最適性規準法を用いた位相最適化におけるフィルタリング法

FILTERING METHOD FOR TOPOLOGY OPTIMIZATION ANALYSIS USING OPTIMALITY CRITERIA METHOD

藤井大地*, 鈴木克幸**, 大坪英臣***

Daiji FUJII, Katsuyuki SUZUKI and Hideomi OHTSUBO

In the topology optimization analysis based on the homogenization design method or the density approach, the checkerboards, that is the formation of regions of alternating solid and void elements ordered in a checkerboard-like fashion, often appear in the optimum solutions. Therefore, the filtering method is necessary for these approaches. In this paper, we present an effective filtering method for the topology optimization analysis using the optimality criteria method as optimizer. In this method, the value of the gravity control function is controlled as a constrained condition. The gravity control function, which was presented by the author in the topology optimization analysis using the SLP method^{9),10)}, is defined from the relations of the density of an element with that of its neighbor elements. This function imposes the penalty in the checkerboards and the gray scale density, that is, if the function is high, the checkerboards and gray scales disappear in the optimum solution. In this paper, this filtering method is applied in the topology optimization using the homogenization design method and the density approach. Several examples of 2D and 3D problems are shown to demonstrated the effectiveness of the present method.

Keywords: *Filtering method, Topology optimization, Optimality criteria method, Homogenization method, Density approach*

フィルタリング法, 位相最適化, 最適性規準法, 均質化法, 密度法

1. はじめに

連続体の位相最適化技術は、機械分野においてはすでに実務レベルで利用され、部品の軽量化等で実績が得られつつある。建築分野においても、研究レベルでは、大森らによる GA を利用したトラス構造の位相最適化¹⁾、ESO 法による位相最適化^{2),3)}、本間らによるセル・オートマトンを利用した位相最適化^{4),5)}等の研究が行われている。一方、欧米では、Ramm と Maute らを中心にシェル構造の位相最適化⁶⁾、橋梁の位相最適化、鉄筋コンクリートの鉄筋の位相最適化等⁷⁾の現実的な問題への適用が試みられている。これらの研究の多くは、部材の断面設計を中心とするいわゆる構造設計よりも設計の第一段階であるコンセプトデザインへの利用を目指すものであり、このような技術が建築デザインの新しいツールとなる可能性を秘めている。

このような背景のもとで、著者らもグランドストラクチャー法による骨組構造の位相最適化⁸⁾、均質化設計法による板・シェル構造の位相最適化^{9),10),11)}、密度法による 3 次元構造の位相最適化手法¹²⁾を示し、これらの手法をもとに建築デザインに利用できる位相最適化ツールの開発を目指している。

ところで、このような手法をツール化する上で問題となるのが、

数学的な最適解が必ずしも設計者が期待するようなシンプルで明解な位相とはならないという点である。また、連続体の位相最適化では、ソリッド要素と空隙要素がチェッカーボードのように交互に並ぶ数値的不安定現象が多く見られ、実際にどのように構造物の境界を定めるべきかを判断しにくい場合が多い。このような問題を解決する方法としては、一つには、Maute and Ramm ら¹³⁾が提案しているように、均質化設計法と同様の手法で位相を求め、それにもとづいて有限要素メッシュを再分割し、さらに位相を求めるというようなことを繰り返すアダプティブ法的な手法が考えられる。このようにして得られた位相は滑らかな境界を持ち非常に明解なものとなっているが、計算コストと開発コストがかかりすぎるという問題がある。他の方法としては、均質化設計法や密度法による位相最適化手法にフィルタリング法を組み合わせることが考えられる。このようなフィルタリング法に関しては文献 14) に整理されており、著者らも文献 9),10) に新しいフィルタリング法を提案している。

著者らが提案したフィルタリング法は、一つの要素の周辺の密度に注目し、その要素が中実であれば周辺に中実要素が、その要素が空隙であれば周辺に空隙が集中するような関数を定義する。

* 東京大学工学系研究科 助手・博士(工学)

** 東京大学新領域創成科学研究科 助教授・Ph. D.

*** 東京大学工学系研究科 教授・工博

Research Assoc., Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Dr. Eng.

Assoc. Prof., Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, Ph. D. Prof., Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Dr. Eng.

そして、この関数をすべての要素について加えた関数（重力制御関数）を制御することで、チェッカーボードのない明解な位相を求める方法である。文献9),10)では、2次元問題の均質化設計法で、この方法とSLP法を組み合わせる手法を示し良好な結果を得ている。しかしながら、制約条件が質量のみの剛性最大化問題では、SLP法よりも最適性規準法（Optimality criteria method）の方が計算効率上有利である。したがって、本方法と最適性規準法との組み合わせを検討する必要がある。また、このフィルタリング法を3次元問題に適用した場合の効果についても検討する必要がある。

そこで、本論文では、重力制御関数値を制約条件とする位相最適化問題を最適性規準法を用いて解く方法を示し、このような方法により、2次元および3次元問題において、チェッカーボード状の密度分布がなく、設計者に明確な情報を与える位相が求められることを示す。2次元問題の位相最適化手法としては、設計領域を多孔質材料とし、材料のマイクロ構造の穴の大きさと角度を設計変数とする均質化設計法^{9),10),15),16)}を用いる。3次元問題では、計算効率上の理由から均質化設計法を簡略化し、各要素の弾性定数を要素密度のべき乗関数に比例すると仮定する密度法^{12),17),18),19)}を用いる。なお、文献12)においても最適性規準法を用いているが、この場合は重力制御関数を文献9),10)と同様に目的関数に付加した形で用いており、本論文に示す方法とその点で異なる。

以下、本論文第2章では、均質化設計法による2次元構造物の位相最適化問題を、重力制御関数値を制約条件として最適性規準法で解く方法を示す。第3章では、密度法による3次元の位相最適化問題を同様な方法で解く方法を示す。第4章では、第2章、第3章で示した方法の有効性を2次元および3次元の解析例題で示す。第5章では以上のまとめを述べる。

2. 均質化設計法による2次元問題の位相最適化

2.1 最適化問題の定式化

均質化設計法では、図1に示すように設計領域を有限要素分割し、各要素の材料が、異なる長方形の穴を有するセルが周期的に並ぶマイクロ構造を有するものとする。そして、各要素のマイクロ構造の穴の大きさ a, b と角度 θ を設計変数として、材料の必要などころでは穴が小さく、必要でないところでは穴が大きくなることを利用して構造物の最適位相を求める。剛性の最大化を目的とする場合の本方法の最適化問題は次式のように定式化される^{9),16)}。

$$\min_{\alpha \in L} [\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}] \quad (1)$$

$$L = \left\{ \alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, 2N), \sum_{i=1}^N (1 - a_i b_i) \leq m_s \right\}$$

ここに、 α は設計変数 $\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$ で、 a_i, b_i は i 番目要素のマイクロ構造の穴の大きさを表し、 N は有限要素数である。なお、マイクロ構造の穴の角度は各要素の応力の主軸方向に向けるものとして設計変数からは除外する¹⁶⁾。また、(1)式の $\mathbf{d}$ は節点変位ベクトル、 $\mathbf{K}$ は全体剛性マトリックス、 L は与えられた条件を満たす許容設計変数の集合、 m_s は質量（ここでは総密度比）の制約値である。なお、(1)式の $\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}$ は外力の仕事量である平均コンプライアンスを示しており、次式のように表しておく。

$$C(\alpha) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (2)$$

(1)式を解いて得られる最適位相では位相の境界がはっきりしない

場合が多いため、位相境界をはっきりさせる働きを持つ次式の重力制御関数を定義する^{9),10)}。

$$G(\alpha) = \sum_{i=1}^N g_i(\alpha) / \sum_{i=1}^N m_i \quad (3)$$

ここに、

$$g_i = \sum_{j=1}^{m_i} [\rho_i \rho_j + (1 - \rho_i)(1 - \rho_j)] \quad (4)$$

ただし、 $\rho_i = 1 - a_i b_i$ であり、 m_i は i 番目の要素と辺を共有する要素で、内部の要素では4、端や隅の要素ではそれ以下となる。また、(3)式の G は、 $0 < G \leq 1$ となる。

図1 均質化設計法による位相最適化

図2は、密度比 ρ が1, 0.5, 0となる場合について、(4)式の関数 g_i の値を示したものである。図からわかるように、この関数値は、 i 番目要素が黒で周辺要素が白の場合、または i 番目要素が白で周辺要素が黒の場合が最も低い値となる。チェッカーボード状の解はこのパターンに相当するので、この関数値が高くなればチェッカーボードは防げる。また、この関数の特徴として、グレースケール（密度比が0.5の場合）にもペナルティーが課され、すべてグレーの値は、すべて黒またはすべて白よりも低い値となる。したがって、(3)式の関数値が高くなれば、チェッカーボード状の密度分布が少なくしかも白黒のはっきりした位相が得られる。

図2 i 番目要素とその近隣要素の密度比と関数 g_i の関係

そこで、ここでは、(3)式の G を与えられた値以上にする制約を課すことにする。この場合、(1)式は次のように書ける。

$$\min_{\alpha \in L} [C(\alpha)]$$

$$L = \left\{ \alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, 2N), \quad \sum_{i=1}^N (1-a_i b_i) \leq m_s, \quad G \geq \bar{G} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $\bar{G}$ は重力制御関数の制約値で、 $0 \leq \bar{G} \leq 1$ の範囲で与える。

2.2 最適性規準法による解法

(5)式の問題を最適性規準法によって解く¹⁶⁾。最適性規準法では、(5)式の問題を解くために次式の Lagrangian を定義する。

$$L(\alpha) = C(\alpha) - \lambda \left(\sum_{i=1}^N (1-a_i b_i) - m_s \right) - \lambda_g (\bar{G} - G(\alpha)) \quad (6)$$

ただし、 λ, λ_g はラグランジュ乗数 ($\lambda \geq 0, \lambda_g \leq 0$) であり、ラグランジュ乗数がかかる項は制約条件を満足すれば負になる。そして、(6)式を設計変数とラグランジュ乗数に関して変分をとることにより、最適性規準を求める。この場合は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta L(\alpha) = & \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i} + b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g \right) \delta a_i \\ & + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial C(\alpha)}{\partial b_i} + a_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial b_i} \lambda_g \right) \delta b_i \\ & - \left(\sum_{i=1}^N (1-a_i b_i) - m_s \right) \delta \lambda - (\bar{G} - G(\alpha)) \delta \lambda_g = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式は(6)式の最小化の条件である。(7)式より、 $\delta a_i, \delta b_i$ ($i=1, \dots, N$)、 $\delta \lambda, \delta \lambda_g$ の任意性から次式が成り立つ。

$$-\frac{b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i}} = 1 \quad -\frac{a_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial b_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial b_i}} = 1 \quad (8), (9)$$

$$\frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1-a_i b_i) = 1 \quad \frac{\bar{G}}{G(\alpha)} = 1 \quad (10), (11)$$

(8)式より次のような関係式を作ることができる。

$$-\frac{b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i}} = 1 \Rightarrow -\frac{b_i \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial a_i} \lambda_g}{\frac{\partial C(\alpha)}{\partial a_i}} = \frac{a_i}{a_i} \quad (12)$$

$$\Rightarrow a_i^{(k+1)} = \left[\frac{b_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^\beta a_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, N)$$

ここに、 β は設計変数の更新幅を制御するべき乗係数である。(12)式と同様の操作により、次式のような関係式が得られる。

$$b_i^{(k+1)} = \left[\frac{a_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^\beta b_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, N) \quad (13)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \left[\frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1-a_i^{(k)} b_i^{(k)}) \right]^\beta \lambda^{(k)} \quad (14)$$

$$\lambda_g^{(k+1)} = \left[\frac{\bar{G}}{G(\alpha^{(k)})} \right]^\beta \lambda_g^{(k)} \quad (15)$$

ただし、 $a_i, b_i, \lambda, \lambda_g$ には次式の制約条件があるので、

$$0 \leq a_i \leq 1, \quad 0 \leq b_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda_g \leq 0 \quad (16)$$

(12)~(15)式より、次式の最適性条件が得られる。

$$a_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \{0, s_{ai}^{(k)}\}, 1 \right\} \quad (17)$$

$$b_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \{0, s_{bi}^{(k)}\}, 1 \right\} \quad (18)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[\frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1-a_i^{(k)} b_i^{(k)}) \right]^\beta \lambda^{(k)} \right\} \quad (19)$$

$$\lambda_g^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[\frac{\bar{G}}{G(\alpha^{(k)})} \right]^\beta \lambda_g^{(k)} \right\} \quad (20)$$

ここに、

$$s_{ai}^{(k)} = \left[\frac{b_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^\beta a_i^{(k)} \quad (21)$$

$$s_{bi}^{(k)} = \left[\frac{a_i^{(k)} \lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^\beta b_i^{(k)} \quad (22)$$

(17),(18)式には、さらに設計変数の変動幅の制約 (move limit) を課す。この変動幅の制約は次のように書ける¹⁶⁾。

$$a_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max \{(1-\zeta) a_i^{(k)}, 0\} & \text{if } s_{ai}^{(k)} \leq \max \{(1-\zeta) a_i^{(k)}, 0\} \\ s_{ai}^{(k)} & \text{if } \max \{(1-\zeta) a_i^{(k)}, 0\} \leq s_{ai}^{(k)} \leq \min \{(1+\zeta) a_i^{(k)}, 1\} \\ \min \{(1+\zeta) a_i^{(k)}, 1\} & \text{if } \min \{(1+\zeta) a_i^{(k)}, 1\} \leq s_{ai}^{(k)} \end{cases} \quad (23)$$

$$b_i^{(k+1)} = \begin{cases} \max \{(1-\zeta) b_i^{(k)}, 0\} & \text{if } s_{bi}^{(k)} \leq \max \{(1-\zeta) b_i^{(k)}, 0\} \\ s_{bi}^{(k)} & \text{if } \max \{(1-\zeta) b_i^{(k)}, 0\} \leq s_{bi}^{(k)} \leq \min \{(1+\zeta) b_i^{(k)}, 1\} \\ \min \{(1+\zeta) b_i^{(k)}, 1\} & \text{if } \min \{(1+\zeta) b_i^{(k)}, 1\} \leq s_{bi}^{(k)} \end{cases} \quad (24)$$

ここに、 ζ は変動幅の制約値 (move limit) である。

さらに、 λ, λ_g は最適化繰返し計算の各ステップの内側のループでも収束計算を行う¹⁶⁾。すなわち、次式

$$s_{ai}^{(k+1)} = \left[\frac{b_i^{(k)} \lambda^{(k+1)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}} \lambda_g^{(k+1)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial a_i^{(k)}}} \right]^\beta a_i^{(k)} \quad (25)$$

$$s_{bi}^{(k+1)} = \left[\frac{a_i^{(k)} \lambda^{(k+1)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}} \lambda_g^{(k+1)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial b_i^{(k)}}} \right]^\beta b_i^{(k)} \quad (26)$$

から、(23),(24)式により設計変数を更新し、これから(19),(20)式により λ, λ_g を再度更新する。これを(25),(26)式に代入し、(23),(24)式によりまた設計変数を更新するというようなループを繰り返す。ただしこの間(25),(26)式の $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}$ は更新しない。

以上の計算の流れをまとめると、(23),(24)式で前ステップの解から設計変数の値を更新し、これから(19),(20)式によってラグランジュ未定係数を更新する。そして、(25),(26)式を用いた内側のループにより、制約条件を満足するようにさらに設計変数の更新を行う。これを次ステップの設計変数として、平均コンプライアンス、質量(総密度比)を計算し、感度係数を求め、再び(23),(24)式によって設計変数を更新する。このような手続きを与えられたステップ数まで繰り返す。

なお、(21)式中の平均コンプライアンス C の設計変数 a_i に関する感度係数は次式のようにして求められる。

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = \frac{\partial(\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d})}{\partial a_i} = \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \mathbf{d} - 2 \mathbf{d}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial a_i} \quad (27)$$

ただし、変位ベクトル $\mathbf{d}$ は次式の剛性方程式

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (28)$$

解であるから、(28)式の両辺を設計変数 a_i で偏微分すると、

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial a_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \mathbf{d} \quad (29)$$

となるので、これを(27)式に代入すると次式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = - \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \mathbf{d} = - \mathbf{d}^{eiT} \frac{\partial \mathbf{K}^{ei}}{\partial a_i} \mathbf{d}^{ei} = - \mathbf{d}^{eiT} \left(\int_{\Omega^{ei}} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial a_i} \mathbf{B} d\Omega^{ei} \right) \mathbf{d}^{ei} \quad (30)$$

ここに、 $\mathbf{K}^{ei}$, $\mathbf{d}^{ei}$ は i 番目要素の要素剛性マトリックスと節点変位ベクトル、 $\mathbf{B}$ は i 番目要素のひずみ-変位関係マトリックス、 $\mathbf{D}^H$ は均質化法によって求められる均質化弾性マトリックス、 Ω^{ei} は i 番目要素の領域を表す。なお、 $\mathbf{D}^H$ に関してはマイクロ構造の穴の大きさ a, b に関するデータベースをあらかじめ作成しておき、設計変数に対する感度係数はその補間関数を微分することによって求める。なお、本論文では文献 9) と同じデータベースを用いる (a, b に関して 51×51 点の $\mathbf{D}^H$ を計算したデータベース)。

3. 密度法による3次元問題の位相最適化

3.1 最適化問題の定式化

密度法^{(12),(17),(18),(19)}は、材料の弾性剛性が密度比のべき乗に比例すると仮定し、図3に示すように各有限要素の密度比を設計変数として最適位相を求める方法である。これは、均質化設計法の穴の大きさを $a=b$ として材料の等方性を仮定したものに対応する。

図3 密度法による位相最適化

(5)式と同様に、密度法による構造物の位相最適化問題は次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} \min_{\rho} [C(\rho)], \quad C(\rho) &= \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \mathbf{L} &= \left\{ \rho \mid 0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \sum_{i=1}^N \rho_i \leq m_s, G(\rho) \geq \bar{G} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

ここに、 ρ は各要素の密度比 $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$ で、その他の変数は(5)式と同じである。ただし密度法では、全体剛性マトリックス $\mathbf{K}$ は、要素密度比の関数として次のように表される。

$$\mathbf{K}(\rho) = \sum_{i=1}^N \left(\rho_i^p \mathbf{K}^{ei} \right) \quad (32)$$

ここに、 A は要素剛性マトリックスの重ね合わせを表す記号、 $\mathbf{K}^{ei}$ は i 番目要素の剛性マトリックスである。また、 p はべき乗係数で、本論文では文献 19) にしたがって $p=2$ とする。また、重力制御関数 G は(3)式と同様に次式で定義される。

$$G(\rho) = \sum_{i=1}^N g_i(\rho) / \sum_{i=1}^N m_i \quad (33)$$

ここに、 g_i の定義は(4)式と同じであるが、 m_i は i 番目の要素と面を共有する要素で、内部の要素では 6、端や隅の要素ではそれ以下となる。

3.2 最適性規準法による解法

(31)式を最適性規準法によって解く。まず、設計変数を次式のように ρ から $\alpha (=1-\rho)$ に変更する。

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} [C(\alpha)], \quad C(\alpha) &= \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \mathbf{L} &= \left\{ \alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \sum_{i=1}^N (1-\alpha_i) \leq m_s, G(\alpha) \geq \bar{G} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、 $\rho_i = (1-\alpha_i)$, $i=1, \dots, N$ である。このような変更により、(34)式は(5)式の穴の寸法を等しくして、この穴の寸法を設計変数にすることに対応する (ただし、均質化法では、弾性定数は密度のべき乗関数にはならない)。最適性規準法の場合、重力制御関数の制約との関係から設計変数をこのように設定する方がフィルタリングの効率が良い。

(34)式の Lagrangian は次式となる。

$$L(\alpha) = C(\alpha) - \lambda \left(\sum_{i=1}^N (1-\alpha_i) - m_s \right) - \lambda_g (\bar{G} - G(\alpha)) \quad (35)$$

次に、(35)式を設計変数とラグランジュ乗数に関して変分をとることにより、

$$\begin{aligned} \delta L(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial C(\alpha)}{\partial \alpha_i} + \lambda + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha_i} \lambda_g \right) \delta \alpha_i \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^N (1-\alpha_i) - m_s \right) \delta \lambda - (\bar{G} - G(\alpha)) \delta \lambda_g = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

(12)式と同様に、(36)式の $\delta \alpha_i$ ($i=1, \dots, N$), $\delta \lambda$, $\delta \lambda_g$ の任意性から次式の最適性規準を作ることができる。

$$\alpha_i^{(k+1)} = \left[\frac{\lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}} \lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}}} \right]^\beta \alpha_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, N) \quad (37)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \left[\frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1-\alpha_i^{(k)}) \right]^\beta \lambda^{(k)}, \quad \lambda_g^{(k+1)} = \left[\frac{\bar{G}}{G(\alpha^{(k)})} \right]^\beta \lambda_g^{(k)} \quad (38), (39)$$

また, $\alpha_i, \Lambda, \Lambda_g$ には次式の制約条件

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, N), \quad \Lambda \leq 0, \quad \Lambda_g \leq 0 \quad (40)$$

があるので, (37)~(39)式より次式の最適性規準が得られる。

$$\alpha_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \left\{ 0, s_i^{(k)} \right\}, 1 \right\} \quad (41)$$

$$\Lambda^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[\frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i^{(k)}) \right]^\beta \Lambda^{(k)} \right\} \quad (42)$$

$$\Lambda_g^{(k+1)} = \min \left\{ 0, \left[\frac{\bar{G}}{G(\alpha^{(k)})} \right]^\beta \Lambda_g^{(k)} \right\} \quad (43)$$

ここに,

$$s_i^{(k)} = \left[\frac{\Lambda^{(k)} + \frac{\partial G(\alpha^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}} \Lambda_g^{(k)}}{\frac{\partial C(\alpha^{(k)})}{\partial \alpha_i^{(k)}}} \right]^\beta \alpha_i^{(k)} \quad (44)$$

均質化設計法の場合と同様に, (41)式には, 設計変数の変動幅の制約を課す。また, Λ, Λ_g は最適化繰返し計算の各ステップの内側のループでも収束計算を行う。

なお, 平均コンプライアンス C の設計変数 α_i に関する感度係数は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} &= -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i} \mathbf{d} = -\mathbf{d}^{eiT} \frac{\partial \left((1 - \alpha_i)^p \mathbf{K}^{ei} \right)}{\partial \alpha_i} \mathbf{d}^{ei} \\ &= \mathbf{d}^{eiT} \left(p(1 - \alpha_i)^{p-1} \mathbf{K}^{ei} \right) \mathbf{d}^{ei} \end{aligned} \quad (45)$$

4. 解析例

4.1 パラメータの設定

最適性規準法では, 以下のパラメータの設定が必要である。

- 1) (19)-(22),(42)-(44)式のべき乗係数 β
- 2) 設計変数の変動幅の制約値 (move limit) ζ
- 3) 感度係数を更新する外側ループの繰返し回数
- 4) 感度係数を更新しない内側ループの繰返し回数

以上のパラメータを決定するために, 4.2 節に示す例題で数値実験を行った。まず, 1)と2)の β, ζ は, いずれも設計変数の変動幅を制約するものである。4.2 節に示すフィルタリングを除いた例題で調査した結果, move limit を設けない場合は β が 0.25 以下で妥当な解が得られることがわかった。そこで, β は 0.25 に設定し, ζ に関して調査したところ同じ例題では 0.1 の近傍で最小の平均コンプライアンスが得られた。そこで, ここでは $\zeta = 0.1$ に設定した。次に, 3)の感度係数を更新する外側のループの繰返し回数は, 30 回程度で平均コンプライアンスの値がほぼ一定になる。しかし, この段階では設計変数等は(8)-(11)の最適性規準を満足していないため, ここから move limit ζ を $\zeta^{(k+1)} = \zeta^{(k)} / 1.1^{(k-29)}$ ($k=30, 31, \dots$) として絞り込みトータル 40 回まで繰返すこととした。また, 感度係数の計算をしない内側のループは, 100 回程度で質量制約がアクティブになる (制約値に等しくなる)。しかしながら, 重力制御関数値を各ステップでアクティブにすると, この制約が敏感に効きすぎて, 最適解から大きく外れてしまう。したがって, Λ_g の更新は質量制約に比較して少なくする必要がある。そこで, 本プ

ログラムでは, Λ に関する更新は 100 回, Λ_g に関する更新は 5 回に設定した。

4.2 均質化設計法による解析例

均質化設計法におけるフィルタリングの効果を示すために 2 次元問題の解析例を示す。有限要素としては, せん断剛性に関して低減積分を行った 4 節点アイソパラメトリック要素を用いる。

まず, 既往の文献によく引用されている 図 4 に示すような MBB はり^{9),18)}の解析例を示す。解析は対称性を利用して 1/2 領域で行い, 有限要素分割は, この領域で 75×25 とした。総密度比の制約値は $m_s/N = 0.5$ (全密度比を 1 とした場合の 50%) とした。なお, 弾性マトリックスは平面応力問題のものを用いている。

図 4 MBB はりモデルのトポロジー解析領域

図 5 は, フィルタリングの効果を示すために, 重力制御関数の制約値 $\bar{G}$ を変化させた場合の結果を示している。図中の G は最適解における重力制御関数値, $\bar{m}$ は最適解における総密度比の比率,

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i b_i)}{N} \quad (46)$$

である。また, C/C_0 は, フィルタリングをかけた場合の平均コンプライアンス値を, $\bar{G} = 0$ の場合の平均コンプライアンス値 C_0 との比で示したものである。なお, 図ではグレースケールのフィルタリング効果も示すため, 密度比のしきい値を 0.1 とし, それ以下の要素は除いている。図からわかるように, 重力制御関数値を制約しない場合 ($\bar{G} = 0$) は, チェッカーボード状の密度分布が現れ, どこをどうつなげばよいかははっきりしない。これに対して, 制御関数の制約値が 0.8 以上の場合には非常にはっきりした位相が得られ, 設計者に明確な情報を与えることができる。また, 制約値が 0.8 以上では, 平均コンプライアンス値が徐々に高くなり最適解からは外れるが, 構造のシンプルさが要求され, どこかの部材を省く必要がある場合には, このような位相が利用できる。なお, 図 5(c) ($\bar{G} = 0.85$) で, (b)の解 ($G = 0.87$) が得られないのは, 局所解に収束しているためと考えられる。

図 6 は $\bar{m}_s (= m_s/N)$ を 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 に変化させた場合の解析結果 (全体図) を示している。ただし, 重力制御関数の制約値 $\bar{G}$ は, 解の平均コンプライアンス値が, 制約しない場合と比較して大きく変化しない範囲で定めている。また, 図では, 密度比のしきい値は 0.3 とし, それ以下の要素は除いている (実用的にはこの程度のしきい値を設定すればよい)。図からわかるように, どの $\bar{m}_s$ に対しても非常に明解な位相が得られており, 本論文で示したフィルタリング法が有効であることがわかる。なお, 重力制御関数の制約値は, まず, 制約なしの場合を計算し, それから 0.05~0.1 程度上げた値で制約すれば, 平均コンプライアンス値を大きく上げることなく, しかも鮮明な位相が得られる。

(a) $\bar{G}=0$, $G=0.73$, $\bar{m}=0.50$ (b) $\bar{G}=0.8$, $G=0.87$, $\bar{m}=0.50$, $C/C_0=1.02$ (c) $\bar{G}=0.85$, $G=0.89$, $\bar{m}=0.50$, $C/C_0=1.08$ (d) $\bar{G}=0.90$, $G=0.90$, $\bar{m}=0.50$, $C/C_0=1.18$ 図5 MBB はりの最適位相 ($\bar{G}$ を変化させた場合) (a) $\bar{m}_s=0.3$, $\bar{m}=0.30$, $\bar{G}=0.85$, $G=0.85$, $C/C_0=1.05$ (b) $\bar{m}_s=0.4$, $\bar{m}=0.40$, $\bar{G}=0.85$, $G=0.87$, $C/C_0=1.08$ (c) $\bar{m}_s=0.5$, $\bar{m}=0.50$, $\bar{G}=0.85$, $G=0.89$, $C/C_0=1.08$ (d) $\bar{m}_s=0.6$, $\bar{m}=0.60$, $\bar{G}=0.8$, $G=0.89$, $C/C_0=1.03$ 図6 MBB はりの最適位相 ($\bar{m}_s$ を変化させた場合)

4.3 密度法による解析例

次に、密度法におけるフィルタリングの効果を示す。密度法に

よる位相最適化に用いる有限要素としては、関口と菊池²⁰⁾が提案している応力仮定法にもとづく8節点長方柱要素を採用する¹²⁾。また、本プログラムでは大規模計算が可能となるように連立方程式の解法としてElement-by-Element法にもとづく前処理付共役勾配法²¹⁾を用いている。この方法では、通常のパソコンのメモリ256Mbyte内で、50万要素程度までの解析が可能である¹²⁾。なお、密度法では、要素形状が等しい場合、要素剛性マトリックスの再計算の必要がなく、共役勾配法の計算効率が非常に良い。

まず、4.2節に示したMBBはりの例題をソリッド要素で解析した例を示す。要素分割数は $75 \times 25 \times 1$ とし、総密度比の制約値は $\bar{m}_s=0.5$ としている。図7は、フィルタリングの効果を示すために、重力制御関数の制約値 $\bar{G}$ を変化させた場合の結果を示している。なお、3次元問題の位相表示は複雑であるため、ここでは、Open-GLを用いて作成したグラフィックスソフトにより結果を表示している。このためグレースケールの表示はしていない。また、密度比のしきい値は0.3としている。図からわかるようフィルタリングをかけない場合($\bar{G}=0$)は、均質化設計法による解よりもさらに顕著にチェッカーボード状の密度分布が現れる。しかし、 $\bar{G}$ が、0.75の場合は図5(b)と、0.8の場合は図5(c)、(d)と類似した位相が得られている。また、総密度比 $\bar{m}$ はすべての場合で制約値に一致している。

(a) $\bar{G}=0$, $G=0.61$, $\bar{m}=0.50$ (b) $\bar{G}=0.75$, $G=0.84$, $\bar{m}=0.50$, $C/C_0=1.04$ (c) $\bar{G}=0.8$, $G=0.88$, $\bar{m}=0.50$, $C/C_0=1.21$

図7 密度法によるMBB はりの解析結果

図8は $\bar{m}_s (= m_s / N)$ を0.3, 0.4, 0.5, 0.6に変化させた場合の解析結果(全体図)を示している。ただし、重力制御関数の制約値 $\bar{G}$ は、チェッカーボード分布がほぼ消える値に設定している。また、図では、密度比のしきい値は0.3とし、それ以下の要素は除いている。図において、 $\bar{m}_s=0.3$ の場合で、 $\bar{G}$ と C/C_0 の値が大きくなっているのは、総密度比が小さい問題では、チェッカーボード状の複数の要素で面的に(薄板として)剛性を高める方が構造上

有利になるため、接合部付近のチェッカーボードが消えにくいことに起因する。図より、図 6 の均質化設計法の結果に比較すると形態変化の自由度の点で劣るが、フィルタリングの効果により密度法においてもそれなりに明確な位相が得られることがわかる。

図 8 密度法による MBB はりの最適位相 ($\bar{m}_s$ を変化させた場合)

4.4 コンクリートラーメンの解析例

建築的な例題として、1 層コンクリートラーメンを想定した例題を解析する。設計領域は図 9 に示すものとし、荷重は鉛直等分布荷重と鉛直荷重の 0.2 倍の水平等分布荷重を加える。底面の支持部は、柱脚に相当する部分 (50cm×50cm) のみを完全固定とする。また、図の梁部分 (50cm×50cm) の設計は固定し、梁を除いた部分を設計対象とする。設計領域の寸法は図中に示すように、アスペクト比を変化させた 3 種の場合について解析する。材料はコンクリートとし、ヤング係数は 20.6GPa、ポアソン比は 1/6 としている。解析は密度法による 3 次元解析法によって行い、それぞれの場合の有限要素分割数は、Case1 が 60×5×40、Case 2 が 40×5×40、Case 3 が 40×5×60 とする。また、総密度比の制約値 $\bar{m}_s$ は 0.2 に設定する。なお、本例題は応力分布が非対称となるため、プログラム内で設計変数を設計領域中心の xz 面に対して対称となるように設定している。

重力制御関数の制約値に関しては、0.8 から 0.1 ずつ順に上げて調査した結果、制約値 0.8 および 0.9 では、指定した制約値を満足せず、最終解にチェッカーボード分布が見られた。これは、この問題の場合、荷重が分布荷重であるため、構造的に面 (板) 構造が現れやすいことが原因と考えられる。この対策としては、 Λ_g に関する内側ループの繰り返し回数を増やすことと、重力制御関数の制約の影響を高めるため制約値をさらに上げることが考えられる。しかし、内側ループの繰り返し回数を増やすと総密度の制約が満足されなくなるため、ここでは、後者の方法を採用し、重力制御関数値を、実際には制約が満足されない 1.1 に設定した。

図 10,11,12 は、Case1～Case3 について、以上の設定にしたがって解析した結果を、2 次元図と透視図で示している。なお、密度比のしきい値は 0.3 としている。これらの図からわかるように、チェッカーボード分布が一部残っているものもあるが、重力制御関数値の制約値を高め設定することで、設計者に明解な情報を与えることのできる位相が求まっている。なお、図には最適解の総密度比と重力制御関数値が示されているが、総密度比はほぼ制約値と一致しており、質量制約は乱されていないことがわかる。

図 9 コンクリートラーメン構造を想定した設計領域

図 10 コンクリートラーメンの最適位相 (Case1)

図 11 コンクリートラーメンの最適位相 (Case2)

図 12 コンクリートラーメンの最適位相 (Case3)

5. まとめ

本論文では、均質化設計法および密度法によって定式化された位相最適化問題を最適性規準法を用いて解く場合に有効となるフィルタリング法の提案を行った。本フィルタリング法は、要素の周辺にソリッドまたは空隙を集中させる重力制御関数を最適化問題の制約条件として制御するものであり、最適解に頻繁に現れるチェッカーボード状の密度分布を防ぎ、よりシンプルで明解な位相を求めることができる。

本方法の有効性を MBB はりの例題を解析することによって検討した結果、均質化設計法による 2 次元解析では、重力制御関数値を制約することでチェッカーボード状の密度分布が消え、さらにその制約値を高くすることによって、よりシンプルな形態が得られることがわかった。また、密度法による 3 次元解析においても、フィルタリングの効果は均質化設計法の場合と同様に有効であることがわかった。

次に、密度法による解法を利用して、コンクリートラーメンを想定した例題を解析した結果、分布荷重を受ける例題では、チェッカーボード状の密度分布が現れやすく、重力制御関数値の制約と総密度比の制約を同時に満足する解が得られなかった。しかし、このような場合でも、重力制御関数値を 1 以上の高い値に設定することで、チェッカーボード状の密度分布が少ない明解な位相を得ることができた。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、平成 12 年度科学研究費（基盤研究(c)(2)）の補助を受けた。関くいと石井恵三氏、江島晋氏より貴重な助言を頂いた。また、東京大学工学部船舶海洋工学科卒業生小玉浩平君に 3 次元位相を表示するプログラムを作成して頂いた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 大森博司, 鬼頭伸彰: 遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造物の形態創出, 日本建築学会構造系論文集, No.520, pp.85-, 1999.6
- 2) 鈴木謙仁, 大森博司, 張奕: ESO 法による構造物最適化問題の解析 (その 1: 応力を基準とした場合), 日本建築学会大会梗概集, B-1 分冊, pp.387-388, 1999
- 3) 張奕, 大森博司, 鈴木謙仁: ESO 法による構造物最適化問題の解析 (その 2: 変位制限下における解析), 日本建築学会大会梗概集, B-1 分冊, pp.389-340, 1999

- 4) 本間俊雄, 登坂宣好, 角 広幸: 自律分散アプローチによる逆問題の計算法—自律分散有限要素法の提案と応用—, 日本建築学会構造系論文集 No.526, pp.69-76, 1999.12
- 5) 本間俊雄, 登坂宣好: セル・オートマトンの節点近傍モデルを用いたトポロジー最適化, 計算工学講演会論文集, Vol.5, pp.441-444, 2000
- 6) K. Maute and E. Ramm: Adaptive Topology Optimization of Shell Structures, AIAA Journal, Vol.35, No.11, 1997
- 7) E. Ramm, K. Maute, S. Schwarz: Conceptual design by structural optimization. In: R. de Borst, N. Bicanic, G. Meckhe (eds) Conference Proceedings of EURO-C 1998, Badgastein, Austria, pp.879-896, Balkema, Rotterdam, 1998
- 8) 藤井大地, 松本慎也, 藤谷義信, 菊池昇: グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造工学論文集, Vol.46B, pp.1-8, 2000
- 9) 藤井大地, 菊池昇: SLP 法を用いたトポロジー最適化における数値的不安定の改善, 日本建築学会構造系論文集, No.521, pp.65-72, 1999.7
- 10) D. Fujii, N. Kikuchi: Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the SLP method, Structural Optimization, Vol.19, pp.113-121, 2000
- 11) 藤井大地, 菊池昇: 均質化法によるシェル構造の形状とトポロジーの同時最適化, 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.383-384, 1999
- 12) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2, pp.87-94, 2000
- 13) K. Maute and E. Ramm: Adaptive topology optimization, Structural Optimization, Vol.10, pp.100-112, 1995
- 14) O. Sigmund and J. Petersson: Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, Structural Optimization, Vol.16, pp.68-75, 1998
- 15) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi: Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71, pp.197-224, 1988
- 16) K. Suzuki and N. Kikuchi: A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93, pp.291-318, 1991
- 17) Bendsøe, M. P., Optimal shape design as a material distribution problem, Struct. Optimiz., 1, 193-202, 1989
- 18) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N., The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, 309-336, 1991
- 19) Yang, R.J. and Chuang, C.H., Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, 52(2), 265-275, 1994
- 20) 関口美奈子, 菊池昇, 混合的な有限要素剛性マトリックスの導き方に関する一考察—Clough 1960 年の論文を中心として—, 計算工学講演会論文集, 4(1), pp.131-134, 1999
- 21) 鈴木克幸分担執筆, 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 日本機械学会, pp.23-31, 1998

(2000年8月21日原稿受理, 2000年12月14日採用決定)