構造信頼性解析における3次モーメント信頼性指標の検討

AN INVESTIGATION ON THIRD-MOMENT RELIABILITY INDICES FOR STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS

趙 衍 剛*, 小野 徹 郎**
Yan-Gang ZHAO and Tetsuro ONO

Moment methods have been developed to avoid the difficulties involved in searching the design point by iteration using the derivatives of the performance function, a principle shortcoming of reliability methods based on the first-order reliability method (FORM). In order to investigate the accuracy, efficiency and applicability of moment methods, in the present paper, several third-moment reliability indices are presented, investigated and compared. Through the investigations, a simple third-moment reliability index is suggested for moment methods. It is found that the third-moment reliability index has sufficient accuracy and it is convenient to be applied to structural reliability analysis.

Keywords: structural reliability, performance function, FORM, third-moment method, fourth-moment method

構造信頼性、限界状態関数、1次信頼性近似、3次モーメント法、4次モーメント法

1. はじめに

構造信頼性理論では、破壊確率を効率よく計算するために、様々な近似法が考えられ、その中でも一次信頼性解析法(FORM)は、構造信頼性解析の一般的な手法として認識されている^[1]。FORM信頼性指標は u 空間における原点から限界状態曲面への最短距離として定義され、その問題点は、限界状態関数の導関数を求めなければならないとか、設計点を求める時の局部収束、設計点における線形近似の精度などにある^[2]。FORMの問題点を改善するために多くの手法が提案されたが、設計点に関わる問題は線形計画法を用いる繰返し計算の固有な問題点であり、改善することは難しい。FORM設計点問題を回避するために、限界状態関数の確率モーメントを利用して破壊確率を計算するモーメント法を提案してきた^[3]。限界状態関数の分布形はそのモーメントと直接関係があり、その関係を簡便に表せば、信頼性指標または破壊確率も簡単に計算できる。

モーメント法では設計点の概念を用いず、繰返し計算、導関数及び設計点に係わる問題点がないが、適切なモーメント信頼性指標を設定する必要がある。モーメント信頼性指標についてはいくつかの3、4次モーメント信頼性指標を考察し^[4]、結果的に式(1)の3次モーメント信頼性指標(TM信頼性指標)と式(2)の4次モーメント信頼性指標(FM信頼性指標)を提示してきた。

$$\beta_{TM} = \beta_{SM} + \frac{1}{6}\alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1) \quad (1)$$

$$\beta_{FM} = \frac{3(\alpha_{4G}-1)\beta_{SM} + \alpha_{3G}(\beta_{SM}^2 - 1)}{\sqrt{(9\alpha_{4G} - 5\alpha_{3G}^2 - 9)(\alpha_{4G} - 1)}} \quad (2)$$

ただし、 β_{SM} は2次モーメント信頼性指標(SM信頼性指標)であり、次式で表される。

$$\beta_{SM} = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (3)$$

μ_G , σ_G は、それぞれ限界状態関数 $Z=G(\mathbf{X})$ の平均値、標準偏差である。 α_{3G} , α_{4G} は $Z=G(\mathbf{X})$ の無次元3、4次モーメントであり、それぞれ分布形の歪度(skewness)と尖度(kurtosis)を表している。

以下の検討では式(1)をTM-1信頼性指標といい、式(2)をFM信頼性指標という。

式(2)のFM信頼性指標は小野・井戸田の高次積率標準化手法(HOMST)^{[3][4]}を用いた3次モーメント標準化関数^[2]に基づいている。このFM信頼性指標の適応性はすでに検討されているが、3次モーメント標準化という原則に基づく割に、限界状態関数の4次までのモーメントを用いなければならないことに不満が残る。

* 名古屋工業大学 助教授・工博

** 名古屋工業大学 教授・工博

Assoc. Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.
Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

式(1)のTM信頼性指標は、 α_{3G} の絶対値が十分小さい時、限界状態関数の非正規性が強くないと仮定して式(2)のFM信頼性指標から導いたものである。式(1)は、限界状態関数の3次までのモーメントのみを用いており、形式上かなり簡潔であるが、限界状態関数の非正規性が強くないことが前提となる。

そこで本論文では、できる限り少ないモーメント情報を用いるという視点から3次モーメント法に着目し、いくつかのTM信頼性指標を提示して、その精度、適用性などにおける問題点を明らかにすることを目的とする。

2. TM 信頼性指標

3次モーメント法を考察するために、本節では既存のTM信頼性指標として、宇賀田のTM信頼性指標を示すとともに、新たにいくつかの3次モーメント信頼性指標を提示する。

2.1 宇賀田の TM 信頼性指標

対数正規分布、指数分布等、一般に理論分布として知られている分布の形状は歪み具合や尖り具合は違うものの、いわゆる釣鐘型をしている。そこで、宇賀田¹⁵⁾はこの共通点に着目し、対数正規分布の非超過確率と歪度 α_{3G} の関係を一般化することにより、限界状態関数 $Z=G(X)$ の標準化確率変数

$$x_s = \frac{Z - \mu_G}{\sigma_G} \quad (4)$$

と標準正規確率変数 u の関係を次のように与えている¹⁵⁾。

$$u = \frac{\zeta}{2} + \frac{\ln \left[1 + \text{sign}(\alpha_{3G}) x_s \sqrt{\exp(\zeta^2) - 1} \right]}{\zeta} \quad (5)$$

ただし、

$$\zeta = \text{sign}(\alpha_{3G}) \left\{ \ln \left[\left(\frac{\eta}{2} \right)^{2/3} + \left(\frac{2}{\eta} \right)^{2/3} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (6)$$

$$\eta = \alpha_{3G} + \sqrt{\alpha_{3G}^2 + 4} \quad (7)$$

式(6)は少々複雑であるので、次の近似式により ζ を評価する¹⁵⁾。

$$\zeta = a \tan^{-1}(\alpha_{3G}) \quad (8)$$

ただし、 a は未定係数であり、対象分布形によって定められ、いままでの文献では $a=1/3$ ¹⁵⁾ または $a=1/2$ ¹⁶⁾ として検討されている。以下の検討では特別な場合を除き、 $a=1/3$ とする。

式(5)は次式により簡単に表される。

$$u = \frac{\zeta}{2} + \frac{\ln[1 + x_s \zeta]}{\zeta} \quad (9)$$

式(9)より、宇賀田は次式のTM信頼性指標を提案している¹⁵⁾。

$$\beta_{TM} = -\frac{\zeta}{2} - \frac{\ln[1 - \beta_{SM} \zeta]}{\zeta} \quad (10)$$

以下の検討では式(10)をTM-2信頼性指標という。

式(10)では、 α_{3G} が0に近付く時、 ζ も0に近付き、TM-1信頼性指標はSM信頼性指標に近づくことになる。

$$\lim_{\alpha_{3G} \rightarrow 0} \beta_{TM} = \beta_{SM} \quad (11)$$

TM-2信頼性指標の適用範囲について、文献[5]では言及されていないが、文献[5]の ζ - α_3 図により、 $|\alpha_{3G}| > 1$ のとき式(8)の近似式を用いた結果と正解値の間の隔たりが明らかとなり、TM-2信頼性指標の適用範囲は $|\alpha_{3G}| < 1$ であると考えられる。また、 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さい時、対数関数の級数展開から式(10)を式(1)のように展開することができる。即ち、 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さい時、TM-2信頼性指標はTM-1信頼性指標の形式になる。

2.2 Tichy の FOTM による 3 次モーメント信頼性指標

Tichy の1次近似3次モーメント法(FOTM)¹⁷⁾により、式(4)の標準化確率変数に対して $u = \ln|x_s - u_b|$ が正規確率変数であれば、 x は3つのパラメータを有する対数正規確率変数である。ただし、 u_b は標準化境界を表す。この分布によって x_s と u については次の関係がある¹⁸⁾。

$$u = \frac{\text{sign}(\alpha_{3G})}{\sqrt{\ln(A)}} \ln \left[\sqrt{A} \left(1 - \frac{x_s}{u_b} \right) \right] \quad (12)$$

ただし、

$$A = 1 + \frac{1}{u_b^2} \quad (13)$$

標準化境界 u_b は次の3次方程式を満足する。

$$\alpha_{3G} u_b^3 + 3 u_b^2 + 1 = 0 \quad (14)$$

式(14)より、

$$u_b = (a+b)^{1/3} + (a-b)^{1/3} - \frac{1}{\alpha_{3G}} \quad (15)$$

$$a = -\frac{1}{\alpha_{3G}} \left(\frac{1}{\alpha_{3G}^2} + \frac{1}{2} \right), \quad b = \frac{1}{2\alpha_{3G}^2} \sqrt{\alpha_{3G}^2 + 4} \quad (16)$$

式(12)より、TM信頼性指標は次のように得られる。

$$\beta_{TM} = \frac{-\text{sign}(\alpha_{3G})}{\sqrt{\ln(A)}} \ln \left[\sqrt{A} \left(1 + \frac{\beta_{SM}}{u_b} \right) \right] \quad (17)$$

付録に示すように式(5)と式(12)は同じ3つのパラメータを持つ対数正規分布の標準正規変換の異なる表現形式であり、それらに基づくTM信頼性指標も原則的に同じである。また、式(17)のTM信頼性指標はやや煩雑であり、応用上が不便なので、本論文の検討対象としない。

2.3 3 次モーメント標準化に基いた TM 信頼性指標の提示

式(2)のFM信頼性指標は次式の3次モーメント標準化関数の近似式から得られている¹²⁾。

$$u = \frac{\alpha_{3G} + 3(\alpha_{4G} - 1)x_s - \alpha_{3G}x_s^2}{\sqrt{(9\alpha_{4G} - 5\alpha_{3G}^2 - 9)(\alpha_{4G} - 1)}} \quad (18)$$

式(18)は3次モーメント標準化関数の近似式であるものの、4次モーメントを用いなければならない。4次モーメントを用いることを回避するために、次の厳密な3次モーメント標準化関数の逆関数が提案されている¹⁹⁾。

$$x_s = -\lambda + \sqrt{1 - 2\lambda^2} u + \lambda u^2 \quad (19)$$

ただし、

$$\lambda = \text{Sign}(\alpha_3) \sqrt{2} \cos \left[\frac{\pi + |\theta|}{3} \right], \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{8 - \alpha_{3G}^2}}{\alpha_{3G}} \right) \quad (20)$$

さらに、 $|\alpha_{3G}| < 1$ の時、式(20)を式(21)の簡単な式で精度よく（誤差2%以下）近似することができ^[10]、3次モーメント標準化関数の逆関数は式(22)のように簡単に表される。

$$\lambda = \frac{1}{6} \alpha_{3G} \quad (21)$$

$$x_s = -\frac{1}{6} \alpha_{3G} + u + \frac{1}{6} \alpha_{3G} u^2 \quad (22)$$

式(22)により、3次モーメント標準化関数は次のように得られる。

$$u = \frac{1}{\alpha_3} (\sqrt{9 + \alpha_3^2 + 6\alpha_3 x_s} - 3) \quad (23)$$

式(23)により、TM信頼性指標は次のように得られる。

$$\beta_{TM} = \frac{1}{\alpha_{3G}} \left(3 - \sqrt{9 + \alpha_{3G}^2 - 6\alpha_{3G} \beta_{SM}} \right) \quad (24)$$

以下の検討では式(24)をTM-3信頼性指標という。

TM-3信頼性指標は3次までのモーメントのみ用いられるものの、3次モーメント標準化関数に基づくという性格上、FM信頼性指標式(2)と同じであるため、式(2)と原則的に同程度の精度を有すると考えられる。

式(21)の近似式の適用範囲からTM-3信頼性指標の適用範囲は $|\alpha_3| < 1$ であることが分かる。式(24)では、 α_{3G} が0に近づく時、TM-3信頼性指標はSM信頼性指標に近づくことになり、式(11)の極限式は式(24)に対しても成立する。また、 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さい時、式(24)を式(25)のように展開することができる。

$$\beta_{TM} = \beta_{SM} \left(1 - \frac{1}{36} \alpha_{3G}^2 \right) + \frac{1}{6} \alpha_{3G} (\beta_{SM}^2 - 1) \quad (25)$$

即ち、 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さい時、TM-3信頼性指標もTM-1信頼性指標の形式になる。

2.4 対数正規分布に基づくTM信頼性指標の簡単化

式(10)と式(17)のTM信頼性指標は3つのパラメータを持つ対数正規分布の標準正規化関数に基づいている。ここでは、式(26)に示す対数正規分布の歪度の計算式から標準正規化関数を簡単化する。

$$\alpha_{3G} = \left[\exp(\zeta^2) + 2 \right] \sqrt{\exp(\zeta^2) - 1} \quad (26)$$

指数関数を級数展開することにより、 ζ の絶対値が小さい時式(27)の近似式が成立し、式(26)は式(28)のように表される。

$$\sqrt{\exp(\zeta^2) - 1} = \zeta \quad (27)$$

$$\alpha_{3G} = 3\zeta + \zeta^3 \quad (28)$$

即ち、 ζ の絶対値が小さい時、 ζ は次式により簡単に計算できる。

$$\zeta = \frac{1}{3} \alpha_{3G} \quad (29)$$

従って、3つのパラメータを持つ対数正規分布の標準正規化関数は次式のように簡潔に表される。

$$u = \frac{\alpha_{3G}}{6} + \frac{3}{\alpha_{3G}} \ln \left[1 + \frac{1}{3} \alpha_{3G} x_s \right] \quad (30)$$

式(30)により、TM信頼性指標は次のように得られる。

Fig.1 Relationship between α_3 and ζ

$$\beta_{TM} = -\frac{\alpha_{3G}}{6} - \frac{3}{\alpha_{3G}} \ln \left[1 - \frac{1}{3} \alpha_{3G} \beta_{SM} \right] \quad (31)$$

以下の検討では式(31)をTM-4信頼性指標という。

式(29)と式(31)は式(8)と式(10)より明らかに簡単である。Fig.1に式(8)と式(29)により得られた ζ の結果の比較を示す。図中の点線は正確な ζ 値であり、式(6)と式(7)から得られている。Fig.1により、式(29)が簡単でありながら、 $|\alpha_{3G}| < 1$ の範囲では正確値に精度よく追従しており、式(8)より精度がよいことが分かる。例えば $\alpha_{3G}=0.9$ の時、正確値 $\zeta=0.286$ に対して、式(8)と式(29)の結果はそれぞれ0.244 ($a=1/2$ の時、0.366)と0.3となり、相対誤差がそれぞれ14.7% ($a=1/2$ の時、28%)と4.9%となる。即ち式(29)が簡単であるものの、式(8)より精度がよいことが分かる。しかし、 $|\alpha_{3G}| > 1$ の時、 $|\zeta| > 0.314$ となり、式(29)の近似式の前提条件として $|\zeta|$ が小さいことを満足しがたくなる。従って、TM-4信頼性指標の適用範囲を $|\alpha_{3G}| < 1$ とする。

式(31)では、 α_{3G} が0に近づく時、TM-4信頼性指標はSM信頼性指標に近づくことになり、式(11)の極限式は式(31)に対しても成立する。また、 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さい時、対数関数の級数展開により式(31)を式(1)のように展開することができる。即ち、 $|\alpha_{3G}|$ が十分小さい時、TM-4信頼性指標もTM-1信頼性指標の形式になる。

3. 限界状態関数の確率モーメントの求め

3.1 線形和限界状態関数のモーメント

前述の3次モーメント法を展開するには、限界状態関数の3次までのモーメントが必要である。構造信頼性解析でよく用いられる式(32)のような線形限界状態関数については、モーメントは式(33)-(35)のように求められる。

$$G(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (32)$$

ただし、 x_i $i=1, \dots, n$ は相互独立な確率変数であり、 a_i は x_i の係数である。

$$\mu_G = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad (33)$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \quad (34)$$

$$\alpha_{3G}\sigma_G^3 = \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} a_i^3 \sigma_i^3 \quad (35)$$

ただし、 $\mu_G, \sigma_G, \alpha_G$ は限界状態関数の平均値、標準偏差と歪度であり、 $\mu_i, \sigma_i, \alpha_i$ は確率変数 x_i の平均値、標準偏差と歪度である。

3.2 一般的な限界状態関数の確率モーメント

一般的な限界状態関数 $Z=G(\mathbf{X})$ に対しては標準化点推定法^[11]を用いて計算する。標準化点推定法では標準正規空間で標準化推定点を求め、各標準化推定点で Rosenblatt 逆変換により原空間の推定点を求めることにより、限界状態関数の確率モーメントを求めている。限界状態関数は次式のように近似されている^[11]。

$$G(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n (G_i - G_\mu) + G_\mu \quad (36)$$

ただし、

$$G_\mu = G(\boldsymbol{\mu}), \quad G_i = G[T^{-1}(\mathbf{U}_i)] \quad (37)$$

$\mathbf{U}_i = [u_{\mu 1}, u_{\mu 2}, \dots, u_{\mu n}]^T$ 、 $\boldsymbol{\mu}$ は平均値ベクトルであり、 $u_{\mu k}$ 、 $k=1, \dots, n$ は $\boldsymbol{\mu}$ に対応する u 空間の第 k 個目の値である。

式(37)では、 G_i は u_i だけの関数である。Rosenblatt 変換の特性により、 $\mathbf{X}$ の相関性と関係なく、 G_i は互いに独立になる。3 次までのモーメントは次式より表される。

$$\mu_G = \sum_{i=1}^n (\mu_i - G_\mu) + G_\mu \quad (38)$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (39)$$

$$\alpha_{3G}\sigma_G^3 = \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} \sigma_i^3 \quad (40)$$

ここで $\mu_i, \sigma_i, \alpha_i$ はそれぞれ G_i の平均値、標準偏差、及び歪度である。 G_i は u_i だけの関数であり、 $G_i = g(u_i)$ とすると、 $\mu_i, \sigma_i, \alpha_i$ は次式のようになる。

$$\mu_i = \sum_{k=1}^m P_k g(u_k) \quad (41)$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^m P_k [g(u_k) - \mu_i]^2 \quad (42)$$

$$\alpha_{3i}\sigma_i^3 = \sum_{k=1}^m P_k [g(u_k) - \mu_i]^3 \quad (43)$$

ただし、 u_k, P_k ($k=1, \dots, m$) は標準化推定点と対応する重みである。推定点と重みについては、 $m=3$ と $m=5$ の時の値はそれぞれ式(44)と式(45)に示しており、任意の m に対する値は文献[12]に与えられている。

3 点推定：

$$u_0 = 0 \quad P_0 = 2/3 \quad (44-a)$$

$$u_{1+} = -u_{1-} = \sqrt{3} \quad P_{1+} = P_{1-} = 1/6 \quad (44-b)$$

5 点推定：

$$u_0 = 0 \quad P_0 = 8/15 \quad (45-a)$$

$$u_{1+} = -u_{1-} = 1.3556 \quad P_{1+} = P_{1-} = 0.2221 \quad (45-b)$$

$$u_{2+} = -u_{2-} = 2.8570 \quad P_{2+} = P_{2-} = 1.1257 \times 10^{-2} \quad (45-c)$$

3.3 分布形が分からない確率変数の取り入れ

一般に構造信頼性解析では確率変数の分布形を用いている。しか

し、現実には全ての確率変数の分布形が既知とはいいがたく、分布形が分からない確率変数を取り入れた構造信頼性解析が時には必要となる。分布形が分からない確率変数に対してその統計データから必ず平均値、標準偏差、歪度等のモーメントが計算でき、分布形の変わりに、それらのモーメント値を用いて構造信頼性が解析を行うことができれば、分布形が分からない確率変数を取り入れることができる。

式(32)に対しては限界状態関数の 3 次までのモーメントは確率変数の 3 次までのモーメントから簡単に計算され、分布形が分からない確率変数を簡単に取り入れることが可能である。

一般的な限界状態関数に対しては、限界状態関数の 3 次までのモーメントは式(38-43)に示すように、標準化点推定法から推定され、標準化推定点から元空間の推定点を変換するには Rosenblatt 変換の逆変換を用いている。逆 Rosenblatt 変換は基本的に確率変数の分布関数によって行うが、分布形が分からない確率変数に対しては、逆 Rosenblatt 変換は式(22)により、確率変数の 3 次までのモーメントを用いて行うことができる。

4. TM 信頼性指標の検証

4.1 4 つの TM 信頼性指標の比較

Fig.2 に TM-1, TM-2, TM-3, TM-4 の 4 つの TM 信頼性指標の比較を示す。図中、横軸は $\alpha_3 * \beta_{SM}$ であり、縦軸は $\alpha_3 = -0.2, -0.4, -0.8$ の場合の信頼性指標の値を示す。Fig.2 から次のことがわかる。

1. $\alpha_3 * \beta_{SM}$ の絶対値が 1 より小さい時、4 つの TM 信頼性指標はほぼ重なっており、TM-1 信頼性指標は簡潔ながら、十分正確な結果を与えることができる。

2. $\alpha_3 * \beta_{SM}$ の絶対値が 1 より大きい時でも、TM-2, TM-3, TM-4 の 3 つの TM 信頼性指標の間そんなに大差がないことが分かる。即ち近似的に信頼性評価の観点から見ると、3 つの TM 信頼性指標は同程度の信頼性解析結果を与えることが分かる。TM-4 信頼性指標は最も簡潔であるので、ここでは TM-4 を TM 信頼性指標として推奨する。以下の検討では特別な場合を除き、TM-4 を TM 信頼性指標という。

4.2 dR-S 信頼性モデル

次式に示す簡単な限界状態関数について検討する。

Fig.2 Comparison of the 4 TM reliability indices

Fig.3 Reliability index for dR-S reliability model

$$G(X) = dR - S \quad (46)$$

R は抵抗力で、 $\mu_R=400$, $\sigma_R=80$ の対数正規分布に従い、 S は荷重で、変動係数0.4のWeibull分布に従う。 d は $\mu_d=1$, $\sigma_d=0.1$ の正規分布を持つ R の修正係数である。

式(46)の限界状態関数は簡単であるものの、線形和ではないので、直接式(33)-(35)を用いることができない。式(46)を式(36)で近似し、式(36)を構成する G_i は次のように得られる。

$$G_\mu = \mu_d \mu_R \mu_S \quad (47a)$$

$$G_1 = d \mu_R \mu_S \quad (47b)$$

$$G_2 = \mu_d R \mu_S \quad (47c)$$

$$G_3 = \mu_d \mu_R S \quad (47d)$$

式(47)の G_i はそれぞれ d, R, S の線形関数であり、式(38)-(40)を構成する $\mu_r, \sigma_r, \alpha_{r_i}$ は、それぞれ d, R, S の3次までのモーメントから容易に得られ、式(38)-(40)により $\mu_G, \sigma_G, \alpha_{G_i}$ を容易に計算できる。Fig.3に、信頼性指標と S の平均値との関係を示す。図中、MCSの結果はサンプル数を5,000,000として得られたものである。Fig.3により、TM-2, TM-3, TM-4信頼性指標はMCSの結果に精度よく追従しており、3つのTM信頼性指標は同じ程度の値を与えていることが分かる。

4.3 線形和と限界状態関数に対する信頼性解析

次ぎの簡単な線形和と限界状態関数に対して信頼性解析を行う。

$$G(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 - 5x_6 \quad (48)$$

ただし、 x_i は相互独立な対数正規確率変数であり、平均値はそれぞれ $\mu_1=\dots=\mu_4=120$, $\mu_5=50$ と $\mu_6=40$ であり、標準偏差はそれぞれ $\sigma_1=\dots=\sigma_4=12$, $\sigma_5=15$ と $\sigma_6=12$ である。

式(48)はある1層1スパンラーメン構造物の破壊モードに対応している^[13]。こんな簡単な線形和と限界状態関数に対しても、繰り返し計算により設計点を求めなければならないことはFORMの一つの不便さであるといえるだろう。比較するために、FORMの解析結果は信頼性指標 $\beta_F=2.348$ ($P_F=0.00943$)として得られており、この問題の破壊確率の正解値は $P_F=0.0121$ として得られている。

式(48)に対して、3次モーメント法を用いて解析すれば、繰り返し計算や設計点など全て必要とせず、非常に簡便である。 x_i の歪度は対

数正規分布のモーメント式から $\alpha_{31}=\dots=\alpha_{34}=0.301$, $\alpha_{35}=\alpha_{36}=0.927$ のようにえられ、限界状態関数の平均値、標準偏差と歪度は式(33-35)によりそれぞれ $\mu_G=270$, $\sigma_G=103.27$ と $\alpha_{3G}=-0.5284$ のように簡単に計算される。これらのモーメントからSM信頼性指標は $\beta_{SM}=2.6145$ のように計算される。TM信頼性指標は $\beta_{TM}=2.2386$ として得られ、対応する破壊確率は $P_F=0.0126$ である。これらの結果より、3次モーメント法の計算は簡単であるものの、この問題に対して、TM信頼性指標に対応する破壊確率はFORMの結果より正確値に近いことが分かる。

4.4 システム信頼性への適用

簡単な門型1層1スパン骨組の終局耐力に関する信頼性を評価する。システムの限界状態関数は次式で定義される。

$$G(X) = \min \{g_1(X), g_2(X), g_3(X), g_4(X)\} \quad (49a)$$

$$g_1(X) = 2M_1 + 2M_3 - 4.5S \quad (49b)$$

$$g_2(X) = 2M_1 + M_2 + M_3 - 4.5S \quad (49c)$$

$$g_3(X) = M_1 + M_2 + 2M_3 - 4.5S \quad (49d)$$

$$g_4(X) = M_1 + 2M_2 + M_3 - 4.5S \quad (49e)$$

M_i, S は相互独立な対数正規確率変数であり、それらの平均値をそれぞれと200, 50と設定し、変動係数をそれぞれ0.15, 0.4と設定した。

システム信頼性解析では、システムを構成する各限界状態関数式(49b)-(49e)に対してFORM信頼性指標を計算し、システム信頼性として破壊確率の範囲を評価することが通常である。3次モーメント法を用いて解析すれば、直接式(49a)のシステムの限界状態関数のモーメントを求め、繰り返し計算や設計点など必要としない。標準化7点推定により限界状態関数のモーメントは $\mu_G=531.1$, $\sigma_G=114.4$ と $\alpha_{3G}=-0.698$ のように計算される^[2]。これらのモーメントからSM信頼性指標は $\beta_{SM}=4.643$ のように計算され、TM信頼性指標は $\beta_{TM}=3.264$ として得られる。比較するため、式(49)の限界状態関数に対して500,000点のMCSを行い、破壊確率は 5.66×10^{-4} として得られ、対応する信頼性指標は3.255となる。これらの結果より、TM信頼性指標はMCSの結果と同じ程度の値を与えていることが分かる。

4.5 分布形が分からない確率変数を含む信頼性解析

次ぎの限界状態関数で表される圧縮材の信頼性を評価する。

$$G(X) = Ax_1 x_2 - x_3 \quad (50)$$

ただし、 A は断面積の公称値であり、 x_1 は A に含まれている不確定性を表す確率変数である。 x_2 は降伏応力であり、 x_3 は圧縮荷重である。圧縮材は断面がH300×200のSS400鋼であり、断面積は $A=72.38 \text{ cm}^2$ である。 x_1, x_2 の分布形が未知であり、統計データ^[14]からそのモーメントとして $\mu_1=0.990$, $\sigma_1=0.051$, $\alpha_{31}=0.709$, $\mu_2=3.055 \text{ t/cm}^2$, $\sigma_2=0.364$, $\alpha_{32}=0.512$ が得られている。 x_3 は $\mu_3=100t$, $\sigma_3=40$ の対数正規確率変数である。

x_1, x_2 の分布形が未知であるものの、それらの3次までのモーメントを用いて、4.2節と同じような方法で、限界状態関数のモーメントは $\mu_G=118.9$, $\sigma_G=49.1$ と $\alpha_{3G}=-0.599$ のように容易に計算される。これらのモーメントからSM信頼性指標は $\beta_{SM}=2.423$ のように計算され、TM信頼性指標は $\beta_{TM}=2.076$ として得られる。比較するため、 x_1, x_2 の3次

までのモーメントを用いて乱数を発生し^[10]、式(50)の限界状態関数に対して50,000点のMCSを行い、破壊確率は0.0173として得られ、対応する信頼性指標は2.112となる。これらの結果より、TM信頼性指標はMCSの結果と同じ程度の値を与えていることが分かる。

5. まとめ

本論文ではいくつかの3次モーメント法の信頼性指標を提示、比較、考察することにより、3次モーメント法の有効性を示した。本研究で得られた結論は以下の通りである。

1. TM-1信頼性指標は簡潔であるが、適用範囲は $\alpha_3 \cdot \beta_{SM}$ の絶対値が1より小さい時である。
2. $|\alpha_{3G}|$ が十分小さい時、TM-2, TM-3, TM-4の3つのTM信頼性指標は全てTM-1信頼性指標の形式で表される。
3. TM-2, TM-3, TM-4の3つのTM信頼性指標の適用範囲は全て $|\alpha_{3G}| < 1$ である。
4. TM-2, TM-4およびTichyのFOTMによるTM信頼性指標は全て3つのパラメータを持つ対数正規確率分布の標準正規化関数に基づいている。
5. TM-2, TM-3, TM-4の3つのTM信頼性指標は同程度の信頼性解析結果を与える。TM-4信頼性指標は最も簡潔であるので、ここではTM-4を3次モーメント信頼性指標として推奨する。

付録：3つのパラメータを持つ対数正規確率分布の検討

$\alpha_{3G} > 0$ の時、式(26)に示す対数正規分布の歪度の計算式と式(14)に示す標準化境界 u_b の3次方程式を比較することにより、標準化境界 u_b は次式のように表される。

$$u_b = -[\exp(\zeta^2) - 1]^{-\frac{1}{2}} \quad (51)$$

式(51)を式(13)に代入することにより、 $A = \exp(\zeta^2)$ が得られ、式(12)は次式のようになる。

$$u = \frac{1}{\zeta} \ln \left[\sqrt{\exp(\zeta^2)} \left(1 + x_s \sqrt{\exp(\zeta^2) - 1} \right) \right] \quad (52)$$

式(52)を整理することにより、式(5)が容易に得られる。

$\alpha_{3G} < 0$ の時でも同じような結果を導くことができる。即ち、式(5)と式(12)は同じ3つのパラメータを持つ対数正規分布の標準正規化関数の異なる表現形式である。

参考文献

- [1] Bjerager, P. (1991). "Methods for Structural Reliability Computation." *Reliability Problems: General Principles and Applications in Mechanics of Solid and Structures*, ed. by F. Casciati, Springer Verlag Wien-New York, 89-136.
- [2] 趙 衍剛、小野徹郎、構造信頼性解析における3、4次モーメント法の考察、日本建築学会構造系論文報告集、No.530, 21-28, 2000.4.
- [3] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率標準化手法の提案とそれに基づく信頼性指標の設定、日本建築学会構造系論文報告集、No.359, 43-49, 1986.1.
- [4] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率標準化手法の設計法への展開とその有効性、日本建築学会構造系論文報告集、No.365, 40-47, 1986.7.
- [5] Ugata, T. and Moriyama, K. (1996). "Simple method of evaluating the failure probability of a structure considering the skewness of distribution." *Nuclear Engineering and Design*, 160, 307-319.
- [6] 宇賀田 健、確率分布の歪み度を考慮した信頼性解析手法—荷重係数及び耐力係数の簡便な評価法、日本建築学会構造系論文報告集、No.529, 43-50, 2000.3.
- [7] Tichy, M., (1994) "First-order third-moment reliability method." *Structural Safety*, 16, 189-200.
- [8] 趙 衍剛、小野徹郎等、確率モーメントを用いる構造信頼性解析法、その1～3、日本建築学会東海支部研究報告集、Vol.37, 133-144, 1999.2.
- [9] Zhao, Y.G. and Ono, T., (2000). Third-moment standardization for structural reliability analysis, *J. Struct. Engrg, ASCE*, Vol. 126, No. 6, 724-732.
- [10] Zhao, Y.G., Ono, T., Idota, H. and Hirano, T. (2001). A Three-Parameter Distribution Used for Structural Reliability Evaluation, *Journal of Structural and Construction Engineering, AIJ*, No.546, 31-38, 2001.8.
- [11] Zhao, Y.G. and Ono, T., (2000). "New point estimates for probability moments." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 126(4), 433-436.
- [12] 趙 衍剛、小野徹郎、性能関数のモーメント推定、日本建築学会構造系論文報告集、No.533, 53-60, 2000.7.
- [13] Der Kiureghian, A. and De Stefano, M., (1988). "Efficient Algorithm for Second-Order Reliability Analysis." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 117(12), 2904-2923.
- [14] 小野徹郎、井戸田秀樹、高次積率を用いた鋼圧縮材及び曲げ材の抵抗強度に関する統計論的研究、日本建築学会構造系論文報告集、No.370, 19-27, 1986.12.

(2001年4月6日原稿受理、2001年6月7日採用決定)