時間依存型構造システムの信頼性解析

—構造システムの信頼度関数—

TIME-DEPENDENT RELIABILITY ANALYSIS OF STRUCTURAL SYSTEMS

—Reliability function of structural systems—

洪 起*

Ki KOH

Reliability of structures and structural systems may be effected by changes in strength due to past loading history or aging. So the probability of safely resisting all the loads of a loading sequence in service is an important and the most meaningful measure of its safety. However, the current research concerning reliability of structures and structural systems is mostly concentrated on reliability analysis ignoring the influence of load history, because of complexity of probabilistic treatment of its effect. In this paper, the analysis method to assess reliability of structural systems with strength deterioration due to aging is presented, by introducing the probability density function of the residual strength of survived structural systems.

Keywords : reliability of structural systems, random load sequence, strength deterioration,
time-dependent reliability analysis, reliability index

構造システムの信頼性、ランダム荷重列、耐力劣化、時間依存型信頼性解析、信頼性指標値

1. はじめに

構造物の信頼性解析では、構造物の一般的耐力または構造要素の耐力と荷重からなる性能関数を定義し、拡張2次モーメント法等により基準期間中の信頼性指標値が評価され、設計上必要な構造物の荷重・耐力係数が設定されている^{1),2),3),4)}。

しかしながら、構造物をはり、柱、壁等の構造要素からなる一つのシステムと見なした場合は、構造要素それぞれに耐力があるため、上述のような構造物の一般的耐力や構造要素の耐力のみを用いて信頼性解析を行うことはできない。このような場合は、はり、柱、壁等の一つの構造要素を取り出して、信頼性評価を行うのではなく、構造物を一つのシステムとして捉え、システムとしての信頼度解析を行う必要がある。

構造物をシステムと見なしたときの信頼性解析では、骨組構造物を対象にした場合、その力学的挙動のモデル化から予め崩壊モードを定義し、それぞれの崩壊モードの生起確率を拡張2次モーメント法や高次積率標準化法等により評価する手法が用いられている^{4),5),6)}。また、複数の崩壊モードを有するシステムと見なした場合の信頼性解析では、精解を得ることは困難であることから、その下界および上界を表す近似解が用いられている。この場合の荷重は、一般に時間依存のな

い静的荷重が用いられている。

一般に、構造物および構造システムはその耐用期間中に大きさが不確定な荷重を複数回繰返し受ける。時系列上の荷重履歴や経年等による耐力劣化により耐力に時間的な変化が生じる場合、信頼度関数はその影響を大きく受ける。このような時間依存型信頼性解析(time-dependent reliability analysis)では、耐力の弱い構造物は早く崩壊し、時刻の経過とともに生き残った構造物の耐力は徐々に強くなるという非破壊効果、および生き残った構造物は荷重履歴や経年等により、耐力が劣化するという耐力劣化効果を考慮する必要があるため、信頼度関数の解析的表現はかなり複雑になる。そのため、理論的研究は少ない^{7),8),9),10)}。特に、構造物を構造システムとして捉えた場合は、その確率的現象がより複雑になるため、解析的アプローチによる信頼性評価はかなり困難である。

構造システムの中で、特に直列システムの時間依存型信頼度関数のための解析的アプローチとしては、システムを構成する要素の安全条件から得られる多面体表面への交差率(outcrossing rate)の上界と下界で評価する方法がある¹¹⁾。

最近、コンクリート構造物の保守・点検を経済的に行うための戦略を立てるうえで、直列システムの信頼性解析がなされているが、得ら

* 長岡造形大学環境デザイン学科 教授・工博

Prof. of Dept. of Environmental Design, Nagaoka Institute of Design, Dr. Eng.

れた信頼度関数を数値積分することは事実上困難であることから、モンテカルロ・シミュレーションが用いられている^{13),14),15),16)}

著者は、荷重履歴に対してある時刻まで崩壊しなかったという条件下での構造物または構造要素の耐力（残存構造物または残存構造要素の耐力）の密度関数を導入することにより、耐力に時間的変化がある場合の信頼度関数が比較的簡単な表現式で表されることを示し、非破壊鋼効果および耐力劣化効果を考慮した構造物または構造要素の時間依存型信頼性解析を可能にした^{8),10)}。

本稿は、このような新しい概念を構造システムの信頼性解析に応用したもので、ある時刻まで崩壊しなかったという条件下での構造システムの耐力の密度関数を導入することにより、文献 8,10)同様に、構造システムの信頼度関数が比較的簡単な表現式で表されることを示し、数値解析例による考察を行ったものである。

2. 構造システムの信頼度関数

はり、柱および壁等の構造要素からなる構造システムの概念的な信頼性解析上の基本モデルとして、直列システム（series system）と並列システム（parallel system）およびその組み合わせシステムがある¹⁷⁾。直列システムは、 m 個の構造要素を直列に配置し、システムを構成している構造要素のいずれか一つが崩壊したときに崩壊状態になると見なすもので、一般に静定構造物の信頼性評価に適用される。

並列システムは、 m 個の構造要素を並列に配置し、構造要素の一つが崩壊してもシステム全体が崩壊するとは限らないシステムで、主に塑性崩壊モードの形成を崩壊状態と見なした場合の不静定構造物の信頼性評価に適用されている。

一般に、並列システムはある要素の崩壊に際して、生き残った要素への応力の再配分を考慮するかどうかにより解析手法が異なるが、本稿で扱う並列システムは荷重履歴によって要素に生じた応力がそれぞれの要素の限界耐力を超過し、全要素が崩壊したときに崩壊モードを形成するシステムを解析対象とするもので、要素の崩壊過程で生じる応力の再配分は考えないものとする。

一般の不静定構造物は並列システムが直列に連結されたシステムでモデル化される。これは組み合わせシステムで、システムの中の少なくとも一つの並列システムが崩壊したときにシステムの崩壊が生じる¹⁷⁾。本稿で扱う構造システムは以上述べた3つであり、まず、要素の耐力劣化がない場合について述べる。

a) 直列システムの信頼度関数

直列システムは、 m 個の構造要素からなり、それぞれの要素の限界耐力を $R_1, R_2, \dots, R_m$ とする。荷重は時系列上でランダムに到達するポアソン過程で表される荷重列 $W_1, W_2, \dots, W_k, \dots$ とし、それぞれの荷重の強さは確率分布関数 $F_W(w)$ を有するものとする。

直列システムは、前述のように、そのシステムを構成している要素の中の少なくとも一つが崩壊したときに崩壊状態と見なされる。一般には静定構造物の信頼性評価に用いられるが、不静定構造物の信頼性評価に用いられる場合は過小評価になる。

システムの信頼度関数は、要素のすべての耐力がそれまでに受けた荷重履歴によって生じたそれぞれの要素の応力より大きくなければならないという条件の積事象で表され、次式になる。

$$\begin{aligned} P_{S_S}(t) &= P_r \left[\left(R_1 > c_1 W_1 \cap R_2 > c_2 W_1 \cap \dots \cap R_m > c_m W_1 \right) \right. \\ &\quad \cap \left(R_1 > c_1 W_2 \cap R_2 > c_2 W_2 \cap \dots \cap R_m > c_m W_2 \right) \\ &\quad \cap \left(\dots \cap \dots \cap \dots \cap \dots \right) \\ &\quad \left. \cap \left(R_1 > c_1 W_k \cap R_2 > c_2 W_k \cap \dots \cap R_m > c_m W_k \right) \right. \\ &\quad \left. \cap \left(\dots \right) \right] \\ &= P_r \left[\min_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right) > W_1 \cap \min_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right) > W_2 \cap \dots \right. \\ &\quad \left. \cap \min_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right) > W_k \cap \dots \right] \quad (2-1) \end{aligned}$$

ただし、 $P_{S_S}(t)$: t 年での直列システムの信頼度関数

c_i : 荷重と要素に生じる応力を関連づける係数

上式で、 $R_i/c_i (i=1, 2, \dots, m)$ の最小値を表す新しい確率変数 $R_{\min}$

を導入すれば、次のようになる。

$$P_{S_S}(t) = P_r [R_{\min} > \max\{W_1, W_2, \dots, W_k, \dots\}; 0 \leq \tau \leq t] \quad (2-2)$$

$$\text{ただし、} R_{\min} = \min_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right)$$

(2-1)式で定義されたシステムの信頼度関数は、新しい確率変数 $R_{\min}$ を導入することにより、初期耐力 R_0 を有する構造物の信頼度関数と同様な式で表されることになる¹⁰⁾。(2-2)式は t 年間に予想される荷重の最大値が一度作用したときに $R_{\min}$ を超えない確率を表すが、また、この信頼度関数は t 年までに予想される荷重列のすべてが $R_{\min}$ を超えない確率に等しくなる。

(2-2)式の精解を表す式で、 $\bar{\lambda}_S(\Delta t) \ll 1$ であれば、この項の積は微小項として無視できるから、連続な時間軸に対する信頼度関数は近似的に次式で表すことができる¹⁰⁾。

$$P_{S_S}(t) \approx \exp \left\{ - \int_0^t \bar{\lambda}_S(\tau) d\tau \right\} \quad (2-3)$$

上式中の $\bar{\lambda}_S(\tau)$ は次のように表される。

$$\bar{\lambda}_S(\tau) = \int_0^\infty \lambda_S(\tau | R_{\min} = r) p_{R_{\min}}(r) dr \quad (2-4)$$

ただし、 $\lambda_S(\tau | R_{\min} = r)$: 条件付危険率

$$p_{R_{\min}}(r | \tau) = \frac{P_{S_S}(\tau | R_{\min} = r) p_{R_{\min}}(r)}{\int_0^\infty P_{S_S}(\tau | R_{\min} = r) p_{R_{\min}}(r) dr} : \tau \text{ 年まで崩}$$

壊しなかったという条件下での $R_{\min}$ の密度関数で、残存直列システムの耐力の密度関数

上式中の条件付危険率は、 t 年まで崩壊せずに生き残ったシステムが引き続き単位年間に確定荷重列 $r_1, r_2, \dots$ を受けると仮定すれば、この荷重列の最大値が r を超過すれば 1 であり、それ以外は 0 の値を有する値である。荷重列が時系列上で生起率 ν を有するポアソン確率過程で表される場合の条件付危険率は次のようになる。

$$\lambda_S(t | R_{\min} = r) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\nu^i}{i!} e^{-\nu} F_W^i(r) \approx \nu \bar{F}_W(r) \quad (2-5)$$

ただし、 $\bar{F}_W(r) = 1 - F_W(r)$

(2-4)式から分かるように、ある時刻まで崩壊しなかったという条件下での直列システムの耐力（以下、残存直列システムの耐力と表記）

の密度関数から得られる条件付危険率の期待値を設定することで、(2-2)式の信頼度関数が比較的容易に評価されることになる。尚、条件付危険率の積の項を微小項として無視したことによる誤差は、精解と比して1%弱である¹⁰⁾。

b) 並列システムの信頼度関数

並列システムはそのシステムを構成している構造要素のすべてが崩壊したときに崩壊状態と見なされるシステムで、予め決められた崩壊モードのみを対象にした不静定骨組の信頼性評価に用いることも可能である。

ある荷重に対する並列システムの信頼度関数は要素の中の少なくとも一つが安全である確率で表されるから、各要素の安全を表す事象の和事象で表すことができる。荷重列に対する信頼度関数は要素のすべての耐力がそれまでに受けた荷重によって生じたそれぞれの要素の応力より大きくなければならないという条件で表され、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 P_{Sp}(t) &= P_r \left[(R_1 > c_1 W_1 \cup R_2 > c_2 W_1 \cup \dots \cup R_m > c_m W_1) \right. \\
 &\quad \cap (R_1 > c_1 W_2 \cup R_2 > c_2 W_2 \cup \dots \cup R_m > c_m W_2) \\
 &\quad \cap (\dots \cup \dots \cup \dots \cup \dots) \\
 &\quad \cap (R_1 > c_1 W_k \cup R_2 > c_2 W_k \cup \dots \cup R_m > c_m W_k) \\
 &\quad \left. \cap (\dots) \right] \\
 &= P_r \left[\max_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right) > W_1 \cap \max_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right) > W_2 \cap \dots \right. \\
 &\quad \left. \cap \max_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right) > W_k \cap \dots \right] \quad (2-6)
 \end{aligned}$$

ただし、 $P_{Sp}(t)$: t 年での並列システムの信頼度関数

上式で、 $R_i/c_i (i=1, 2, \dots, m)$ の最大値を表す確率変数 $R_{\max}$ を導入すると次式になる。

$$P_{Sp}(t) = P_r [R_{\max} > \max\{W_1, W_2, \dots, W_k, \dots\}; 0 \leq \tau \leq t] \quad (2-7)$$

$$\text{ただし、} R_{\max} = \max_{i=1}^m \left(\frac{R_i}{c_i} \right)$$

(2-7)式は(2-2)式と同じ表現式で表されるから、条件付危険率の期待値の積の項を微小項として無視すれば、(2-7)式を満たす信頼度関数は、(2-3)式と同様に、次のようになる。

$$P_{Sp}(t) \approx \exp \left\{ - \int_0^t \bar{\lambda}_p(\tau) d\tau \right\} \quad (2-8)$$

$$\text{ただし、} \bar{\lambda}_p(\tau) = \int_0^\infty \lambda_p(\tau | R_{\max} = r) p_{R_{\max}}(r) dr$$

$$p_{R_{\max}}(r | \tau) = \frac{P_{Sp}(\tau | R_{\max} = r) p_{R_{\max}}(r)}{\int_0^\infty P_{Sp}(\tau | R_{\max} = r) p_{R_{\max}}(r) dr}$$

$$\lambda_p(\tau | R_{\max} = r) \approx v \bar{F}_W(r)$$

C) 組み合わせシステムの信頼度関数

組み合わせシステムでは、システムの中の少なくとも一つの並列システムが崩壊したときにシステム全体の崩壊が生じる。崩壊した並列システムに含まれる要素の組は、一般に崩壊モードと呼ばれる。(2-1)式と(2-6)で示したシステムの信頼度関数を考慮すれば、組み合わせ

システムの t 年までの荷重列に対する信頼度関数は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned}
 P_{SSP}(t) &= P_r \left[\max_{j=1}^{n_1} \left(\frac{R_{1j}}{c_{1j}} \right) > W_1 \cap \max_{j=1}^{n_2} \left(\frac{R_{2j}}{c_{2j}} \right) > W_1 \cap \dots \right. \\
 &\quad \cap \max_{j=1}^{n_m} \left(\frac{R_{mj}}{c_{mj}} \right) > W_1 \cap \\
 &\quad \left[\max_{j=1}^{n_1} \left(\frac{R_{1j}}{c_{1j}} \right) > W_2 \cap \max_{j=1}^{n_2} \left(\frac{R_{2j}}{c_{2j}} \right) > W_2 \cap \dots \right. \\
 &\quad \cap \max_{j=1}^{n_m} \left(\frac{R_{mj}}{c_{mj}} \right) > W_2 \cap \dots \cap \dots \cap \dots \cap \dots \cap \\
 &\quad \left. \left[\max_{j=1}^{n_1} \left(\frac{R_{1j}}{c_{1j}} \right) > W_k \cap \max_{j=1}^{n_2} \left(\frac{R_{2j}}{c_{2j}} \right) > W_k \cap \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cap \max_{j=1}^{n_m} \left(\frac{R_{mj}}{c_{mj}} \right) > W_k \cap \dots \cap \dots \cap \dots \cap \dots \right] \right] \quad (2-9)
 \end{aligned}$$

ただし、 $R_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n_i)$: i 番目の崩壊モード

に含まれる j 番目の要素の耐力 (n_i : i 番目の崩壊モードに含まれる要素の数)

c_{ij} : i 番目の崩壊モードに含まれる j 番目の要素と荷

重を関係付ける係数

m : 組み合わせシステムの崩壊モードの数

上式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 P_{SSP}(t) &= P_r \left[\min_{l=1}^m \left(\max_{j=1}^{n_l} \left[\frac{R_{lj}}{c_{lj}} \right] \right) > W_1 \cap \min_{l=1}^m \left(\max_{j=1}^{n_l} \left[\frac{R_{lj}}{c_{lj}} \right] \right) > W_2 \right. \\
 &\quad \left. \cap \dots \cap \min_{l=1}^m \left(\max_{j=1}^{n_l} \left[\frac{R_{lj}}{c_{lj}} \right] \right) > W_k \cap \dots \right] \quad (2-10)
 \end{aligned}$$

上式で、(2-2)式と(2-7)式同様に、新しい確率変数 $R_{\min, \max}$ を導入すれば次式になる。

$$P_{SSP}(t) = P_r [R_{\min, \max} > \max\{W_1, W_2, \dots, W_k, \dots\}; 0 \leq \tau \leq t] \quad (2-11)$$

$$\text{ただし、} R_{\min, \max} = \min_{l=1}^m \left(\max_{j=1}^{n_l} \left[\frac{R_{lj}}{c_{lj}} \right] \right)$$

上式を満たす信頼度関数は次式になる。

$$P_{SSP}(t) \approx \exp \left\{ - \int_0^t \bar{\lambda}_{SP}(\tau) d\tau \right\} \quad (2-12)$$

$$\text{ただし、} \bar{\lambda}_{SP}(\tau) = \int_0^\infty \lambda_{SP}(\tau | R_{\min, \max} = r) p_{R_{\min, \max}}(r) dr$$

$$p_{R_{\min, \max}}(r | \tau) = \frac{P_{SSP}(\tau | R_{\min, \max} = r) p_{R_{\min, \max}}(r)}{\int_0^\infty P_{SSP}(\tau | R_{\min, \max} = r) p_{R_{\min, \max}}(r) dr}$$

$$\lambda_{SP}(\tau | R_{\min, \max} = r) \approx v \bar{F}_W(r)$$

以上のように、直列システム、並列システムおよびその組み合わせシステムのいずれの信頼度関数も、条件付危険率の期待値から求められ、そのときの期待値演算に用いる耐力の密度関数は、 τ 年まで崩壊しなかったという条件下で定義されるそれぞれの残存システムの耐力の密度関数でなければならない。

3. 耐力劣化を考慮した残存システムの耐力の密度関数

システムは、使用期間中の荷重履歴や経年等により、何らかの耐力劣化が生じるものと解釈したほうが自然であるから、この項では、システムの耐力に時間的な変化がある場合を考慮した残存システムの耐力の密度関数について述べる。

直列システム、並列システムおよび組み合わせシステムのいずれの信頼度関数も、(2-3)式、(2-8)式および(2-12)式が示すように、それぞれの条件付危険率の期待値から求められ、そのときの期待値演算には、 τ 年まで崩壊しなかったという条件下でそれぞれ定義される残存システムの耐力の密度関数が用いられる。耐力劣化を考慮する場合は、この残存システムの耐力の密度関数に耐力劣化による影響を組み入れればよい。

耐力の劣化モデルは種々考えられる^{7),8),9),10)}。文献10)では、微小時間毎に一定比率で劣化するモデルを用いたが、本稿では耐力劣化がある任意の確定関数で表される場合にも適用できるように拡張する。 i 要素の初期耐力 r_i を確定値と仮定し、荷重履歴に無関係なある任意の関数 $g(\tau)$ を用いて、 τ 年後の i 要素の耐力を次式で表す。

$$r_i(\tau) = g(\tau)r_i \quad (3-1)$$

ただし、 $r_i(\tau)$: i 要素の τ 年後の耐力

$g(\tau)$: 耐力劣化係数で非増加関数、 $0 < g(\tau) \leq 1, g(0) = 1$

ある母集団に属する要素の耐力がすべてある確定関数で一樣に耐力劣化するものと仮定すれば、この母集団に属する要素からなるシステムの耐力も同じ確定関数で耐力劣化するとしても自然である。まず、直列システムの場合を考えると、耐力劣化は、生き残った残存直列システムのみに生じるから、離散型時系列上での $(k-1)\Delta\tau$ 年後の非破壊効果を考慮した後の残存直列システムの耐力 $r_{\min,k-1}$ と $k\Delta\tau$ 年後の耐力 $r_{\min,k}$ との関係式を次式で表すことにする。

$$r_{\min,k} = \varphi_k r_{\min,k-1} \quad (3-2)$$

$$\text{ただし、} \varphi_k = 1 + g((k-1)\Delta\tau)\Delta\tau, \quad \dot{g}(\tau) = \frac{\partial g(\tau)}{\partial \tau}$$

文献10)でも記述されているように、初期耐力から得られる $R_{\min}$ の密度関数から、微小区間の荷重による $R_{\min}$ の崩壊領域を差し引き、正規化した後の $R_{\min}$ の密度関数と(3-2)式を用いて変数変換を逐次行う。以上の操作を繰返すと、APPENDIX Aで示した(A-1)式になり、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、最終的に次のような式が得られる。

$$p_{R_{\min}}(r|\tau) = \frac{p_{R_{\min}}\left(\frac{r}{g(\tau)}\right) \exp\left\{-\nu \int_0^\tau \bar{F}_W\left(\frac{r}{G(\tau,u)}\right) du\right\}}{\int_0^\infty p_{R_{\min}}\left(\frac{r}{g(\tau)}\right) \exp\left\{-\nu \int_0^\tau \bar{F}_W\left(\frac{r}{G(\tau,u)}\right) du\right\} dr} \quad (3-3)$$

ただし、 $G(\tau,u) = g(\tau) - g(u) + 1$

(3-3)式は耐力劣化を考慮した後の残存直列システムの耐力の密度関数である。並列システムおよび組み合わせシステムを対象にした場合の残存システムの耐力の密度関数は、(3-3)式の右辺の $R_{\min}$ の密度関数の代わりにそれぞれ $R_{\max}$ と $R_{\min,\max}$ の密度関数を用いればよい。耐力劣化を無視する場合は、無論、 $g(\tau) = 1$ とすればよい。

4. $R_{\min}$, $R_{\max}$ および $R_{\min,\max}$ の確率密度関数

この項では、(2-2)式、(2-7)式および(2-11)式でそれぞれ定義された

要素の初期耐力から得られる $R_{\min}$, $R_{\max}$ および $R_{\min,\max}$ の密度関数について述べる。 $R_{\min}$ の確率分布関数は、APPENDIX Bで示されているように、事象 $R_i \leq c_i r (i=1,2,\dots,m)$ のうちに、少なくとも1つの事象を表す不等式を満たす r の領域の積分から得られるが、一般に、要素耐力間の相関係数が ρ_{ij} で表され場合、(B-1)式を簡単な式で表すことは大変難しい。

しかしながら、特別な場合として、相関係数が $\rho_{ij} = \rho$ で表される対数正規分布の場合は、耐力の結合確率分布関数は比較的簡単な式で表される^{17),18)}。結局、 $R_{\min}$ の密度関数は(B-1)式の微分から得られ、次式になる。

$$p_{R_{\min}}(r) = \frac{1}{r} \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \frac{\phi(\alpha_i)}{\zeta_{R_i}} - \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{\zeta_{R_i} \zeta_{R_j}} \phi(x) \phi(\alpha_i) \phi(\alpha_j) \Phi[A_j] \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{\zeta_{R_i} \zeta_{R_j}} \Phi[A_i] \phi(x) \phi(\alpha_j) \right\} + \dots \right) \quad (4-1)$$

$$\text{ただし、} A_i = \frac{\alpha_i - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}, \quad \alpha_i = \frac{\ln(c_i r) - \lambda_{R_i}}{\zeta_{R_i}}$$

$$\zeta_{R_i}^2 = \ln(1 + V_{R_i}^2), \quad \lambda_{R_i} = \ln \bar{R}_i - 0.5 \zeta_{R_i}^2$$

V_{R_i} : R_i の変動係数, $\bar{R}_i$: R_i の期待値

$\Phi[A_i]$: 標準正規分布関数

並列システムの $R_{\max}$ の密度関数は次のようになる。 $R_{\max}$ の分布関数は、事象 $R_i \leq c_i r (i=1,2,\dots,m)$ のすべての不等式を満たす r の領域の積分から得られる(APPENDIX C)。 $R_{\max}$ の密度関数は、(4-1)式と同様に、相関係数が $\rho_{ij} = \rho$ で表される場合は、次式になる。

$$p_{R_{\max}}(r) = \frac{\phi(x)}{r\sqrt{1-\rho}} \sum_{i=1}^m \frac{\phi(\alpha_i)}{\zeta_{R_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \Phi[A_j] \quad (4-2)$$

組み合わせシステムの $R_{\min,\max}$ の確率分布関数は、 m 個の崩壊モードのうちで少なくとも一つの崩壊モードが生じる領域の積分で表されるから、APPENDIX Dの(D-1)式で表される。 $R_{\min,\max}$ の密度関数はこの式を微分すれば次のように得られる。

$$p_{R_{\min,\max}}(r) = \frac{\phi(x)}{r\sqrt{1-\rho}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\phi(\alpha_{1i})}{\zeta_{R_{1i}}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_1} \Phi[A_{1j}] + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\phi(\alpha_{2i})}{\zeta_{R_{2i}}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_2} \Phi[A_{2j}] + \dots + \sum_{i=1}^{n_m} \frac{\phi(\alpha_{mi})}{\zeta_{R_{mi}}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_m} \Phi[A_{mj}] - \dots \right) \quad (4-3)$$

$$\text{ただし、} A_{ij} = \frac{\alpha_{ij} - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}, \quad \alpha_{ij} = \frac{\ln(c_{ij} r) - \lambda_{R_{ij}}}{\zeta_{R_{ij}}}$$

以上のように、要素耐力間の相関係数が $\rho_{ij} = \rho$ で表される場合は、数値計算が可能な式で表されることになる。

5. 数値解析結果の考察

ある時刻まで崩壊しなかったという条件下での構造システムの耐力の密度関数を導入することで、時間依存型構造システムの信頼度関数の解析的表現が可能であることを示した。この項では、構造システムを構成している要素耐力間の相関係数および要素の耐力劣化等がシステムの条件付危険率の期待値および信頼度関数に及ぼす影響を簡単な例題を用いて考察する。

要素の耐力 R_i と荷重の強さ W の密度関数は対数正規分布とし、耐力劣化係数として線形関数を仮定すると、(2-3)式から得られる T 年での直列システムの崩壊確率は次式になる。

$$P_{F_S}(T) \approx 1 - \exp \left\{ - \int_0^T \bar{\lambda}_S(\tau) d\tau \right\} \quad (5-1)$$

$$\text{ただし、} \bar{\lambda}_S(\tau) = \nu \int_0^\infty \Phi^C \left[\frac{\ln r - \bar{\lambda}_W}{\zeta_W} \right] \cdot$$

$$\frac{P_{R_{\min}} \left(\frac{r}{g(\tau)} \right) \exp \left\{ - \nu \int_0^\tau \Phi^C \left[\frac{\ln \tilde{r} - \bar{\lambda}_W}{\zeta_W} \right] du \right\}}{\int_0^\infty P_{R_{\min}} \left(\frac{r}{g(\tau)} \right) \exp \left\{ - \nu \int_0^\tau \Phi^C \left[\frac{\ln \tilde{r} - \bar{\lambda}_W}{\zeta_W} \right] du \right\}} dr$$

$$\tilde{r} = \frac{r}{a(u-\tau)+1}, \quad \bar{\lambda}_W = \ln \bar{W} - 0.5 \zeta_W^2, \quad \zeta_W^2 = \ln(1 + V_W^2)$$

$$\Phi^C[X] = 1 - \Phi[X], \quad g(\tau) = 1 - a\tau, \quad a: \text{定数}$$

並列システムと組み合わせシステムの崩壊確率 ($P_{F_P}(T)$, $P_{F_{SP}}(T)$) は、上式の右辺の $P_{R_{\min}}(r)$ の代わりに(4-2)式と(4-3)式の密度関数 $P_{R_{\max}}(r)$ と $P_{R_{\min, \max}}(r)$ をそれぞれ用いればよい。

解析例として、Fig.1 に示した(a)の静定トラス構造物と(c)の不静定トラス構造物を選ぶことにする。このトラス構造物の斜材のみを崩壊要素とすれば、(a)は要素の数が4つの直列システムであり、(c)は要素の数が2つの並列システムを2個含む4つの崩壊モードを有する組み合わせシステムである。

システムは共通の製造・加工工程を経た要素で構築されるものと見なして、各要素耐力間の相関係数は等しいと仮定し、 $V_{R_i} = 0.15$ とした。荷重と応力を関係付ける係数は、Fig.1 に示した荷重に対して、(a)は左側の斜材から順に $c_1 = -2.12$, $c_2 = 0.59$, $c_3 = c_2$, $c_4 = c_1$ であり、(c)は、同様にして、 $c_{11} = -2.12$, $c_{21} = 0.59$, $c_{22} = -0.12$, $c_{31} = c_{21}$, $c_{32} = c_{22}$, $c_{41} = c_{11}$ である。要素の初期耐力の期待値は、上記の応力状態に対して各要素の信頼性指標値がすべて3 (崩壊確率は0.00135) になるように設定した。また、 $T = 50$ 年とした。

(a) 静定トラス構造物 (c) 不静定トラス構造物

Fig.1 トラス構造物の解析例

Fig.2 は(a)の直列システムの条件付危険率の期待値を図示したもので、左側の図は $V_W = 0.8, \nu = 1/3$ の場合であり、右側の図は $V_W = 0.4, \nu = 1/3$ の場合の図をそれぞれ表す。図中の直線は $\rho = 0$ であり、破線は $\rho = 0.8$ である。 $a = 0.0, 0.002, 0.004$ は耐力劣化の度合いを表す数値で、 $T = 50$ 年で要素の耐力劣化がそれぞれ0%, 10%, 20% を表す。Fig.2 の両図とも要素の耐力劣化と耐力間の相関係数の影響を大きく受ける。一般に、各要素耐力が統計的に独立な相関係数が0とき、システムの崩壊確率が最大になるから、条件付危険率の期待値も最大になり、相関係数の増大とともに小さくなって1のときに最小になる。Fig.2 の両図を比較すると、荷重の強さの変動係

数が小さい右側の図 ($V_W = 0.4$) の値が係数 a の増大とともに大きく上昇し、 $T = 50$ 年で左側の図 ($V_W = 0.8$) と比して約2.3倍という大きな値を示す。これは、各要素の信頼性指標値をすべて一定値 (ここでは3) として要素耐力の期待値を評価したため、荷重の強さの変動係数が小さい場合は要素耐力の期待値は小さくなる。そのため、耐力劣化により残存直列システムの耐力の密度関数が左側に移動することによる影響が大きくなったものと思われる。

Fig.3 は(c)の組み合わせシステムの条件付危険率の期待値を図示したもので、Fig.2 同様に、左側の図は $V_W = 0.8, \nu = 1/3$ の場合であり、右側の図は $V_W = 0.4, \nu = 1/3$ の場合の図をそれぞれ表す。Fig.2 同様に、荷重の強さの変動係数が小さい場合に大きな値を示しているが、この組み合わせシステムは2個の並列システムを含むため、耐力劣化が残存組み合わせシステムの耐力の密度関数に与える影響は多少小さくなり、Fig.2 と比べると値が小さくなったものと思われる。

Fig.2 と Fig.3 の耐力劣化がない $a = 0$ の場合の値が多少右下がりになっているが、これは時刻の経過とともに耐力の大きいシステムが生き残る非破壊効果によるものである。

Fig.4, 5 は(5-1)式の $T = 50$ 年でのシステムの崩壊確率に及ぼす相関係数の影響を図示した。それぞれ $V_W = 0.8$ と $V_W = 0.4$ の場合の図である。また、図中の直線は(a)の直列システムであり、破線は(c)の組み合わせシステムを表す。両図とも相関係数の減少とともに崩壊確率は凸の曲線で滑らかに増大し、 $\rho \leq 0.8$ の範囲ではほぼ直線的になり、 $\rho = 0$ のときにシステムの崩壊確率は最大になる。これらの図から、相関係数がそれぞれ0と1のときの崩壊確率の差の概ね半分ぐらいは相関係数が0.8より大きい領域で生じ、残りの半分は0.8より小さい領域で生じるのが分かる。

Fig.4 で示した $V_W = 0.8, \rho = 0.8$ の場合の組み合わせシステムの直列システムに対する崩壊確率の低下率は8.1% ($a = 0$), 8.1% ($a = 0.002$), 7.8% ($a = 0.004$) であり、また $\rho = 0$ の場合は17.4%, 16.9%, 16.3% それぞれ低下した。

Fig.5 に示した $V_W = 0.4, \rho = 0.8$ の場合の低下率は13.7% ($a = 0$), 13.0% ($a = 0.002$), 12.0% ($a = 0.004$) であり、また $\rho = 0$ の場合は27.4%, 26.1%, 24.4% それぞれ低下した。荷重の強さの変動係数が小さい場合により大きな差異を示しているが、これは、前述のように、要素の耐力の期待値が小さい場合の耐力劣化が残存直列システムの耐力の密度関数に及ぼす影響が、残存組み合わせシステムに比べて大きくなったためと思われる。これらの図から、両システムの崩壊確率の差異は相関係数が小さくなるにつれて大きくなり、相関係数の影響を大きく受けるのが分かる。

Fig.6, 7 は荷重の生起率と要素耐力間の相関係数が信頼度関数に及ぼす影響をそれぞれ図示したものである。Fig.6 は $\nu = 1/9$ の場合の図である。組み合わせシステムの直列システムに対する崩壊確率の低下率は、 $\rho = 0.8$ のとき、8.4% ($a = 0$), 8.2% ($a = 0.002$), 7.9% ($a = 0.004$) であり、 $\rho = 0$ のときは17.7%, 17.1%, 16.6% である。Fig.7 は $\nu = 1$ の場合の図で、 $\rho = 0.8$ のとき8.0%, 7.7%, 7.4% 低下し、 $\rho = 0$ のときは16.7%, 16.1%, 15.3% それぞれ低下した。全体的傾向としては、Fig.4 とあまり変わらない結果になった。

以上の図から、直列システムは供用期間中の要素の耐力劣化等により崩壊確率は大きく増大するが、並列システムを組み入れた組み合わせシステムにすることでシステムの崩壊確率をある程度抑えること

Fig.2 直列システムの条件付危険率の期待値 $\bar{\lambda}_s(t)$

Fig.3 組み合わせシステムの条件付危険率の期待値 $\bar{\lambda}_{sp}(t)$

Fig.4 システムの崩壊確率に及ぼす相関係数の影響

Fig.5 システムの崩壊確率に及ぼす相関係数の影響

Fig.6 システムの崩壊確率に及ぼす相関係数の影響

Fig.7 システムの崩壊確率に及ぼす相関係数の影響

が可能になるだろう。また、その効果は耐力劣化がある場合に大きくなる。

6. 結論

本稿を要約すると次のようになる。

(1) 直列システムに対しては(2-2)式の $R_{\min}$ 、並列システムに対しては(2-7)式の $R_{\max}$ および組み合わせシステムに対しては(2-11)式の $R_{\min, \max}$ のある時刻まで崩壊しなかったという条件下で定義される密度関数、すなわち、それぞれの残存システムの耐力の密度関数を導入することにより、時間依存型構造システムの信頼度関数の比較的簡便な解析的表現式が可能であることを示した。

(2) システムの信頼度関数は、荷重とシステムを構成する要素の統計量、要素耐力間の相関係数、および耐力劣化の度合いの影響を大きく受ける。システムの崩壊確率は、要素耐力間の相関係数の減少とともに凸の曲線で滑らかに増大し、 $\rho \leq 0.8$ の範囲ではほぼ直線的になり、 $\rho = 0$ のときに最大になる。直列システムは、供用期間中の要素の耐力劣化等によりシステムの崩壊確率は大きく増大するが、並列システムを組み入れた組み合わせシステムにすることでシステムの崩壊確率をある程度抑えることが可能であり、また、その効果は耐力劣化がある場合に大きくなる。

APPENDIX A

$$p_{R_{\min}}\left(r \mid n\Delta\tau\right)=\frac{p_{R_{\min}}\left(\frac{r}{\tilde{\varphi}}\right)\prod_{k=1}^n\left(1-\nu\bar{F}_W\left(\frac{r}{\tilde{\varphi}}\right)\Delta\tau\right)}{\int_0^{\infty}p_{R_{\min}}\left(\frac{r}{\tilde{\varphi}}\right)\prod_{k=1}^n\left(1-\nu\bar{F}_W\left(\frac{r}{\tilde{\varphi}}\right)\Delta\tau\right)dr} \quad (\text{A-1})$$

$$\text{ただし、} \quad \tilde{\varphi}=\prod_{i=1}^n\varphi_i, \quad \hat{\varphi}=\prod_{i=k}^n\varphi_i$$

上式中で、 $\tau=n\Delta\tau, u=k\Delta\tau, n \rightarrow \infty$ とすれば、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &\approx 1 + \int_0^{\tau} \dot{g}(u) du = g(\tau) \\ \hat{\varphi} &\approx 1 + \dot{g}(0)\Delta\tau + \dot{g}(\Delta\tau)\Delta\tau + \cdots + \dot{g}[(n-1)\Delta\tau]\Delta\tau \\ &\quad - \dot{g}(0)\Delta\tau - \dot{g}(\Delta\tau)\Delta\tau - \cdots - \dot{g}[(k-2)\Delta\tau]\Delta\tau \\ &= g(\tau) - \int_0^u \dot{g}(t) dt = g(\tau) - g(u) + 1 \end{aligned}$$

さらに、上式を用いると、次のようになる。

$$\prod_{k=1}^n \left[1 - \nu \bar{F}_W \left(\frac{r}{\tilde{\varphi}} \right) \Delta\tau \right] \approx \exp \left\{ -\nu \int_0^{\tau} \bar{F}_W \left(\frac{r}{g(\tau) - g(u) + 1} \right) du \right\}$$

APPENDIX B

$R_{\min}$ は下記の不等式の条件を満たす r の領域で表される。

$$\begin{aligned} F_{R_{\min}}(r) &= P_r[R_1 \leq c_1 r \cup R_2 \leq c_2 r \cup \cdots \cup R_m \leq c_m r] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} F_{R_i}(c_i r) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} F_{R_i, R_j}(c_i r, c_j r) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} F_{R_i, R_j, R_k}(c_i r, c_j r, c_k r) - \cdots \quad (\text{B-1}) \end{aligned}$$

相関係数が $\rho_{ij} = \rho$ で表される対数正規分布の場合、上式の耐力の結合確率分布関数は比較的簡単な式で表され、次式になる^{17), 18)}。

$$F_{R_i, R_j, \dots, R_m}(c_1 r, c_2 r, \dots, c_m r) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \prod_{i=1}^m \Phi[A_i] dx \quad (\text{B-2})$$

APPENDIX C

$R_{\max}$ は下記の条件を満たす r の領域で表される。

$$\begin{aligned} F_{R_{\max}}(r) &= P_r[R_1 \leq c_1 r \cap R_2 \leq c_2 r \cap \cdots \cap R_m \leq c_m r] \\ &= F_{R_1 R_2 \dots R_m}(c_1 r, c_2 r, \dots, c_m r) \quad (\text{C-1}) \end{aligned}$$

APPENDIX D

m 個の崩壊モードを有する並列システムが直列に連結されるから、(B-1)式の要素耐力の確率分布関数の代わりに崩壊モードを対象にした耐力の確率分布関数に置換すればよい。

$$\begin{aligned} F_{R_{\min, \max}}(r) &= \sum_{1 \leq j \leq m} F_{R_{\max, j}}(r) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} F_{R_{\max, i}, R_{\max, j}}(r, r) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} F_{R_{\max, i}, R_{\max, j}, R_{\max, k}}(r, r, r) - \cdots \quad (\text{D-1}) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} \quad F_{R_{\max, j}}(r) = F_{R_{j1} R_{j2} \dots R_{jn}}(c_{j1} r, c_{j2} r, \dots, c_{jn} r)$$

$$F_{R_{\max, i}, R_{\max, j}}(r, r) = F_{R_{i1} R_{i2} \dots R_{in} R_{j1} R_{j2} \dots R_{jn}}(c_{i1} r, \dots, c_{in} r, c_{j1} r, \dots, c_{jn} r)$$

参考文献

- 1) C.J.Turkstra: Theory of Structural Design Decision, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1970
- 2) 坂本 順: 限界状態設計法における荷重係数について、日本建築学会構造系論文報告集、No.393, 1988年11月
- 3) 河野 守、坂本 順: 荷重の組合せと荷重効果に関する考察、日本建築学会構造系論文報告集、No.415, 1990年9月
- 4) Alfred H.-S. Ang, Wilson H. Tang: 土木・建築のための確率・統計の応用、丸善株式会社
- 5) 小野 徹郎、井戸田 秀樹: 高次積率標準化手法の提案とそれに基づく信頼性指標の設定、日本建築学会構造系論文報告集、その1, 第359号, 1986年1月、その2、第365号, 1986年7月、その3, 第418号, 1990年12月
- 6) Terada, S. and Takahashi, T.: Simultaneous Failure Probability of Correlated Performance Function, Journal of Structural and Construction Engineering (Trans. of A.I.J.), No.359, 1986
- 7) Kameda, H. and T. Koike: Reliability theory of deteriorating structures, ASCE, Vol.101, No.ST1, Jan., 1975
- 8) 洪 起、高梨 晃一: 繰返し荷重を受ける構造物の信頼性理論、日本建築学会構造系論文報告集、第437号、1992年
- 9) 森 保宏: 耐力劣化する構造物の信頼性評価法: 日本建築学会構造系論文報告集、第465号、1994年11月
- 10) 洪 起: 強度劣化を受ける構造物の耐用年数中の崩壊確率について、日本建築学会構造系論文報告集、第512号、1998年10月
- 11) Ditlevsen, O.: Reexamination of convex polyhedron outcrossing problem, J. Engrg. Mech. ASCE, 120(3), pp654-660
- 12) Alfred M. Freudenthal, Jewell M. Garrelts, M. Shinozuka: The Analysis of Structural Safety, Journal of the Structural Division, Vol.92, Feb., 1966, pp267-323
- 13) Yasuhiro Mori, Bruce R. Ellingwood: Reliability-Based Assessment of Aging Concrete Structures, Journal of Structural Engineering, Vol.119, No.5, May, 1993, pp1600-1621
- 14) Yasuhiro Mori, Bruce R. Ellingwood: Maintaining Reliability of Concrete Structures. I: Role of Inspection/Repair, Journal of Structural Engineering, Vol.120, No.3, March, 1994, pp824-845, II: Optimum Inspection / Repair, Journal of Structural Engineering, Vol.120, No.3, March, 1994, pp846-862
- 15) Allen C. Estes, Dan M. Frangopol: Repair Optimization on Highway Bridges Using System Reliability Approach, Journal of Structural Engineering, Vol.125, No.7, July, 1999, pp766-775
- 16) Mark G. Stewart, Dimitri V. Val: Role of Load History in Reliability-Based Decision Analysis Aging Bridges, Journal of Structural Engineering, Vol.125, No.7, July, 1999, pp776-783
- 17) P. Thoft-Christensen and Yoshisada Morotsu: Application of Structural Systems Reliability Theory, Springer-Verlag
- 18) Gupta, S.S.: Probability Integrals of Multivariate Normal and Multivariate t, Annals of Math. Stat., Vol.34, No.3, September, 1963, pp792-824