

Ki KOH

The analysis of structural reliability under load combinations has been studied for evaluating the probability distribution of the maximum value of the combined loads over a given time period, and up to now analytical methods for the evaluation of the load and resistance factors of structures has been derived.

This paper presents a new analytical method in the evaluation of the safety index and the load and resistance factors of structures with resistance deterioration due to load history or aging under load combinations consisting of dead, live, snow, wind and earthquake loads, applying the advanced first order and second moment method with the statistics of the resistance of structural element which has survived up to time τ , instead of evaluating the exceedance probability of the maximum value of combined loads. The expected value of the load and resistance factors is suggested, and the effect of strength deterioration on it is described with numerical examples.

Keywords: safety index, load combinations, survived structural element, resistance deterioration
信頼性指標値、組み合わせ荷重、残存構造要素、耐力劣化

1. はじめに

組み合わせ荷重を受ける構造物の信頼性指標値を求めるためには、耐用年間に予想される荷重の和の最大値という統計的に面倒な確率量を求める必要が生じるが、工学的判断に基づく数学的工夫がいろいろとなされ、これまで Turkstra¹⁾, Wen²⁾, Larrabee, Cornell^{3),4)}, 河野、坂本^{5),6),7)} 等によって優れた算定手法が開発されてきた。

Turkstra は、2個あるいはそれ以上の荷重の組み合わせにおける荷重の最大値を推定する経験則的な算定手法を提案した。この手法は、組み合わせ荷重中のひとつの荷重のみが最大値をとり、他の荷重は時間軸上の任意の点で評価するもので、2個以上の荷重が同時に最大値をとる可能性を無視しているが、実用上十分な近似であり、また簡便であるという点で多く利用されている。

Wen は、組み合わせ荷重を振動問題における時間連続の確率過程と異なるマクロ的な時間変動をもつ確率過程としてモデル化し、組み合わせ荷重が同時にあるレベルを交差する超過確率を経験的に組み入れた手法により、最大値の確率分布関数を求めた。

Larrabee, Cornell は、確率分布関数を精度よく推定するために荷重が on の状態と off の状態を考慮した厳密に近い意味の超過確率を評価しなければならないとし、再生矩形パルス過程の組み合わせに対する期待超過確率の理論解を求めた。

河野、坂本は、Wen 同様に時間依存する変動荷重をマクロ的時間変動確率過程としてモデル化し、複数の組合せ荷重に対するレベル超過確率の理論解を導き、与えられた信頼性指標値に対する設計点及び荷重・耐力係数について論じた。

筆者は、構造物の耐用期間中に予想される荷重の和の最大値を求める代わりに、年当たりの荷重の確率量を一定にして、耐用期間中に受けた時系列上の荷重履歴による耐力の確率量の変動、すなわちその耐用期間中の荷重によって崩壊した構造物を取り除いた残存構造物の耐力の確率密度関数を逐次求めることによって、このような組み合わせ荷重の最大値が一度作用したときの信頼度関数が確率的に等価な確率量として求めることができることを示し、近似的な荷重・耐力係数の評価手法について述べた⁹⁾。さらに、この残存構造物の耐力の

* 長岡造形大学環境デザイン学科 教授・工博

Prof, Dept of Environmental Design Nagaoka Institute of Design, Dr. Eng

密度関数を用いて信頼度関数を評価するという新しい概念を導入することにより、構造物が崩壊してもすぐに崩壊前と同様な状態に修復され、耐用年間中は常に供用可能な状態にあるという従来用いられていた仮定を前提とすることなく、地震荷重のみを対象とし、その発生頻度と大きさに関する確率統計特性を考慮した荷重モデルを用いて、耐用期間中に予想される地震荷重の最大値に対する信頼度関数を導き、数値的考察を行った¹⁰⁾。また、このような新しい概念を導入することにより、耐力劣化等の耐力に時間的な変化がある場合にも比較的容易に信頼度関数の評価が可能であることを示した。

本稿は、従来の AFOSM 法(advanced first-order and second-moment method)を拡張して、構造要素の初期耐力の統計量の代わりに、ある時刻まで崩壊しなかったという条件下で得られる構造要素の耐力の密度関数を評価することにより、組み合わせ荷重の和の最大値に対する信頼度関数が確率的に等価な確率量として求めることができ、AFOSM 法が本来もっている多重積分を回避した比較的簡便な信頼性評価が可能であることを示したものである。また、耐力の時間的な変化の有無に関わりなく、統一的な設計点の評価を可能にするため、荷重・耐力係数の期待値という統計量を導入することにより、荷重・耐力係数の設定手法の拡張を試みたものである。

2. 荷重の確率モデル

構造物に作用する荷重には様々なものが存在する。構造物の耐用年数中はほとんど変化のない固定荷重、物品や人の重量による一時的に変化する積載荷重、さらに地域によって変化する雪荷重や極めて稀に生起する時間変動の大きい台風や大地震等がある。本稿でのこれらの荷重の確率モデルは次のように取り扱う。固定荷重は竣工時に作用する時間変動を伴わない確率変量とし、積載荷重は常時の積載荷重と時間依存の積載荷重に分ける。常時の積載荷重は、雪、風、地震荷重の時間変動に比べてゆっくりと変動する確率量と見なすことが可能であるとして、固定荷重同様に、時間変動を伴わない確率変数でモデル化する¹⁾。時間依存の積載荷重は P-I 過程(Poisson impulse process)でモデル化する。雪荷重は、単位年間毎に規則的に生起するパルスより構成される IRP 過程(intermittent rectangular process)でモデル化する⁶⁾。風荷重は、一般に気象学的に年周期的に生起する風と台風等の強風等に分けてモデル化されるが、文献 7)等で述べられてい

る理由により、本稿でも、各地点における基準風速の年最大値資料を用いて、年周期事象として規則的に生起する R-P 過程(rectangular pulse process)でモデル化する。地震荷重は、P-I 過程でモデル化する。このように、雪、風、地震等の時間依存の荷重は、生起率と作用時間を有するマクロ的な時間変動(年単位の変動)を伴う確率過程で表されるものとする。さらに、これらの荷重は統計的に独立と仮定する。荷重と耐力の記号と基本統計量をまとめて表-1に示す。表中の W_{LT}, W_S, W_W, W_E の統計量は年当たりの最大値から得られるものとする。生起率と作用時間は年を単位とし、 $\nu_S, \mu_S, \nu_W, \mu_W$ は確定値を表し、 $\bar{\nu}_{LT}, \bar{\nu}_E$ は平均値を表す。

本稿で扱う荷重の組み合わせの種類は下記の6ケースである。

- (1) $W(\tau) = W_D + c_{LA}W_{LA} + c_{LT}W_{LT}(\tau)$
- (2) $W(\tau) = W_D + c_{LA}W_{LA} + c_S W_S(\tau)$
- (3) $W(\tau) = W_D + c_{LA}W_{LA} + c_W W_W(\tau)$
- (4) $W(\tau) = W_D + c_{LA}W_{LA} + c_E W_E(\tau)$
- (5) $W(\tau) = W_D + c_{LA}W_{LA} + c_S W_S(\tau) + c_W W_W(\tau)$
- (6) $W(\tau) = W_D + c_{LA}W_{LA} + c_S W_S(\tau) + c_E W_E(\tau)$

ただし、 $c_Y(Y = LA, LT, S, W, E)$: 荷重とそれによって構造物

に生じる応力とを関連づける係数

Fig.1 はそれぞれの荷重に乗じている係数が1のときの図である。

Fig.1 荷重の確率モデル

表-1 荷重と耐力の基本統計量

	生起率	作用時間	平均値	変動係数	荷重強さの密度関数
W_D	—	—	$\bar{W}_D$	V_D	正規
W_{LA}	—	—	$\bar{W}_{LA}$	V_{LA}	極値Ⅰ型
W_{LT}	$\bar{\nu}_{LT}$	—	$\bar{W}_{LT}$	V_{LT}	対数正規
W_S	ν_S	μ_S	$\bar{W}_S$	V_S	対数正規
W_W	ν_W	μ_W	$\bar{W}_W$	V_W	対数正規
W_E	$\bar{\nu}_E$	—	$\bar{W}_E$	V_E	対数正規
R_0	—	—	$\bar{R}_0$	V_{R_0}	対数正規

W_D : 固定荷重, W_{LA} : 常時の積載荷重, W_{LT} : 時間依存の積載荷重

W_S : 雪荷重, W_W : 風荷重, W_E : 地震荷重, R_0 : 初期耐力

3. 組み合わせ荷重を受ける構造物の信頼度関数

鋼構造荷重・耐力係数設計法試案¹⁴⁾では、終局限界設計と使用限局限界設計に対する設計規範が次のように規定されている。構造物または構造要素が、それぞれの限界状態に対して、定められた時間区間(以下、基準期間と呼ぶ)中に少なくとも一度限界状態に達するであろう確率(限界状態確率)に等しいか、または小さくしなければならない。この設計規範に従うと、表-1に示した固定、積載、雪、風および地震のすべての荷重およびその組み合わせ荷重に対する構造物の基準期間 T 年における限界状態確率 P_f は次のように表される。

$$P_f = 1 - P_S(T) \quad (3-1)$$

$$P_S(T) = P_r[R > \max W(\tau), 0 \leq \tau \leq T]$$

$$\text{ただし, } W(\tau) = W_D + c_{LA}W_{LA} + \sum_X c_X W_X(\tau)$$

$P_S(T)$: 基準期間 T 年での信頼度関数

R : τ 年での構造要素の限界耐力で、時間的変化がない場合は初期耐力 R_0 に等しい。

(3-1)式は、 T 年までに予想される組み合わせ荷重の和の最大値が初めて耐力 R を超過する初通過確率を求める式で、一般的に、このような確率を求めるためには、 T 年間に予想される組み合わせ荷重の和の最大値の確率分布関数が必要になる。

しかしながら、このような組み合わせ荷重の和の最大値の確率分布関数を求める代わりに、時系列上の組み合わせ荷重履歴に対して τ 年まで崩壊しなかったという条件下での構造要素の耐力の密度関数（以下、残存構造要素の耐力の密度関数とする）から得られる条件付危険率の期待値を設定することができれば、(3-1)式の信頼度関数は $\Delta\tau$ ($\Delta\tau = T/n$) 年区間毎の安全の確率を評価することから得られ、次のようになる¹⁰⁾。

$$P_S(T) = P_S(0) \prod_{i=1}^n [1 - \bar{\lambda}(\Delta\tau)\Delta\tau] \approx P_S(0) \exp\left\{-\int_0^T \bar{\lambda}(\tau) d\tau\right\} \quad (3-2)$$

ただし、 $\bar{\lambda}(\tau) = E[\lambda(\tau|R=r(w(\tau)))]$: τ 年での組み合わせ荷重

の和がレベル r を超過する確率から得られる条件付危険率 $\lambda(\tau|R=r(w(\tau)))$ の期待値

$P_S(0)$: $\tau=0$ での信頼度関数

上式中の条件付危険率の期待値は、残存構造要素のみを対象にした耐力の密度関数を用いると、次式で表される。

$$\bar{\lambda}(\tau) = \int_0^\infty \lambda(\tau|R=r(w(\tau))) p_{R_0}(r|\tau) dr \quad (3-3)$$

ただし、 $p_{R_0}(r|\tau)$: τ 年での残存構造要素の耐力の密度関数

(3-2)式は条件付危険率の期待値の積の項を微小項として無視したときの(3-1)式の精解を表す。基準期間 T 年での信頼性指標値は次式になる。

$$\beta_T = \Phi^{-1}[P_S(T)] \quad (3-4)$$

ただし、 $\Phi[-]$: 標準正規分布

β_T : 基準期間 T 年での信頼性指標値

以上のように、 T 年間に予想される組み合わせ荷重の和の最大値の確率量を求める代わりに、 T 年までの時系列上の組み合わせ荷重履歴によって崩壊した構造要素を取り除いた残存構造要素のみの耐力の密度関数から得られる条件付危険率の期待値を評価することができれば、組み合わせ荷重の和の最大値に対する信頼度関数が、(3-2)式により確率論的に等価な確率量として求めることができる¹⁰⁾。

4. 残存構造要素の耐力の確率密度関数

ここでは、耐力劣化を無視し、非破壊効果のみを考慮した場合の残存構造要素の耐力の密度関数について述べる¹⁰⁾。

固定荷重は $\tau=0$ のときに作用し、その値は不変である。常時の積載荷重は前述の仮定に従い、ゆっくりと変動する確率量と見なして、固定荷重同様に $\tau=0$ のときに作用し、その値が基準期間継続するも

のと仮定すると、荷重の種類は、 $\tau=0$ のときに作用する固定荷重と常時の積載荷重および $\tau>0$ のときに作用する時間依存の積載、雪、風、さらに地震荷重の2つに分類される。

まず、 $\tau=0$ の場合を考える。作用する荷重は固定荷重と常時の積載荷重である。この場合の条件付危険率を次式で表すことにする。

$$\lambda(0|R=r(w(0))) = \lambda_0(r) \quad (4-1)$$

ただし、 $\lambda_0(r)$: 固定荷重と常時の積載荷重の和に和によって生

じる応力がレベル r を超過する条件付危険率

$\tau=0$ のときに作用した固定荷重と常時の積載荷重によって崩壊した構造要素を取り除いた残存構造要素の耐力の密度関数は、初期耐力の密度関数 $P_{R_0}(r)$ から両荷重による耐力の崩壊領域 $\lambda_0(r)p_{R_0}(r)$ を差し引き、これを積分して1になるように正規化すればよい。

$$p_{R_0}(r|0) = \frac{P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)]}{\int_0^\infty P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)] dr} \quad (4-2)$$

次に、 $\Delta\tau$ 年後の残存構造要素の耐力の密度関数を考えよう。作用する荷重は $\tau=0$ のときの固定荷重と積載荷重および $\tau>0$ で作用する時間依存の荷重の和になる。時間依存の荷重を加えた組み合わせ荷重によって構造要素が崩壊するかどうかは、時間依存の荷重と既に作用している固定、常時の積載両荷重の和に対する条件付危険率を考ればよい。この条件付危険率は τ に依存しない値であるが、 $\tau>0$ での条件付危険率として次式で表すことにする。

$$\lambda(\Delta\tau|R=r(w(\Delta\tau))) = \lambda_\tau(r) \quad (4-3)$$

ただし、 $\lambda_\tau(r)$: $\tau>0$ で作用する組み合わせ荷重の和によって

生じる応力がレベル r を超過する条件付危険率

固定荷重と常時の積載荷重による耐力の崩壊領域を取り除いた残存構造要素の耐力の密度関数(4-2)式を初期耐力の密度関数とし、 $\tau>0$ での条件付危険率として(4-3)式を用いると、 $\Delta\tau$ 年後の残存構造要素の耐力の密度関数は次式になる。

$$\begin{aligned} p_{R_0}(r|\Delta\tau) &= \frac{P_{R_0}(r|0)[1 - \lambda_\tau(r)\Delta\tau]}{\int_0^\infty P_{R_0}(r|0)[1 - \lambda_\tau(r)\Delta\tau] dr} \\ &= \frac{P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)][1 - \lambda_\tau(r)\Delta\tau]}{\int_0^\infty P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)][1 - \lambda_\tau(r)\Delta\tau] dr} \end{aligned} \quad (4-4)$$

$\lambda_\tau(r)$ は時間に依存しないから、以下同様にして、逐次耐力の密度関数を求めていくと、 $n\Delta\tau$ 年後の密度関数は次式になる。

$$p_{R_0}(r|n\Delta\tau) = \frac{P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)][1 - \lambda_\tau(r)\Delta\tau]^n}{\int_0^\infty P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)][1 - \lambda_\tau(r)\Delta\tau]^n dr} \quad (4-5)$$

さらに、 $n\Delta\tau = \tau$ として、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、 τ 年後の残存構造要素の耐力の密度関数は次式になる。

$$p_{R_0}(r|\tau) = \frac{P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)] \exp\{-\lambda_\tau(r)\tau\}}{\int_0^\infty P_{R_0}(r)[1 - \lambda_0(r)] \exp\{-\lambda_\tau(r)\tau\} dr} \quad (4-6)$$

上式は時系列上の組み合わせ荷重履歴に対して τ 年まで崩壊しなかったという条件下での構造要素の耐力の密度関数である。(4-6)式で $\tau=0$ とすれば、固定荷重と常時の積載荷重が作用した後の残存構造要素の耐力の密度関数(4-2)式に等しくなる。

結局、(4-6)式を(3-3)式に代入すれば、条件付危険率の期待値が得られ、さらに、(3-2)式から信頼度関数が算出される。

5. 条件付危険率

前項で述べた条件付危険率は、組み合わせ荷重の和の単位年当たりのレベル超過確率から得られるから、組み合わせ荷重の同時作用を条件にする場合と条件にしない場合とに分ける必要がある。文献 1)は荷重が常に作用する状態、すなわち確率 1 の同時作用を条件にし、また、文献 6)はある確率で生起する荷重の同時作用を条件にして信頼性指標値を評価している。この項は、文献 6)と同様に、荷重の同時作用を条件にしたときの条件付危険率について述べる。尚、同時作用を条件にしない場合については 10. で記述する。

(1) の場合：固定荷重、常時の積載荷重および時間依存の積載荷重の和からなり、荷重過程は Fig.1 の(a)+(d)になる。固定荷重と常時の積載荷重は、 $\tau=0$ で同時に作用し、そのまま基準期間継続するから、条件付危険率 $\lambda_0(r)$ は、この両荷重の和がレベル r を超過する確率から得られ、次式になる。

$$\lambda_0(r) = \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_{LA}} \left(\frac{r-w}{c_{LA}} \right) p_{W_D}(w) dw \quad (5-1)$$

ただし、 $\bar{F}_{W_{LA}}(w)$: W_{LA} の補確率分布関数
 $p_{W_D}(w)$: W_D の密度関数

$\tau > 0$ での条件付危険率は、時間依存の積載荷重は年平均生起率 $\bar{\nu}_{LT}$ のポアソン過程に従うから、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_\tau(r) &= 1 - \int_{-\infty}^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\nu}_{LT}^k}{k!} \exp(-\bar{\nu}_{LT}) F_{W_{LT}}^k \left(\frac{r-w}{c_{LT}} \right) p_{W_{DLA}}(w) dw \\ &\approx \bar{\nu}_{LT} \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_{LT}} \left(\frac{r-w}{c_{LT}} \right) p_{W_{DLA}}(w) dw \end{aligned} \quad (5-2)$$

ただし、 $\bar{F}_{W_{LT}}(w)$: W_{LT} の補確率分布関数
 $p_{W_{DLA}}(w)$: W_D と $c_{LA}W_{LA}$ の和の密度関数

(2) の場合：雪荷重は、一定年間隔（本稿では単位年）毎に規則的に生起するパルスにより構成され、パルスの生起率 ν_S と作用継続時間 μ_S の IRP 過程でモデル化され、荷重過程は Fig.1 の(a)+(b)になる。固定荷重、常時の積載荷重および雪荷重の同時作用状態を超過確率の評価対象とすれば、単位年当たりの生起率 ν_S が 1 であるから、条件付危険率は次式になる。

$$\lambda_\tau(r) = \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_S} \left(\frac{r-w}{c_S} \right) p_{W_{DLA}}(w) dw \quad (5-3)$$

ただし、 $\bar{F}_{W_S}(r)$: W_S の補確率分布関数

(3) の場合：雪荷重同様に、一定年間隔毎に規則的に生起する矩形パルスでモデル化され、荷重過程は Fig.1 の(a)+(c)となり、生起率が 1 のときの条件付危険率は次式になる。

$$\lambda_\tau(r) = \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_W} \left(\frac{r-w}{c_W} \right) p_{W_{DLA}}(w) dw \quad (5-4)$$

ただし、 $\bar{F}_{W_W}(r)$: W_W の補確率分布関数

(4) の場合：構造工学的に意味のある強さ以上の地震荷重をインパルスでモデル化した P-I 過程でモデル化すれば、荷重過程は Fig.2 の(a)+(d)になる。条件付危険率は、(5-2)式と同様にして次式になる。

$$\lambda_\tau(r) \approx \bar{\nu}_E \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_E} \left(\frac{r-w}{c_E} \right) p_{W_{DLA}}(w) dw \quad (5-5)$$

ただし、 $\bar{F}_{W_E}(r)$: W_E の補確率分布関数

(5) の場合：雪荷重と風荷重はそれぞれ IRP 過程と R-P 過程でモデル化すれば、荷重過程は Fig.1)の(a)+(b)+(c)になる。それぞれの荷重の生起率は 1 であるから、荷重の同時作用状態での条件付危険率は次式で評価される。

$$\lambda_\tau(r) = \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_W} \left(\frac{r-w}{c_W} \right) p_{W_{DLAS}}(w) dw \quad (5-6)$$

$$\begin{aligned} p_{W_{DLAS}}(w) &= \frac{1}{c_S} \int_{-\infty}^w p_{W_S} \left(\frac{w-x}{c_S} \right) p_{W_{DLA}}(x) dx \\ p_{W_S}(w) &: W_S \text{ の密度関数} \end{aligned}$$

(6) の場合：IRP 過程と P-I 過程の組合わせの場合に相当し、荷重過程は Fig.1 の(a)+(b)+(d)になる。条件付危険率は、雪荷重が作用している作用時間 μ_S 区間に地震荷重が生起し、作用する全荷重の和がレベル r を超過する確率から得られ、近似的に次式で表される。

$$\begin{aligned} \lambda_\tau(r) &= 1 - \int_{-\infty}^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}_E \mu_S)^k}{k!} \exp(-\bar{\nu}_E \mu_S) F_{W_E}^k \left(\frac{r-w}{c_E} \right) p_{W_{DLAS}}(w) dw \\ &\approx \mu_S \bar{\nu}_E \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_E} \left(\frac{r-w}{c_E} \right) p_{W_{DLAS}}(w) dw \end{aligned} \quad (5-7)$$

以上述べたように、条件付危険率が得られれば、(4-6)式と(3-3)式から残存構造要素の耐力の密度関数と条件付危険率の期待値が求められ、さらに、この期待値を(3-2)式に代入すれば、基準期間中の信頼度関数が得られる。この信頼度関数は、組み合わせ荷重の同時作用を条件にした時系列上の荷重履歴に対して、(3-2)式の展開式から生じる条件付危険率の期待値の積の項を微小項として無視した場合の精解を表し、さらに、同じ組み合わせ荷重の同時作用状態のもとで基準期間中に予想される組み合わせ荷重の和の最大値が構造物に一度作用したときの信頼度関数に等しくなるのは、無論である¹⁰⁾。

6. 耐力劣化がある場合への拡張

前項まで、時系列上の荷重履歴に関わりなく、耐力の時間的变化は生じないという仮定のもとで、組み合わせ荷重を受ける構造要素の信頼性指標値の評価方法について述べた。

構造要素は、基準期間中に受ける荷重履歴および経年劣化等によって、何らかの損傷を被り、耐力劣化が生じるものと思われるので、このような場合にも適用できるように拡張しておくことと便利である。

耐力劣化の度合いを表す耐力劣化係数 $\tilde{\varphi}(\tau)$ は次式で表す¹⁰⁾。

$$\tilde{\varphi}(\tau) = c_0 \varphi(\tau) = c_0 \exp(-\psi_T \tau - \psi_I \tau) \quad (6-1)$$

ただし、 $\psi_T = \frac{c}{T}$ (c : 定数, T : 基準期間) : 経年による単位年

間当たりの耐力劣化率

ψ_I : 荷重履歴による単位年間当たりの耐力劣化率

c_0 : 固定荷重と常時の積載荷重による耐力劣化係数

耐力劣化係数が(6-1)式で表されるとき、残存構造要素の耐力の密度関数 $p_R(r|\tau)$ は次式になる¹⁰⁾。

$$p_R(r|\tau) = \frac{p_{R_0}\left(\frac{r}{c_0\varphi(\tau)}\right)\left[1 - \lambda_0\left(\frac{r}{c_0\varphi(\tau)}\right)\right]}{\int_0^\infty p_{R_0}\left(\frac{r}{c_0\varphi(\tau)}\right)\left[1 - \lambda_0\left(\frac{r}{c_0\varphi(\tau)}\right)\right]} \cdot \frac{\exp\left\{-\int_0^\tau \lambda_r\left(\frac{r}{\varphi(\tau-u)}\right)du\right\}}{\exp\left\{-\int_0^\tau \lambda_r\left(\frac{r}{\varphi(\tau-u)}\right)du\right\}} dr \quad (6-2)$$

結局、耐力劣化を考慮したときの信頼度関数は、(4-6)式の代わりに(6-2)式を用いて算定すればよいが、条件付危険率およびその期待値の算出には多重積分計算が必要になる。次項以降では、残存構造要素の耐力の統計量を用いた AFOSM 法の適用およびその応用により、多重積分を回避した近似的な評価が可能であることを示す。

7. 残存構造要素の耐力の統計量を用いた AFOSM 法

設計で考慮する限界状態は、考慮する組み合わせ荷重に対してそれぞれ定義されている。それぞれの限界状態毎の信頼性指標値が(3-4)式から得られるから、設計案の限界状態に対する信頼性評価を行い、算定された信頼性指標値が目標信頼性以上であることを確認することにより信頼性設計が可能になる。

一方、目標信頼性指標値に応じて予め荷重係数と耐力係数を算定しておき、設計案が設計目標の要求を満足しているかどうか、すなわち設計耐力が設計荷重を上回るかを照査する荷重・耐力係数に基づく設計方法がある。一般に、荷重・耐力係数の評価には、正規変数空間における AFOSM 法が利用されている。

この項では、(4-6)式と(3-3)式から直接、条件付危険率の期待値を求めることなく、残存構造要素の耐力の統計量を用いた AFOSM 法の適用により、信頼度関数と条件付危険率の期待値の算定が近似的に可能であることを述べる。さらに次項では、AFOSM 法の応用によって、多重積分を回避した条件付危険率の数値的評価が可能になることを示す。

AFOSM 法は、基本変数を等価正規変数または標準正規変数で変換された確率空間で適用され、基本変数の確率分布と確率密度関数とともに既知であることが前提になっている。

残存構造要素の耐力の密度関数と分布関数は、時々刻々と変化する確率量であるが、密度関数は(4-6)式で表され、またその分布関数は(4-6)式の積分から得られるから、残存構造要素の耐力の統計量は時刻 τ の関数として得られ、既知量になる。またその他の荷重の統計量も既知であるから、基本変数を等価正規変数で近似することによって、AFOSM 法を適用することが可能になる。以下、順を追って説明する。

固定荷重と常時の積載荷重による信頼度関数 $P_S(0)$ は、AFOSM 法により容易に得られる。

(1) の場合：(5-1)式と(5-2)式を(4-6)式に代入し、さらに(3-3)式に代入することで得られる条件付危険率の期待値は、対象とする組み合

わせ荷重が同時に生起する条件のもとで、 τ 年での残存構造要素の耐力が引き続き単位年間に初めて限界状態面上に到達する単位年間当たりの確率を表す。

一方、AFOSM 法における基本変数の原点から限界状態面上までの最短距離を求める式は、初期耐力の統計量の代わりに τ 年での残存構造要素の耐力の統計量を用いるならば、引き続き単位年間の耐力の統計量は不変であるという仮定のもとで、 τ 年での耐力と組み合わせ荷重からなる限界状態面 $r - w_D - c_{LA}w_{LA} - c_{LT}w_{LT} = 0$ への原点からの最短距離 $\beta_{DLALT}(\tau)$ を求める式になり、次のように表される。

$$\beta_{DLALT}(\tau) = \frac{\bar{R}^N(\tau) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_{LT}\bar{W}_{LT}^N}{\sqrt{\sigma_{R^N}^2(\tau) + \sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_{LT}^2\sigma_{W_{LT}^N}^2}} \quad (7-1)$$

ただし、 $\bar{W}_X^N, \sigma_{X^N}^2$: 基本変数 W_X の等価正規変数変換

による期待値と分散

上式中の τ 年での残存構造要素の耐力の統計量は、(4-6)式で表される耐力の密度関数とその分布関数を用いた等価正規変数変換から評価される。また、この $\beta_{DLALT}(\tau)$ から得られる超過確率は、荷重の統計量は単位年当たりとし、耐力の統計量は生き残った残存構造要素のみを対象にして評価されるから、 τ 年での残存構造要素の耐力が引き続き単位年間に初めて上記の限界状態面上に到達する確率を表すことになる。時間依存の積載荷重の生起率は $\bar{v}_{LT}$ であるから、(7-1)式の AFOSM 法により得られる条件付危険率の期待値は次式になる。

$$\lambda^*(\tau) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{v}_{LT}^k}{k!} \exp(-\bar{v}_{LT}) \Phi^k[\beta_{DLALT}(\tau)] \approx \bar{v}_{LT} \Phi[-\beta_{DLALT}(\tau)] \quad (7-2)$$

ただし、 $\lambda^*(\tau)$: AFOSM 法による(3-3)式の近似値

(2) の場合：(1)と同様にして、 τ 年での原点から限界状態面 $r - w_D - c_{LA}w_{LA} - c_Ww_W = 0$ への最短距離 $\beta_{DLAS}(\tau)$ は次式になる。

$$\beta_{DLAS}(\tau) = \frac{\bar{R}^N(\tau) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_S\bar{W}_S^N}{\sqrt{\sigma_{R^N}^2(\tau) + \sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_S^2\sigma_{W_S^N}^2}} \quad (7-3)$$

また、雪荷重の生起率が1であるから、AFOSM 法による(3-3)式の近似値は次式で表される。

$$\lambda^*(\tau) = \Phi[-\beta_{DLAS}(\tau)] \quad (7-4)$$

(3) の場合：(2)と同様にして、 τ 年での原点から限界状態面 $r - w_D - c_{LA}w_{LA} - c_Ww_W = 0$ への最短距離 $\beta_{DLAW}(\tau)$ は次式になる。

$$\beta_{DLAW}(\tau) = \frac{\bar{R}^N(\tau) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_W\bar{W}_W^N}{\sqrt{\sigma_{R^N}^2(\tau) + \sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_W^2\sigma_{W_W^N}^2}} \quad (7-5)$$

(5-4)式は、風荷重の生起率が1であるから、次式になる。

$$\lambda^*(\tau) = \Phi[-\beta_{DLAW}(\tau)] \quad (7-6)$$

(4) の場合： $\beta_{DLAE}(\tau)$ と $\lambda^*(\tau)$ は次式で表される。

$$\beta_{DLAE}(\tau) = \frac{\bar{R}^N(\tau) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_E\bar{W}_E^N}{\sqrt{\sigma_{R^N}^2(\tau) + \sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_E^2\sigma_{W_E^N}^2}} \quad (7-7)$$

$$\lambda^*(\tau) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{v}_E^k}{k!} \exp(-\bar{v}_E) \Phi^k[\beta_{DLAE}(\tau)] \approx \bar{v}_E \Phi[-\beta_{DLAE}(\tau)] \quad (7-8)$$

(5) の場合: $\beta_{DLAWS}(r)$ と $\lambda^*(r)$ は次式になる。

$$\beta_{DLAWS}(r) = \frac{\bar{R}^N(r) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_S\bar{W}_S^N - c_W\bar{W}_W^N}{\sqrt{\sigma_{R^N}^2(r) + \sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_S^2\sigma_{W_S^N}^2 + c_W^2\sigma_{W_W^N}^2}} \quad (7-9)$$

$$\lambda^*(r) = \Phi[-\beta_{DLAWS}(r)] \quad (7-10)$$

(6) の場合: 雪荷重が作用している区間 μ_S のみを対象とすれば、 $\beta_{DLASE}(r)$ と $\lambda^*(r)$ は次式で表される。

$$\beta_{DLASE}(r) = \frac{\bar{R}^N(r) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_S\bar{W}_S^N - c_E\bar{W}_E^N}{\sqrt{\sigma_{R^N}^2(r) + \sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_S^2\sigma_{W_S^N}^2 + c_E^2\sigma_{W_E^N}^2}} \quad (7-11)$$

$$\lambda^*(r) \approx \mu_S \bar{v}_E \Phi[-\beta_{DLASE}(r)] \quad (7-12)$$

実際の数値計算においては、時刻毎に収束計算が必要になるが、前ステップの収束値を初期値として次のステップに進めば、収束は大変早く、収束回数は1, 2回である。

8. AFOSM 法による条件付危険率の数値的評価

4. で述べた残存構造要素の耐力の密度関数を数値的に求めるためには、この関数に含まれる条件付危険率 $\lambda_0(r)$, $\lambda_r(r)$ を算出しなければならない。この条件付危険率は、(5-1)式から(5-7)式に記述されているように、多重積分計算を含む。この多重積分を離散型フーリエ変換または荷重の和の密度関数をエルミート多項式展開で近似する方法も考えられるが^{11), 12)}、一般的には、このような数値計算を精度良く実行することは大変難しい。しかしながら、条件付危険率は対象とする組合せ荷重の和がレベル r を超過する確率から評価されるから、従来型の AFOSM 法において、耐力の期待値の代わりに一定値 r を用い、その分散を0とする特別な状態面への最短距離を想定することにより、多重積分を回避した条件付危険率の数値的評価が可能になる。

以下、それぞれの荷重の組み合わせに対して、順を追って説明する。

(1) の場合: まず、(5-1)式の $\lambda_0(r)$ を求めることにする。 $\lambda_0(r)$ は固定荷重と常時の積載荷重の和がレベル r を超過する単位年当たりの確率であるから、 r を一定値とした事象 $r - w_D - c_{LA}w_{LA} \leq 0$ が生じる確率から評価される。まず、状態面 $r - w_D - c_{LA}w_{LA} = 0$ への最短距離 $\alpha_{DLA}(r)$ を次式により求める。

$$\alpha_{DLA}(r) = \frac{r(\tau) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N}{\sqrt{\sigma_{W_D}^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2}} \quad (8-1)$$

$$\text{ただし、} r(\tau) = \frac{r}{c_0\phi(\tau)}$$

この $\alpha_{DLA}(r)$ は r を一定値とした収束計算により得られる。次に、条件付危険率はこの状態面に到達する確率と荷重の生起率の積から得られるから、次式により求められる。尚、この場合の荷重の生起率は1である。

$$\lambda_0(r) = \Phi[-\alpha_{DLA}(r)] \quad (8-2)$$

$\lambda_r(r)$ は上述の手法と全く同様にして得られる。耐力が一定値 r を有する状態面 $r - w_D - c_{LA}w_{LA} - c_{LT}w_{LT} = 0$ への原点からの最短距離 $\alpha_{DLALT}(r)$ を収束計算により求める。

$$\alpha_{DLALT}(r) = \frac{r(\tau, u) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_{LT}\bar{W}_{LT}^N}{\sqrt{\sigma_{W_D}^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_{LT}^2\sigma_{W_{LT}^N}^2}} \quad (8-3)$$

$$\text{ただし、} r(\tau, u) = \frac{r}{\phi(\tau - u)}$$

(8-2)式と同様に、 $\alpha_{DLALT}(r)$ を用いると、 $\lambda_r(r)$ は次式になる。

$$\lambda_r(r) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_{LT}^k}{k!} \exp(-v_{LT}) \Phi^k[-\alpha_{DLALT}(r)] \\ \approx \bar{v}_{LT} \Phi[-\alpha_{DLALT}(r)] \quad (8-4)$$

(2) の場合: (1) と同様にして、雪荷重の生起率は1であるから次のようになる。

$$\alpha_{DLAS}(r) = \frac{r(\tau, u) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_S\bar{W}_S^N}{\sqrt{\sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_S^2\sigma_{W_S^N}^2}} \\ \lambda_r(r) = \Phi[-\alpha_{DLAS}(r)] \quad (8-5)$$

(3) の場合:

$$\alpha_{DLAW}(r) = \frac{r(\tau, u) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_W\bar{W}_W^N}{\sqrt{\sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_W^2\sigma_{W_W^N}^2}} \\ \lambda_r(r) = \Phi[-\alpha_{DLAW}(r)] \quad (8-6)$$

(4) の場合:

$$\alpha_{DLAE}(r) = \frac{r(\tau, u) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_E\bar{W}_E^N}{\sqrt{\sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_E^2\sigma_{W_E^N}^2}} \\ \lambda_r(r) \approx \bar{v}_E \Phi[-\alpha_{DLAE}(r)] \quad (8-7)$$

(5) の場合:

$$\alpha_{DLAWS}(r) = \frac{r(\tau, u) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_S\bar{W}_S^N - c_W\bar{W}_W^N}{\sqrt{\sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_S^2\sigma_{W_S^N}^2 + c_W^2\sigma_{W_W^N}^2}} \\ \lambda_r(r) = \Phi[-\alpha_{DLAWS}(r)] \quad (8-8)$$

(6) の場合:

$$\alpha_{DLASE}(r) = \frac{r(\tau, u) - \bar{W}_D - c_{LA}\bar{W}_{LA}^N - c_S\bar{W}_S^N - c_E\bar{W}_E^N}{\sqrt{\sigma_D^2 + c_{LA}^2\sigma_{W_{LA}^N}^2 + c_S^2\sigma_{W_S^N}^2 + c_E^2\sigma_{W_E^N}^2}} \\ \lambda_r(r) \approx \mu_S \bar{v}_E \Phi[-\alpha_{DLASE}(r)] \quad (8-9)$$

以上のように、従来型の AFOSM 法において、分散が0で一定値 r を有する耐力を用いたある特別な状態面への到達を想定することにより、多重積分を回避した AFOSM 法による条件付危険率の数値的評価が可能になる。実際の数値計算においては、レベル r を指定する毎に収束計算が必要になるが、前項同様に、前ステップの収束値を初期値として次のステップに進めば収束は大変早い。多重積分を数値的に評価した場合との比較は1.1. で述べる。

9. 残存構造要素の耐力の統計量を用いた AFOSM 法

による荷重・耐力係数

この項で述べる荷重・耐力係数は、組み合わせ荷重の同時作用を条件にした場合である。まず始めに、耐力劣化等の耐力の時間的変化がない場合を述べる。 $\tau = 0$ のときに作用する固定荷重と常時の積載荷重による荷重・耐力係数は、従来の方と全く同じで、次式になる。

$$\phi_0 = \frac{r_0}{R_n}, \gamma_Z = \frac{w_Z^0}{W_{Z_n}} \cdot Z = D, LA \quad (9-1)$$

ただし、 r_0, w_D^0, w_{LA}^0 : 耐力、固定荷重、常時の積載荷重の設計点

R_n, W_{D_n}, W_{LA_n} : 耐力、固定荷重、常時の積載荷重の公称値

前々項の残存構造要素の耐力の統計量を用いた AFOSM 法の適用により、耐力と荷重の設計点 $r^0, w_X^0 (X = D, LA, LT, S, W, E)$ が限界状態面上に到達する時刻 τ の連続関数として求められているから、 τ 年の荷重・耐力係数は次のように表すことができる。

$$\phi(\tau) = \frac{r^0(\tau)}{R_n}, \gamma_X(\tau) = \frac{w_X^0(\tau)}{W_{X_n}} : X = D, LA, LT, S, W, E \quad (9-2)$$

上式中の分母は基本変数のそれぞれの公称値を表す。

ここで、基準期間中に予想される組み合わせ荷重の和の最大値を一度受けたときに限界状態領域に到達する構造要素の耐力を集合 Ω_T とし、本稿で示したように、時間区間 $(\tau, \tau + \Delta\tau]$ に時系列上の組み合わせ荷重履歴を受けて限界状態領域に到達する構造要素の耐力を集合 $\Delta\Omega_\tau$ としよう。この一度の最大荷重を受ける場合と荷重履歴を受ける場合のいずれも基準期間での信頼性指標値は等しい¹⁰⁾。さらに、 $\bar{\lambda}(\tau) \ll 1$ として、この条件付危険率の期待値の積を微小項として無視すれば、集合の直和 $\Omega_T = \bigcup \Delta\Omega_\tau$ が成立する。なぜならば、 $\Delta\Omega_\tau$ は Ω_T の部分集合であり、 τ 年での残存構造要素の耐力のみを対象としているため、異なる2つの時刻 τ と t に対して $\Delta\Omega_\tau \cap \Delta\Omega_t = \emptyset$ (空事象) となり、 $\Delta\Omega_\tau, \Delta\Omega_t$ は互いに素になるからである。この項では、耐力劣化がない場合を対象としているので、耐力は非破壊効果により時刻の経過とともに徐々に上昇し、耐力の設計点も徐々に上昇して、 $r^0(0) < r^0(\Delta\tau) < \dots < r^0(T)$ となる。それ故、集合 $\bigcup \Delta\Omega_\tau$ に属するすべての耐力を一度の最大荷重で限界状態領域に到達させるための設計点は、 T 年での値で $r^0(T)$ になる。荷重の設計点も AFOSM 法により唯一定まり、 $\gamma_X^0(T)$ になる。結局、耐力劣化がない場合の荷重・耐力係数は次式になる。

$$\phi(T) = \frac{r^0(T)}{R_n}, \gamma_X(T) = \frac{w_X^0(T)}{W_{X_n}} : X = D, LA, LT, S, W, E \quad (9-3)$$

上式は、条件付危険率の期待値の積の項を無視するという条件のもとで、組み合わせ荷重の和の最大値が一度作用したときに設定される従来の荷重・耐力係数に等しい。

耐力劣化等の耐力に時間的な変化がある場合は、耐力の統計量が時間の関数となる。そのため、従来の最大荷重に対する評価手法では、最大荷重が T 年中のどの時刻に作用するかによって荷重・耐力係数は異なるので一意的に定められない。同様に、本稿で述べた荷重履歴による評価方法も、設計点は耐力劣化係数の関数に依存し、唯一の値として設定できない。しかしながら、次項で述べる荷重・耐力係数の期待値という概念は、耐力の時間的な変化の有無に関わりなく、統一的に設定できるという利点がある。

10. 荷重・耐力係数の期待値

従来の荷重・耐力係数は、初期耐力と組み合わせ荷重の和の最大値が原点から最短距離にある限界状態面に到達したときに設定される値であり、確定値である。本稿で論じた時系列上の荷重履歴を対象にした場合の荷重・耐力係数(9-2)式は、残存構造要素の耐力と組み合わせの荷重の和が限界状態面上に到達する時刻 τ の関数で表される。一般に、この τ は確率変数である。

この項では、組み合わせ荷重の同時作用を条件にする場合と条件に

しない場合とに分けて、限界状態面上への到達を確率事象と見なした場合の荷重・耐力係数の期待値について述べる。

(a) 組み合わせ荷重の同時作用を条件にするとき

基準期間中に少なくとも一度限界状態面上に到達する場合を設計対象とし、 τ の密度関数として τ が基準期間 T 年以下であるという条件のもとで少なくとも一度限界状態面上に到達する時間の密度関数 $p(\tau|\tau \leq T)$ を用いれば、(9-2)式の τ 年での荷重・耐力係数が生じる確率は $p(\tau|\tau \leq T)d\tau$ である。対象とする組み合わせ荷重の同時作用を条件にして、限界状態面上への到達を確率事象と見なしたときの荷重・耐力係数は(9-2)式の期待値 $E[\phi], E[\gamma_X]$ で表すことができる。

$$E[\phi] = \int_0^T \phi(\tau) p(\tau|\tau \leq T) d\tau = \phi_0 q_0 + \int_0^T \phi(\tau) h(\tau) d\tau \quad (10-1)$$

$$E[\gamma_X] = \int_0^T \gamma_X(\tau) p(\tau|\tau \leq T) d\tau = \gamma_{X0} q_0 + \int_0^T \gamma_X(\tau) h(\tau) d\tau \quad (10-2)$$

ただし、 $p(\tau|\tau \leq T) = q_0 \delta(\tau) + q(\tau)$, $\delta(\tau)$: デルタ関数

$$q_0 = \frac{1 - P_S(0)}{1 - P_S(T)}, q(\tau) = \frac{P_S(0) \lambda^*(\tau) \exp\left[-\int_0^\tau \lambda^*(t) dt\right]}{1 - P_S(T)}$$

上式中の $\lambda^*(t)$ は、(1)～(6)までの荷重の組み合わせの種類に応じて、(7-2)式、(7-4)式、(7-6)式、(7-8)式、(7-10)式および(7-12)式を用いて算出すればよい。以上のように、時刻 τ に関する期待値演算により、耐力に時間的な変化がある場合への適用が可能になる。

上式において、 τ の密度関数として時刻 T 年で確率1で限界状態面上に到達する密度関数を想定するならば、耐力に時間的な変化がない場合の(10-1)式と(10-2)式は(9-3)式に等しくなる。それ故、従来の荷重・耐力係数は、時系列上では予想される組合せ荷重の和の最大値が時刻 T 年で一度作用し、確率1で限界状態面に到達することを想定して決められた値と見なすことができる。本来、構造物は時系列上の荷重履歴を受けるものであり、構造要素の耐力の限界状態面への到達は確率事象と見なされるから、耐力の時間的な変化の有無に関わりなく、荷重・耐力係数の期待値による設計点の評価の方が自然であるように思われる。

同様に、耐力・荷重係数の変動係数も算定されるが、基準期間が50年程度であれば、この期間中の信頼度関数の変化は極僅かであり、変動係数も十分小さくなるので、設計上は問題にならないだろう。変動係数については、11.の数値計算例で簡単に触れることにする。

(b) 組み合わせ荷重の同時作用を条件にしないとき

(1)～(4)の場合は、荷重の組み合わせの種類が一つであるから、荷重の同時作用条件に関わりなく、(a)と同様に、荷重・耐力係数の期待値は(10-1)式と(10-2)式で表される。

(5)の場合は、雪荷重が作用している区間 μ_S と作用していない区間 $1 - \mu_S$ では荷重の組み合わせの種類が異なるので、条件付危険率も異なる。この両区間を対象にした条件付危険率は次式になる。

$$\lambda_t(r) = 1 - [1 - \lambda_{DLWS}(r)] [1 - \lambda_{DLAW}(r)] \approx \lambda_{DLWS}(r) + \lambda_{DLAW}(r) \quad (10-3)$$

$$\text{ただし、} \lambda_{DLWS}(r) = \mu_S \int_{-\infty}^r \bar{F}_{WS}\left(\frac{r-w}{c_S}\right) p_{W_{DLAW}}(w) dw$$

$$\lambda_{DLAW}(r) = (1 - \mu_S) \int_{-\infty}^r \bar{F}_{W_W} \left(\frac{r-w}{c_W} \right) p_{W_{DLA}}(w) dw$$

雪荷重の有無により、境界状態面が異なるので、それぞれの場合に応じて荷重・耐力係数が設定される。この場合、上記の2つの組み合わせ荷重が考えられるから、 τ 年での荷重・耐力係数は次式になる。

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\tau) &= \frac{r^0(\tau)}{R_n}, \hat{\gamma}_X(\tau) = \frac{w_X^0(\tau)}{W_{X_n}} : X = D, LA, W, S \\ \tilde{\phi}(\tau) &= \frac{r^0(\tau)}{R_n}, \tilde{\gamma}_Y(\tau) = \frac{w_Y^0(\tau)}{W_{Y_n}} : Y = D, LA, W \end{aligned} \quad (10-4)$$

この2種類の荷重の組み合わせが時系列上で確率的に生起するから、それぞれの荷重の組み合わせに対する生起確率 $\hat{q}(\tau)d\tau, \tilde{q}(\tau)d\tau$ を用いると、その期待値は次式から算出される。

$$E[\phi] = \phi_0 q_0 + \int_0^T \hat{\phi}(\tau) \hat{q}(\tau) d\tau + \int_0^T \tilde{\phi}(\tau) \tilde{q}(\tau) d\tau \quad (10-5)$$

$$E[\gamma_X] = \gamma_0 q_0 + \int_0^T \hat{\gamma}_X(\tau) \hat{q}(\tau) d\tau + \int_0^T \tilde{\gamma}_Y(\tau) \tilde{q}(\tau) d\tau \quad (10-6)$$

$$\text{ただし、} \hat{q}(\tau) = \frac{P_S(0) \mu_S \Phi[-\beta_{DLAWS}(\tau)] \exp\left\{-\int_0^\tau \lambda^*(t) dt\right\}}{1 - P_S(T)}$$

$$\tilde{q}(\tau) = \frac{P_S(0)(1 - \mu_S) \Phi[-\beta_{DLAW}(\tau)] \exp\left\{-\int_0^\tau \lambda^*(t) dt\right\}}{1 - P_S(T)}$$

$$\lambda^*(t) = \mu_S \Phi[-\beta_{DLAWS}(t)] + (1 - \mu_S) \Phi[-\beta_{DLAW}(t)]$$

(6) の場合は、(5) と同様に、雪荷重の有無の場合に分けて評価すれば次のようになる。

$$\hat{\phi}(\tau) = \frac{r^0(\tau)}{R_n}, \hat{\gamma}_X(\tau) = \frac{w_X^0(\tau)}{W_{X_n}} : X = D, LA, S, E \quad (10-7)$$

$$\tilde{\phi}(\tau) = \frac{r^0(\tau)}{R_n}, \tilde{\gamma}_Y(\tau) = \frac{w_Y^0(\tau)}{W_{Y_n}} : Y = D, LA, S$$

$$E[\phi] = \phi_0 q_0 + \int_0^T \hat{\phi}(\tau) \hat{q}(\tau) d\tau + \int_0^T \tilde{\phi}(\tau) \tilde{q}(\tau) d\tau \quad (10-8)$$

$$E[\gamma_X] = \gamma_0 q_0 + \int_0^T \hat{\gamma}_X(\tau) \hat{q}(\tau) d\tau + \int_0^T \tilde{\gamma}_Y(\tau) \tilde{q}(\tau) d\tau \quad (10-9)$$

$$\text{ただし、} \hat{q}(\tau) = \frac{P_S(0) \mu_S \bar{\nu}_E \Phi[-\beta_{DLASE}(\tau)] \exp\left\{-\int_0^\tau \lambda^*(t) dt\right\}}{1 - P_S(T)}$$

$$\tilde{q}(\tau) = \frac{P_S(0)(1 - \mu_S) \bar{\nu}_E \Phi[-\beta_{DLAE}(\tau)] \exp\left\{-\int_0^\tau \lambda^*(t) dt\right\}}{1 - P_S(T)}$$

$$\lambda^*(t) \approx \mu_S \bar{\nu}_E \Phi[-\beta_{DLASE}(t)] + (1 - \mu_S) \bar{\nu}_E \Phi[-\beta_{DLAE}(t)]$$

1.1. 数値計算例

この項では、文献7,13)等で示されている荷重に関する標準的係数値を用いて、基準期間中の耐力劣化が荷重・耐力係数の期待値に及ぼす影響を数値的に考察する。尚、 $c_0 = 1$ とし、係数 c_X はすべて1とした。また、図中の記号は次式を表す。

$$\eta_R = \frac{\bar{R}_0}{\bar{W}_D}, \eta_X = \frac{\bar{W}_X}{\bar{W}_D}, (X = LA, S, W, E)$$

まず始めに、8.で述べた多重積分を回避した AFOSM 法によるレベル超過率を用いて評価した7.の条件付危険率の期待値と多重積分を用いてレベル超過率を評価した同じ条件付危険率の期待値の値を比較しよう。Fig.2 中の実線は多重積分を回避した前者の値 $\lambda^*(\tau)$ であり、破線は Newton-Cotes の求積法を用いて得られた後者の値 $\tilde{\lambda}(\tau)$ である。荷重の組み合わせの種類は(4)と(6)の場合で、信頼性指標値 β_T が1.5のときの値である。計算は、まず、信頼性指標値1.5を目標値としてパラメータ η_R を収斂計算により算出し、 $\lambda^*(\tau)$ を求め、次に、この η_R と同じ値を用いて $\tilde{\lambda}(\tau)$ を求めた。図中の上の2つの図は $\eta_E = 1$ のときの図であり、下の2つの図は $\eta_E = 2$ のときの図である。 c の0,0.105,0.223の値は、基準期間50年でそれぞれ0%,10%,20%の耐力劣化を表している。実線と破線との差異は τ が大きい領域で極僅かであり、かなりよく一致する。無論、荷重・耐力係数の期待値もほぼ等しくなる。 c が0のときの図が多少右下がりになっているが、これは時刻の経過とともに耐力の低い構造要素は崩壊し、耐力の高い構造要素のみが生き残ることで危険率が低下する非破壊効果によるものである。

Fig.2 $\lambda^*(\tau)$ と $\tilde{\lambda}(\tau)$ の比較

以上のことから、多重積分を回避し、AFOSM 法によるレベル超過率を用いて評価した残存構造要素の耐力の密度関数から信頼性指標値および荷重・耐力係数を算出することが可能である。レベル超過率を求める数値計算において、指定されたレベル r 毎に収斂計算が必要になるが、前ステップの収束値を次のステップの初期値とすれば収斂が早く、かなりの計算時間を低減することができる。

以下の数値計算結果は、このような手法に基づく等価正規変数変換によるものである。

Fig.3の3個の図は、荷重の同時作用を条件にしたときの荷重・耐力係数の期待値(9-1)式と(9-2)式を図示したもので、耐力劣化がこれ

Fig.3 荷重・耐力係数の期待値

(実線: $c = 0$ 、破線: $c = 0.105$ 、点線: $c = 0.223$)

Fig.4 荷重・耐力係数の変動係数

Fig.5 荷重・耐力係数の期待値と変動係数

らの係数に及ぼす影響を示したものである。これらの3個の図は、荷重の組み合わせの種類が(4)～(6)の場合を対象としたもので、基準期間 $T = 50$ 年で $c = 0$ ときの信頼性指標値 β_T がそれぞれ1.5

2.1.5のときの荷重・耐力係数の期待値を表す。耐力劣化係数は経年による耐力劣化のみを考え、Fig.2同様に、 $T = 50$ 年で10%

($c = 0.105$)、および20% ($c = 0.223$)の耐力劣化を想定したときの結果を示した。図中の実線、破線および点線は c の値がそれぞれ0.0, 0.105, 0.223のときの荷重・耐力係数の期待値である。一点鎖線は(9-3)式で表される従来型の荷重・耐力係数を表す。

非破壊効果により、時刻の経過とともに残存構造要素の耐力が徐々に上昇するため、主荷重の荷重係数も上昇するが、信頼性指標値が1.5および2程度であれば、その時系列上の変化は非常に小さい。そのため、時系列上の荷重係数の期待値を表す実線は従来型の荷重係数を表す一点鎖線と比べると全体的に多少小さくなるが、その差異は十分小さい。主荷重が卓越する領域での差異と比べて、主荷重が比較的小さい領域での差異が多少あるが、これは、非破壊効果の影響の度合いによるものであり、確率的に稀な事象である主荷重が卓越する領域での非破壊効果は十分小さいということを表している。

主の荷重が卓越する領域での実線の一点鎖線に対する差異は、概ね0.5%程度である。他の荷重係数の場合はさらに小さくなり、ほぼ等しい値を示す。また、耐力係数を対象にした場合の実線の一点鎖線に対する差異も、主荷重の卓越する領域で概ね0.5%程度であり、十分小さい。それ故、このような組み合わせ荷重に対しても、信頼性指標

値が1.5および2程度であれば、耐力劣化がない場合の荷重・耐力係数の期待値と従来型の荷重・耐力係数はほぼ等しい値を有することになるだろう。

しかしながら、1.0でも述べたように、従来型の荷重・耐力係数は、 T 年未満までは安全で、 T 年で組み合わせ荷重の和の最大値が一度作用したときに、確率1で原点から最短距離にある限界状態面上に到達することを想定して決められた値であり、 T 年間中の限界状態面上への到達を確率事象として設定された荷重・耐力係数の期待値の特別な場合に相当する。それ故、信頼性指標値がある程度大きく、崩壊確率が十分小さい場合や、基準期間として十分大きい年数(例えば、100年またはそれ以上)を想定する場合には、この期間までの構造要素の安全性を100%保障する訳にはいかないとと思われるので、限界状態面上への到達を時刻歴上の確率事象として設定された荷重・耐力係数の期待値のほうが、現実の荷重モデルに即した値になっているように思われる。

荷重・耐力係数の期待値が基準期間中の構造要素の耐力劣化により受ける影響は、Fig.3から分かるように、主荷重の荷重係数の期待値と耐力係数の期待値に大きく現れ、他の荷重係数の期待値にはほとんど見られない。耐力劣化の度合いに応じて、主荷重の荷重係数と耐力係数のそれぞれの期待値は低下するが、耐力劣化がない場合と同様に、一定値に収束してゆく傾向が見られる。

主荷重が卓越する領域での荷重係数の期待値の低下率は、 $c = 0$ の実線の値と比べて、 $c = 0.105$ の場合は5.7%, 5.9%, 6.1%それぞれ低

下し、 $c = 0.223$ の場合は 12.4%, 13.5%, 13.3% それぞれ低下した。同様に、耐力係数の期待値の低下率は、 $c = 0.105$ の場合は 5%, 4.8%, 5% それぞれ低下し、 $c = 0.223$ の場合は 11%, 11%, 10.9% それぞれ低下した。これらの図で示されたそれぞれの値の低下率は、荷重の組み合わせの種類が (4) ~ (6) の場合の値であるが、(1) ~ (3) の場合も概ね等しい低下率を示した。

以上のことから、基準期間 50 年での荷重・耐力係数の期待値に及ぼす耐力劣化の影響は、予め設定された信頼性指標値の値によって多少異なるが、主荷重の荷重係数の期待値は、耐力劣化がない場合と比べて、 $c = 0.105, 223$ で概ね 6%, 13% 程度それぞれ低下した。また、耐力係数の期待値は、 $c = 0.105, 223$ で概ね 5%, 11% 程度それぞれ低下した。

Fig.4 は、(4) と (6) の荷重の組み合わせの種類を対象にして、耐力劣化が主荷重の荷重係数と耐力係数の変動係数に及ぼす影響について図示したものである。変動係数は、 $c = 0.105$ で 2~3%、 $c = 0.223$ で 6~7% 程度の値になった。他の荷重係数の期待値への影響はほとんどない。

Fig.5 は、荷重の同時作用を条件にしない場合で、(10-8)式と(10-9)式を図示したものである。左の図は、耐力劣化が荷重・耐力係数の期待値に及ぼす影響を示したものであり、右の図は、変動係数に及ぼす影響を示したものである。この図は、(4) と (6) の荷重の組み合わせの種類が時系列上に確率的に生じるときの荷重・耐力係数の期待値と変動係数に及ぼす耐力劣化の影響を示している。図中の V_{ϕ} は耐力係数の変動係数であり、 V_{Y_X} ($X = S, E$) は荷重係数の変動係数である。この場合の荷重・耐力係数の期待値は、荷重の種類 (6) の他に、雪荷重が作用しない区間 ($1 - \mu_S$) で (4) の荷重の種類を考慮しなければならないため、(6) に対して得られたパラメータ η_R より大きな値が必要になり、結果として、Fig.3 の (4) の場合の値とあまり変わらない結果になった。

雪荷重の変動係数が大きな値を示しているが、これは、雪荷重が作用していない区間があるためである。耐力係数の変動係数は、 c が 0, 0.105, 0.223 のとき、それぞれ 0.36%, 2.6%, 5.8% となり、また、主荷重である地震荷重の変動係数は、同様に c が 0, 0.105, 0.223 のとき、2.1%, 3.8%, 7.2% になった。

従来型の荷重・耐力係数は、時刻 T 年で予想した最大荷重が一度作用したときに、確率 1 で限界状態面に到達することを想定して決められた値であるから、基準期間が 50 年程度のある程度短い場合や基準期間中の耐力劣化がない場合は、このような評価手法は設計上許容されるものと思われるが、基準期間がさらに大きくなり、また荷重履歴や構造材料の経年による耐力劣化が生じるような状態を想定する場合は、基準期間中に限界状態面に到達する可能性が大きくなり、これらの係数のばらつきも大きくなる筈である。このように、設計上の前提条件が変わった場合は、荷重・耐力係数の値も変動する訳であるから、このような変動の度合いを予め把握しておくことも無益ではないと思われる。

12. 結論

本稿を要約すると次のようになる。

1) 時系列上の荷重履歴を受けて生き残った残存構造要素の統計量を用いた AFOSM 法の適用により、限界状態面上への到達を確率事象と見なしたときに設定される荷重・耐力係数の期待値の算定手法を定式化し、荷重に関する標準的係数値を用いたときの耐力の時間的变化がこの期待値に及ぼす影響を数値的に考察した。その結果、基準期間 50 年での荷重・耐力係数の期待値に及ぼす耐力劣化の影響は、予め設定された信頼性指標値の値によって多少異なるが、主荷重の荷重係数の期待値は、耐力劣化がない場合と比べて、 $c = 0.105, 223$ で 6%, 13% 程度それぞれ低下した。また、耐力係数の期待値は、 $c = 0.105, 223$ で 5%, 11% 程度それぞれ低下した。他の荷重係数の期待値への影響はほとんどない。

2) 組み合わせ荷重の和のレベル超過率を表す条件付危険率と、耐力を時間に依存する確率変数と見なしたときの限界状態面への超過率を表す条件付危険率の期待値、この 2 つのパラメータの数値的評価に AFOSM 法を適用することにより、多重積分を回避した比較的簡便な数値計算手法を提案し、組み合わせ荷重を受ける時間依存型信頼性解析を可能にした。

3) 本稿で展開した残存構造要素の耐力を用いた AFOSM 法は、過去の地震経験や経年等による耐力劣化を有する既存構造物の信頼性評価および補強後の信頼性評価問題への適用も可能であろう。

参考文献

- 1) C.J.Turkstra : Theory of Structural Design Decision, Study No.2, Soild Mechanics Division University of Waterloo, Ontario, Canada, 1970
- 2) Y.K. Wen : Statistical combination of extreme loads, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.103, May, 1977
- 3) R.D. Larabee and C.A.Cornell : Upcrossing rate solution for load combination, Journal of the Structural Division ASCE, Vol.105, pp.125-132, Jan., 1979
- 4) Y.K. Wen : System Reliability under Time Varying Loads : I, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.115, No.4, pp.808-823, April., 1989
- 5) 坂本 順 : 限界状態設計法における荷重係数について、日本建築学会構造系論文報告集、No.393、pp.71-79, 1988 年 11 月
- 6) 河野 守、坂本 順、青木 和雄 : 荷重の確率過程の組み合わせにおける超過確率の理論解とその応用に関する考察、日本建築学会構造系論文報告集、No.405、pp.31-40, 1989 年 11 月
- 7) 河野 守、坂本 順 : 荷重の組み合わせと荷重効果に関する考察、日本建築学会構造系論文報告集、No.415、pp.117-126, 1990
- 8) Alfredo H-S, Ang, Wilson H. Tang : 土木・建築のための確率・統計の応用、丸善株式会社
- 9) 洪 起、高梨 晃一 : 構造物の限界状態設計法における荷重係数の決定について、日本建築学会構造系論文報告集、No.444、pp.13-22, 1993 年 2 月
- 10) 洪 起 : 強度劣化を有する構造物の耐用年数中の崩壊確率について、日本建築学会構造系論文報告集、No.512, 1998 年 10 月
- 11) 坂本 順、森 保宏、関岡 高緒 : 離散高速フーリエ変換による確率解析法、日本建築学会構造系論文集、No.472, 1995.5
- 12) 河野 守、坂本 順 : HERMITE 多項式による多変数信頼性解析法、構造工学論文集、Vol.33B(1987.3)
- 13) 鋼構造限界状態設計基準 (案)・同解説、日本建築学会、1990 年
- 14) 構造造荷重・耐力係数設計法試案、日本建築学会構造委員会鋼構造分科会、1986 年

(1999 年 8 月 3 日原稿受理、2000 年 6 月 14 日採用決定)