個材の弾塑性座屈挙動を考慮したトラス梁に対する解析手法の提案

ANALYTICAL METHOD FOR TRUSS GIRDER INVOLVING MEMBER'S ELASTOPLASTIC BUCKLING BEHAVIOR

元結 正次郎*, 大塚 貴弘**

Shojiro MOTOYUI and Takahiro OHTSUKA

In analyzing a huge structure composed of truss girder, the method to substitute a beam element for truss girder is very useful. However, this method is not clear for the application to elastoplastic buckling behavior. We have already proposed a consistent and convenient method to analyze the elastoplastic buckling behavior of compression member. Then in this paper, we extend this method to truss girder and propose an analytical method for the effective continuous model which enables us to analyze the elastoplastic buckling behavior of truss girder involving chord member's buckling without constructing discrete model. The present method is formulated to satisfy the second law of thermodynamics. And we describe the validity of our method by comparing the numerical results of discrete model with ones of proposed continuous model.

Keywords: truss girder, elastoplastic buckling behavior, thermodynamics, plastic dissipation

トラス梁、弾塑性座屈挙動、熱力学、塑性散逸

1. はじめに

トラス梁を平面的・立体的に配することにより大スパン構造を形成することができるが、トラス構造物は構成部材の個材座屈により全体の挙動が支配されることが多く、対象構造物の倒壊挙動を評価するためには個材の座屈挙動を適切に評価することが必要である。

個材座屈を伴うトラス梁に関する研究については耐力に着目した研究が数多くなされ、特に日置らは個材の弾性座屈に対して有効剛性・有効強度の概念に基づく連続体的取扱いによりラチス構造の力学的性状を巨視的に把握する手法¹⁾を提案している。また、座屈後の挙動に関して上谷らは弾性剛節トラスに対する連続体置換法を用いた手法²⁾を示している。弾塑性座屈挙動に関しては有限要素法等の離散化手法あるいは数値解析の取扱いを比較的簡便にしたものとして個材の挙動を関数近似して扱う手法^{3,4)}が提示されているが、トラス梁で構成される大規模構造物は部材数が膨大となることから有効な手段とは言い難い。

一方、局所的な座屈を考慮した簡便な梁柱部材モデルとして特に、マルスプリングモデル⁵⁾および単純塑性ヒンジモデル⁶⁾と呼ばれる手法が提案されている。これらのモデルは部材としての復元力特性に局所的な座屈の影響を反映させてはいるものの、そこで用いられている設定条件や力学的背景に関して曖昧な点を有している。

これに対し、トラス梁を1要素として解析する手法(縮合モデル)

は部材数の低減による解析上の有利さのみならず、設計対象となる架構の力学的特性の把握という点からも有効な解析手段であり、著者らは文献 11)において個材が塑性化する場合のトラス梁の弾塑性挙動に対して、塑性論に基づく縮合モデルを用いた解析手法を提案しているが、座屈に対して塑性論の適用は一般化されていない。

そこで、本論文ではより基本的な考えである熱力学に基づき文献 12)において著者らが提案したトラス材の弾塑性座屈挙動に対する評価手法を拡張し、Fig.1 に示すワーレン型トラス梁における弾塑性挙動に対して、個材座屈を考慮した縮合モデルを用いる解析手法を提案することを目的としている。また、提案手法に対する具体的な応力算定手順を示し、縮合モデルと離散化モデルを用いた数値解析結果を比較することにより、本手法の妥当性について検証している。

* 東京工業大学大学院人間環境システム専攻 助教授・工博

** 東京工業大学応用セラミックス研究所 研究員・博士(工学)

Assoc. Prof., Dept. of Built Environment, Interdisciplinary Graduate School, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

Research Engineer, Materials and Structures Laboratory, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

2. 個材に対する基礎方程式

まず文献 12)に示すトラス要素における弾塑性座屈評価手法に基づき個材に対する基礎方程式を示す。個材 α に対して Fig.2 に示すような弾性棒と弾塑性回転バネから成る単純化した弾塑性座屈評価モデルを考えると、Helmholtz の自由エネルギー ψ_α は次式で表される。

$$\psi_\alpha(u_\alpha, \theta_\alpha, u_\alpha^p, \theta_\alpha^p) = \left\{ \frac{1}{2} n_\alpha k_\alpha \left(\frac{u_\alpha}{2} - \frac{u_\alpha^p}{2} - \frac{l_\alpha}{4} \theta_\alpha^2 \right)^2 + \frac{1}{2} m_\alpha k_\alpha (\theta_\alpha - \theta_\alpha^p)^2 \right\} \times 2 \quad (1)$$

ここに、 n_α は個材軸力、 $u_\alpha, u_\alpha^p, \theta_\alpha, \theta_\alpha^p$ は個材全伸縮量、回転バネの塑性化による塑性伸縮量、回転バネの全回転量および塑性成分をそれぞれ表しており、 $n_\alpha k_\alpha, m_\alpha k_\alpha, l_\alpha$ は弾性棒の軸剛性、回転バネの弾性回転剛性および個材長である。本論文において個材は降伏するまで座屈しない完全弾塑性体を対象とし、 $\theta_\alpha \geq 0$ とする。

熱力学における第 2 法則を表す Clausius-Duhem の不等式⁷⁾は力学問題に限定すれば次式で表される。

$$-\dot{\psi}_\alpha + n_\alpha \dot{u}_\alpha \geq 0 \quad (2)$$

ここに、 $(\dot{\cdot})$ はそれぞれの速度を表すものとする。上式が任意の u_α, θ_α に対して成り立つことから次の関係が得られる。

$$n_\alpha = \frac{1}{2} n_\alpha k_\alpha \left(u_\alpha - u_\alpha^p - \frac{l_\alpha}{2} \theta_\alpha^2 \right) \quad (3-a)$$

$$n_\alpha l_\alpha \theta_\alpha = 2 m_\alpha k_\alpha (\theta_\alpha - \theta_\alpha^p) \Rightarrow 2 m_\alpha \quad (3-b)$$

$$\Gamma_\alpha = n_\alpha \dot{u}_\alpha^p + n_\alpha l_\alpha \dot{\theta}_\alpha^p \geq 0 \quad (3-c)$$

ここに、 $m_\alpha l_\alpha$ は Fig.2(b)に示す回転バネに作用する曲げである。上記の第 1 式は $n_\alpha - u_\alpha$ 間の弾性構成則、第 2 式は Fig.2(b)中の点 B でのモーメントのつりあい式を表しておる。第 3 式の Γ_α は塑性散逸項⁸⁾と呼ばれ、この表現は $n_\alpha, n_\alpha l_\alpha \theta_\alpha$ が $u_\alpha^p, \theta_\alpha^p$ に対する熱力学的力に相当することを示している。

式(4)で表される回転バネにおける降伏条件式は、式(3)により式(5)のように書き換えられる。

$$\Phi_\alpha(n_\alpha, m_\alpha) = (n_\alpha/n_y)^2 + |m_\alpha|/m_p - 1 \leq 0 \quad (4)$$

$$\Phi_\alpha(n_\alpha, \theta_\alpha) = \frac{|n_\alpha|}{n_y} - \bar{\tau}_\alpha(\theta_\alpha) \leq 0 \quad (5)$$

$$\bar{\tau}_\alpha(\theta_\alpha) = \bar{\sigma}_\alpha(\theta_\alpha) - \frac{n_y l_\alpha \theta_\alpha}{4 m_p}, \quad \bar{\sigma}_\alpha(\theta_\alpha) = \sqrt{1 + \left(\frac{n_y l_\alpha \theta_\alpha}{4 m_p} \right)^2}$$

ここに n_y, m_p はそれぞれ n_α, m_α に対する全塑性耐力である。式(5)から有効降伏応力 $\bar{\tau}_\alpha$ により座屈を硬化・軟化特性として評価できることが解る。ここで、降伏条件式に対して最大塑性散逸の原理⁸⁾を導入し、次の Lagrangian を考える。

$$L_\alpha = -\Gamma_\alpha + \lambda_\alpha^p \Phi_\alpha \quad (6)$$

ここに、 λ_α^p は Lagrange 乗数であり、塑性進展パラメータと呼ばれ、式(4)が active な場合次の条件を満たす。

$$\Phi_\alpha = 0, \quad \dot{\Phi}_\alpha = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\lambda}_\alpha^p \geq 0 \quad (7)$$

次に n_α, m_α に関して L_α の導関数をとることにより個材に対する塑性

Fig.2 Single chord member

流れ則が求まる。

$$\dot{u}_\alpha^p = \frac{n_\alpha}{n_y} \frac{1}{\bar{\sigma}_\alpha} \dot{\lambda}_\alpha^p, \quad \dot{\theta}_\alpha^p = \frac{1}{4 m_p} \frac{n_\alpha}{|n_\alpha|} \frac{1}{\bar{\sigma}_\alpha} \dot{\lambda}_\alpha^p \quad (8)$$

ここで、細長比が比較的小さい場合を対象とした近似解法として $\theta_\alpha \equiv \theta_\alpha^p$ が成り立つと仮定すると、式(5)の降伏関数は次式のように書き換えられる。

$$\Phi_\alpha(n_\alpha, \lambda_\alpha^p) = \frac{|n_\alpha|}{n_y} - \bar{\tau}_\alpha(\lambda_\alpha^p) \leq 0 \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_\alpha(\lambda_\alpha^p) = \bar{\sigma}_\alpha(\lambda_\alpha^p) - \frac{n_y l_\alpha \theta_\alpha^p(\lambda_\alpha^p)}{4 m_p}, \quad \bar{\sigma}_\alpha(\lambda_\alpha^p) = \sqrt{1 + \left(\frac{n_y l_\alpha \theta_\alpha^p(\lambda_\alpha^p)}{4 m_p} \right)^2}$$

また、個材伸縮量に対して塑性成分 u_α^p と座屈による成分 u_α^b を用いて加法的に表される有効塑性伸縮量 u_α^{pb} を考えると、 u_α^{pb} に対して塑性流れ則が式(11)のように求められる。

$$u_\alpha^{pb} = u_\alpha^p + u_\alpha^b, \quad u_\alpha^b = \frac{l_\alpha}{2} \theta_\alpha^{p2} \quad (10)$$

$$\dot{u}_\alpha^{pb} = \dot{u}_\alpha^p + l_\alpha \dot{\theta}_\alpha^p = \frac{1}{n_y} \frac{n_\alpha}{|n_\alpha|} \dot{\lambda}_\alpha^p \quad (11)$$

なお、式(7)に示す負荷条件($\dot{\lambda}_\alpha^p \geq 0$)より、個材に対して次の条件式が得られる。

$$\frac{1}{n_y} \frac{n_\alpha k_\alpha}{2} - \frac{n_\alpha l_\alpha}{16 m_p^2 \bar{\sigma}_\alpha^2} > 0 \quad (12)$$

3. トラス梁に対する解析手法

3. 1 トラス梁に対する基礎方程式

本論文では個材の細長比が比較的小さい場合を対象に式(13)が成り立つと仮定した近似解法について示す。

$$\theta_\alpha \equiv \theta_\alpha^p \quad (13)$$

まず、個材が塑性化または座屈した場合のトラス梁に対する材端相対変位ベクトル $\tilde{u}$ の塑性成分 $\tilde{u}^p$ および座屈成分 $\tilde{u}^b$ の進展について述べる。トラス梁に対する Helmholtz の自由エネルギー Ψ は個材に対するものの総和をとることにより次式のように表される。

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha(u_\alpha, u_\alpha^p, \theta_\alpha^p) \quad (14)$$

上式は $\tilde{u}$ に対する有効弾性成分 $\tilde{u}^e$ を用いれば式(15)のように書き換えられる。

$$\Psi = \frac{1}{2} \tilde{u}^e T K^e \tilde{u}^e \quad (15)$$

ここに、 $()^T$ は転置を表し、 K^e は文献 11)に示すものと同じトラス梁の縮合モデルに対する弾性剛性マトリクスである。また、 $\tilde{u}$ は式(16)に示すように $\tilde{u}^e, \tilde{u}^p, \tilde{u}^b$ により加法的に表現されるとする。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^{\epsilon f} + \tilde{\mathbf{u}}^p + \tilde{\mathbf{u}}^b, \quad \tilde{\mathbf{u}}^T = \langle \tilde{\delta} \quad \tilde{\theta}_i \quad \tilde{\theta}_j \rangle \quad (16)$$

さらに、 $\tilde{\mathbf{u}}^p \equiv \tilde{\mathbf{u}}^p(u_\alpha^p)$ 、 $\tilde{\mathbf{u}}^b \equiv \tilde{\mathbf{u}}^b(\theta_\alpha^p)$ が成り立つものと仮定すると、 $\tilde{\mathbf{u}}^p$ 、 $\tilde{\mathbf{u}}^b$ は次式のように表現できる。

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p(u_\alpha^p) = \sum_{\alpha=1}^{all} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^p}{\partial u_\alpha^p} \dot{u}_\alpha^p \equiv \sum_{\alpha=1}^{all} \mathbf{h}_\alpha^p \dot{u}_\alpha^p \quad (17-a)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^b(\theta_\alpha^p) = \sum_{\alpha=1}^{all} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^b}{\partial \theta_\alpha^p} \dot{\theta}_\alpha^p \equiv \sum_{\alpha=1}^{all} \mathbf{h}_\alpha^b \dot{\theta}_\alpha^p \quad (17-b)$$

トラス梁に対して Clausius-Duhem の不等式は次式のように表される。

$$-\dot{\Psi} + \mathbf{f}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \left\{ \mathbf{f} - \mathbf{k}^* \tilde{\mathbf{u}}^{\epsilon f} \right\}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \sum_{\alpha=1}^{all} \left[\mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha^p \dot{u}_\alpha^p + \mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha^b \dot{\theta}_\alpha^p \right] \geq 0 \quad (18)$$

ここに、 $\mathbf{f}$ は材端力ベクトルであり、 $\mathbf{f}^T = \langle N \quad M_i \quad M_j \rangle$ である。上式が任意の $\tilde{\mathbf{u}}$ に対して成り立つことから次の関係が得られる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}^* \tilde{\mathbf{u}}^{\epsilon f} \quad (19-a)$$

$$\Gamma = \sum_{\alpha=1}^{all} \left[\mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha^p \dot{u}_\alpha^p + \mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha^b \dot{\theta}_\alpha^p \right] \geq 0 \quad (19-b)$$

第1式はトラス梁の縮合モデルに対する弾性構成則、第2式 Γ は塑性散逸項であり、式(3-c)と比較することにより得られる解の一つとして、 $\mathbf{h}_\alpha^p$ 、 $\mathbf{h}_\alpha^b$ は $\mathbf{h}_\alpha$ を用いて次のように表される。

$$\mathbf{h}_\alpha^p = \mathbf{h}_\alpha, \quad \mathbf{h}_\alpha^b = \mathbf{h}_\alpha l_\alpha \theta_\alpha^p \quad (20)$$

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha, \quad \mathbf{h}_\alpha = \left\langle \frac{1}{2} \pm \frac{1-\xi_\alpha}{H} \mp \frac{\xi_\alpha}{H} \right\rangle^T \quad (21)$$

ここに、 ξ は Fig.3 に示す部材座標系であり、 ξ_α は個材 α の軸力重心位置 (Fig.3 中の $\blacksquare$) での ξ 値である。なお、複号に関して上符号は上弦材を示し、下符号は下弦材を示す。

一方、式(9)で表される個材の降伏条件式をトラス梁に対する降伏条件式として捉えると式(22)のように書き換えることができ、式(20)(21)よりトラス梁の塑性および座屈変位速度は降伏関数の勾配に垂直であることが解る。このことはトラス梁に対して Associate flow 則が成り立つことを表しており、式(17)は拡張した Koiter の考え方⁹⁾と同じ表現となっている。

$$\phi_\alpha(\mathbf{f}, \lambda_\alpha^p) = \frac{|\mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha|}{n_y} - \bar{\tau}_\alpha(\lambda_\alpha^p) \leq 0 \quad (22-a)$$

または、

$$\phi_\alpha(\mathbf{f}, \lambda_\alpha^p) = |\nu \pm (1 - \xi_\alpha) \mu_i \mp \xi_\alpha \mu_j| - \bar{\tau}_\alpha(\lambda_\alpha^p) \leq 0 \quad (22-b)$$

$$\bar{\tau}_\alpha(\lambda_\alpha^p) = \bar{\sigma}_\alpha(\lambda_\alpha^p) - \frac{n_y l_\alpha \theta_\alpha^p}{4m_p}, \quad \bar{\sigma}_\alpha(\lambda_\alpha^p) = \sqrt{1 + \left(\frac{n_y l_\alpha \theta_\alpha^p}{4m_p} \right)^2} \quad (23)$$

ここに、 $\nu = N/N_y$ 、 $\mu_i = M_i/M_p$ 、 $\mu_j = M_j/M_p$ であり、 $N_y = 2n_y$ 、 $M_p = n_y H$ である。また、座屈による硬化・軟化特性は式(23)(8)より次のように求められる。

$$\dot{\bar{\tau}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\tau}_\alpha}{\partial \lambda_\alpha^p} \frac{\partial \lambda_\alpha^p}{\partial \theta_\alpha^p} \dot{\theta}_\alpha^p = -\frac{n_y l_\alpha}{16m_p^2} \frac{1}{\bar{\sigma}_\alpha(\theta_\alpha^p)} \dot{\lambda}_\alpha^p \quad (24)$$

式(22)から明かなように式(13)の仮定により弾塑性座屈問題を硬化・軟化特性を有する弾塑性問題として扱うことが可能となる。また、この座屈による硬化・軟化特性は、 $\bar{\tau}_\alpha$ が対象個材 α の塑性進展パラメータのみの関数であることから、 (μ_i, μ_j, ν) 空間において所謂

Fig.3 Local coordinate system

Multi-surface として表現された降伏面のうち、圧縮と引張で対となる個材 α に対応する降伏面のみの移動として表現される。

ここで式(25)で定義される有効塑性座屈成分 $\tilde{\mathbf{u}}^{pb}$ について考える。

$$\tilde{\mathbf{u}}^{pb} = \tilde{\mathbf{u}}^p + \tilde{\mathbf{u}}^b \quad (25)$$

式(25)を速度表記し、式(17)を代入したものと式(11)を比較することにより $\tilde{\mathbf{u}}^{pb}$ に対する塑性流れ則が求められる。

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{pb} = \sum_{\alpha=1}^{all} \frac{1}{n_y} \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha}{|\mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha|} \mathbf{h}_\alpha \dot{\lambda}_\alpha^p \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in active} \frac{1}{n_y} \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha}{|\mathbf{f}^T \mathbf{h}_\alpha|} \mathbf{h}_\alpha \dot{\lambda}_\alpha^p \quad (26)$$

$$\therefore \dot{\lambda}_\alpha^p = 0 \quad \text{for } \phi_\alpha < 0$$

また、 $\tilde{\mathbf{u}}^{pb}$ を用いて塑性散逸項を表すと、

$$\Gamma = \mathbf{f}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{pb} \geq 0 \quad (27)$$

となることからトラス梁において $\tilde{\mathbf{u}}^{pb}$ に対する熱力学的力が $\mathbf{f}$ に相当することが解る。

3. 2 弾塑性接線剛性

active である降伏関数 ϕ_α に対して $\dot{\phi}_\alpha = 0$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\alpha &= \left\{ \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{f}} \right\}^T \dot{\mathbf{f}} - \frac{\partial \bar{\tau}_\alpha}{\partial \lambda_\alpha^p} \dot{\lambda}_\alpha^p \\ &= \frac{1}{n_y} \frac{n_\alpha}{|n_\alpha|} \mathbf{h}_\alpha^T \mathbf{k}^* \left(\dot{\tilde{\mathbf{u}}} - \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{pb} \right) - \frac{\partial \bar{\tau}_\alpha}{\partial \lambda_\alpha^p} \dot{\lambda}_\alpha^p \\ &= \frac{1}{n_y} \frac{n_\alpha}{|n_\alpha|} \mathbf{h}_\alpha^T \mathbf{k}^* \left\{ \dot{\tilde{\mathbf{u}}} - \sum_{\beta \in active} \frac{1}{n_y} \frac{n_\beta}{|n_\beta|} \mathbf{h}_\beta \dot{\lambda}_\beta^p \right\} - \frac{\partial \bar{\tau}_\alpha}{\partial \lambda_\alpha^p} \dot{\lambda}_\alpha^p = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

したがって、 $\dot{\lambda}_\alpha^p$ に対する連立方程式が次式のように求められる。

$$\sum_{\beta \in active} G_{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\beta^p = \frac{1}{n_y} \frac{n_\alpha}{|n_\alpha|} \mathbf{h}_\alpha^T \mathbf{k}^* \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad \text{for } \alpha \in active \quad (29)$$

ここに、

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{n_y^2} \frac{n_\alpha}{|n_\alpha|} \frac{n_\beta}{|n_\beta|} \mathbf{h}_\alpha^T \mathbf{k}^* \mathbf{h}_\beta - \frac{n_\alpha l_\alpha}{16m_p^2 \bar{\sigma}_\alpha^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (30)$$

$\delta_{\alpha\beta}$: クロネッカーのデルタ

ここで、 $G_{\alpha\beta}$ の逆マトリクスの成分 $G^{\beta\alpha}$ を用いると、 $\dot{\lambda}_\alpha^p$ は次式のように表現され、

$$\dot{\lambda}_\alpha^p = \frac{1}{n_y} \sum_{\beta \in active} G^{\alpha\beta} \frac{n_\beta}{|n_\beta|} \mathbf{h}_\beta^T \mathbf{k}^* \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (31)$$

接線剛性マトリクス $\mathbf{k}^{pb}$ は次式のように表現される。

$$\dot{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{k}^* - \frac{1}{n_y^2} \sum_{\alpha \in active} \sum_{\beta \in active} \frac{n_\alpha}{|n_\alpha|} \frac{n_\beta}{|n_\beta|} G^{\alpha\beta} (\mathbf{k}^* \mathbf{h}_\alpha) \otimes (\mathbf{k}^* \mathbf{h}_\beta) \right] \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \equiv \mathbf{k}^{pb} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (32)$$

⊗: テンソル積

4. 数値解析

4. 1 材端力の算定手順

次に具体的に増分変位が求められた段階での材端力ベクトルの算定手順について述べる。この手順は基本的には文献 11) に示す個材が塑性化する場合と同じであり、近似解法を用いることにより弾塑性座屈問題を硬化・軟化特性を有する弾塑性問題として扱っている。今、状態 t における塑性変位ベクトル、塑性進展パラメータ、塑性回転変位 ($'\tilde{u}^p, ' \lambda_a^p, ' \theta_a^p$) および状態 $t+\Delta t$ における材端変位ベクトル ($^{t+\Delta t}\tilde{u}$) が既知であるものとする。

弾性試行段階

この計算段階では、塑性変位増分および座屈変位増分は生じないものとして試行値の計算が行われる。すなわち、

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_a^p &= 0, & \text{trial } \lambda_a^p &= ' \lambda_a^p, & \text{trial } \theta_a^p &= ' \theta_a^p \\ \Delta \tilde{u}^{pb} &= 0, & \text{trial } \tilde{u}^{pb} &= ' \tilde{u}^{pb} \end{aligned} \quad (33)$$

これを式(19-a)(23)に代入することにより、試行応力が求められる。なお、 $\Delta()$ は増分値を表す。

$$\text{trial } f = k^e \left(^{t+\Delta t}\tilde{u} - \text{trial } \tilde{u}^{pb} \right) \quad (34-a)$$

$$\text{trial } \bar{\epsilon}_a = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l_a^2 \text{trial } \theta_a^{p2}}{16m_p^2}} - \frac{n_y l_a \text{trial } \theta_a^p}{4m_p} \quad (34-b)$$

この結果を用いてすべての個材に対して試行降伏関数値を計算する。

$$\text{trial } \Phi_a \left(\text{trial } f, \text{trial } \theta_a^p \right) = \frac{\left| \text{trial } f^T h_a \right|}{n_y} - \text{trial } \bar{\epsilon}_a \quad (35)$$

式(35)にて計算された $\text{trial } \Phi_a$ が正であれば個材 α は塑性進展過程にあると判断され、負であれば、弾性状態（除荷状態を含む）にあると判断される。前者の場合には後述する塑性修正段階を実行することにより、真の解を求める。

塑性修正段階

弾性試行計算により、個材 α は塑性進展過程にあると判断されたので、塑性変位を進展させ応力を解放し、試行値から真の解を計算する。そこで、各試行値を用いて状態 $t+\Delta t$ における真の降伏関数値を表現する。まず、状態 $t+\Delta t$ における材端力ベクトルと有効降伏応力は有効塑性座屈変位および個材の塑性回転量の増分値を用いて次のように表現される。

$$^{t+\Delta t}f = \text{trial } f - k^e \Delta \tilde{u}^{pb} \quad (36-a)$$

$$^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_a = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l_a^2 \left(\text{trial } \theta_a^p + \Delta \theta_a^p \right)^2}{16m_p^2}} - \frac{n_y l_a \left(\text{trial } \theta_a^p + \Delta \theta_a^p \right)}{4m_p} \quad (36-b)$$

式(36)を降伏関数に代入することにより $\Delta \lambda_a^p (\alpha \in \text{active})$ に関する連立方程式が得られる。これは非線形方程式であるので、Newton 法により解く。

$$\begin{aligned} ^{t+\Delta t}\Phi_a &\equiv ^{t+\Delta t}\Phi_a + \sum_{\beta \in \text{active}} \frac{\partial ^{t+\Delta t}\Phi_a}{\partial \Delta \lambda_\beta^p} \Delta \lambda_\beta^p \\ &= ^{t+\Delta t}\Phi_a - \sum_{\beta \in \text{active}} \left(\frac{1}{n_y^2 \left| \frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \right| \left| \frac{^{t+\Delta t}n_\beta}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \right|} h_a^T k^e h_\beta - \frac{^{t+\Delta t}n_a l_a}{16m_p^2 \left(\frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \right)^2} \delta_{a\beta} \right) \Delta \lambda_\beta^p \\ &= ^{t+\Delta t}\Phi_a - \sum_{\beta \in \text{active}} ^{t+\Delta t}G_{a\beta} \Delta \lambda_\beta^p = 0 \\ &\text{for } \alpha \in \text{active} \end{aligned} \quad (37)$$

ここに、下指標(k)は iteration 回数を表す。これより、 $\Delta \lambda_a^p$ が次のように求められる。

$$\Delta \lambda_a^p = \sum_{\beta \in \text{active}} ^{t+\Delta t}G_{a\beta} ^{t+\Delta t}\Phi_\beta \quad (38)$$

この $\Delta \lambda_a^p$ を用いて各値の更新を行い、 $\left| \frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \Phi_a \right| \leq \text{Tolerance}$ または $\left| \Delta \lambda_a^p \right| \leq \text{Tolerance}$ となるまで iteration を繰り返す。

$$^{t+\Delta t}\tilde{u}^{pb} = ^{t+\Delta t}\tilde{u}^{pb} + \sum_{\alpha \in \text{active}} \frac{1}{n_y \left| \frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \right|} h_a \Delta \lambda_a^p \quad (38)$$

$$^{t+\Delta t}\theta_a^p = ^{t+\Delta t}\theta_a^p + \frac{^{t+\Delta t}n_a}{\left| \frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \right|} \frac{1}{4m_p \frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha}} \Delta \lambda_a^p$$

$$^{t+\Delta t}f = k^e \left(^{t+\Delta t}\tilde{u} - ^{t+\Delta t}\tilde{u}^{pb} \right), \quad ^{t+\Delta t}n_a = ^{t+\Delta t}f^T h_a$$

$$^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_a = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l_a^2 \left(\frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \theta_a^p \right)^2}{16m_p^2}} - \frac{n_y l_a \frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \theta_a^p}{4m_p}$$

なお、複数の降伏条件式が active である状態で、iteration 過程においてある個材の応力を緩和することにより他の降伏条件式 (Φ_a) が active ではなくなる場合 ($\frac{^{t+\Delta t}n_a}{^{t+\Delta t}n_\alpha} \Delta \lambda_a^p < 0$) が考えられる。この場合には、(Φ_a) を active 条件集合から除き、初期条件を再計算することにより対処している。また、座屈を考慮する場合には $\Delta \lambda_a^p$ を求める際に解が不定となる場合が考えられるが、この場合の解法として文献 13) に示す固有値を用いた解法を採用している。ただし、本論文で示す解析例では該当する場面はなかった。

4. 2 解析モデル

解析対象は、文献 11) に示すものと同様のピン接合された細長比 40 (下弦材端部は 20) の個材から成るワーレン型トラス梁である。モデル諸量は、 $L=34.641[\text{cm}]$ 、 $H=10[\text{cm}]$ 、 $\theta=60[^\circ]$ 、 $a_c=a_s=1[\text{cm}^2]$ 、 $E=206[\text{GPa}]$ とし、弦材は降伏応力度 $\sigma_y=235[\text{MPa}]$ の完全弾塑性体であるとした。また、斜材については弾性体かつ座屈しないものとし、両端部の束材は剛体とした。外力は単調載荷および繰返し載荷を設定し、それぞれ以下の載荷パターンを満足するように変位制御により作用させるものとする。

単調載荷 : 各降伏曲面の変化の考察等を容易にするための載荷パターン ($M_j=0, \tilde{\delta}=2H\tilde{\theta}_j$)

繰返し載荷: 個材座屈に対応する圧縮側の降伏曲面と対となる引張側降伏曲面の変化の考察等を容易にするための載荷パターン ($M_j=0, \tilde{\delta}=H\tilde{\theta}_j$)

本解析手法ではトラス梁全体を 1 要素として解析を行っている。なお、比較検討のために弦材を 2 節点アイソパラメトリック梁要素、斜材・束材を 2 節点トラス要素によりモデル化した解析も行っている (以下離散化モデル)。離散化モデルにおける弦材については 1 個材を 10 要素に分割している。初期不整は固有値解析により求められたそれぞれの個材に対する 1 次固有モードに対し、細長比 40 の個材については最大振幅が個材長の $1/10^4$ 、細長比 20 の個材については $1/10^3$ として与えている。

4. 3 解析結果と考察

以下に解析結果を示す。いずれの図においてもプロットが本解析手法による結果であり、実線が離散化モデルによる結果を表す。

Fig.5に μ_i - v 平面における応力の推移を、Fig.6,7に荷重変位関係を示す。荷重変位関係において無次元化に用いた $\tilde{\delta}_y, \tilde{\theta}_p$ はそれぞれ降伏軸耐力 N_y に対する弾性軸変位値および他端の曲げモーメントを零とした場合の全塑性曲げ耐力 M_p に対する弾性回転変位値を表す。

<単調载荷>

まず、単調载荷の場合の解析結果について考察する。Fig.5において応力は初期許容応力空間内を推移し、個材①に対する圧縮側の降伏面($\phi_1^- = 0$)とぶつかる点(▽)において個材①が座屈する。その後、個材①の座屈の進展に伴い降伏面($\phi_1^- = 0$)は矢印のように初期許容応力空間内部へ移動し、応力推移線が個材④に対する圧縮側の降伏面($\phi_4^- = 0$)とぶつかることにより個材④も座屈する。これ以降、個材①④の座屈の進展に伴い、それぞれの降伏面は初期許容応力空間内部に移動していく。また、この応力推移線と各降伏面がぶつかる点は、Fig.8に示す各変位段階における個材①④の軸力の推移から解る座屈点に対応し、Fig.6,7においては荷重変位関係の折れ曲り点に対応する。ここで注目すべきは軸力-軸変位関係だけを見ると個材①の座屈後、軸耐力は上昇していることである。これはFig.8から解るように個材①の座屈後個材④の軸力が上昇した為であるが、このことから個材座屈の影響を単に荷重変位関係のみで評価するのではなく、 (μ_i, μ_p, v) 空間において評価すべきであると言える。

<繰返し载荷>

次に繰返し载荷の場合について考察する。単調载荷の場合と同様に、Fig.5において個材①の座屈に伴い降伏面($\phi_1^- = 0$)が矢印のように移動する。この時個材①に対応する引張側の降伏面($\phi_1^+ = 0$)も初期許容応力空間内部を矢印のように移動しており、逆方向载荷により応力推移線がこの移動してきた降伏面($\phi_1^+ = 0$)とぶつかる点(▼)は荷重変位関係における折れ曲り点に対応する。その後、個材①に引張力が作用することにより座屈が回復し、降伏面($\phi_1^+ = 0$)は初期状態へと近づいていく。この過程における挙動はFig.6,7からも解るように非弾性ではあるが耐力上昇を伴い、座屈における硬化現象として捉えることができる。更に、この時降伏面($\phi_1^- = 0$)も同様に回復しており、再载荷過程において応力推移線がこの回復した降伏面($\phi_1^- = 0$)とぶつかる点において個材①は再座屈する。なお、文献12)では個材の座屈挙動に関して、降伏応力度に対し細長比が比較的大きい場合には繰返し载荷の際の除荷域において五十嵐らによる解と著しい差が見られることを示しているが、本論文で用いた解析モデルは近似解法を適用し得る範囲の降伏応力度・細長比関係であると言える。

以上のようにいずれの図においても本縮合モデルと離散化モデルによる解析結果は良く一致していることから、単調载荷および繰返し载荷に関わらず本解析手法が妥当であると言える。また、本手法は計算負荷の低減のみならず、有効降伏応力の評価により個材の座屈進展程度を容易に把握できるという点においても有効である。更に本手法では初期不整を必要としないことから、繰返し载荷等において個材に引張力が作用し座屈が完全に回復した場合、離散化モデルでは再载荷時に座屈を表現できなくなるのに対し、本手法では座屈を容易に評価し得るという利点もある。

Fig.5 $v - \mu_i$ correlation

Fig.6 Load-displacement curve

Fig.7 Load-displacement curve

Fig.8 Chord member's axial force-displacement curve (monotonic)

5. まとめ

本論文では個材の座屈を考慮したワーレン型トラス梁に対して縮合モデルを用いた熱力学に基づく解析手法の適用について論じた。結果をまとめると、

- i) 個材の座屈を考慮する場合にも、個材に対する降伏条件式を材端力に対する降伏条件式と置き換えることにより、トラス梁としての降伏曲面は (M_i, M_j, N) 空間における Multi-surface として表現される。
- ii) 個材の塑性化および座屈によるトラス梁の塑性・座屈変位成分に対する流れ則について、Associate flow 則および拡張した Koiter の考え方が成り立つ。
- iii) トラス梁における個材座屈の影響は硬化・軟化特性として評価でき、個材の細長比が比較的小さい場合を対象に $\theta_a \equiv \theta_a^p$ が成り立つと仮定することにより、トラス梁に対する弾塑性座屈問題を硬化・軟化特性を有する弾塑性問題として扱うことが可能となる。
- iv) 個材の座屈によるトラス梁としての硬化・軟化特性は Multi-surface のうち座屈した個材に対応し圧縮と引張で対となる降伏面のみの移動として表現される。
- v) 本手法により定式化された縮合モデルと離散化モデルによる解析結果とを比較することにより、本手法の妥当性および有効性を示した。

本論文では個材の細長比が小さい場合について述べたが、比較的大きい場合に関しても同様の展開が可能であり、これについては今後報告していくつもりである。

参考文献

- 1) 日置興一郎, 村上益美, 山根一三: ラチスアーチの幾何学的非線形性を考慮した構面内弾性座屈について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 397 号, pp.91-103, 1989 年 3 月
- 2) 上谷宏二, 樹井 健, 小林智弘: 置換連続体を用いた弾性剛接トラスの座屈後挙動解析法 その 1~その 3, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.355-360, 1998 年 9 月
- 3) 加藤史郎, 石川浩一郎, 横尾義貴: 大スパントラス構造物の耐震性に関する研究 上下地震動を受ける平行弦トラスばりの耐震性について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 360 号, pp.64-74, 1986 年 2 月
- 4) 加藤史郎, 石川浩一郎: ビン接合単層ラチスドームの弾塑性座屈荷重について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 404 号, pp.105-114, 1989 年 10 月
- 5) 孟 令構, 大井謙一, 高梨晃一: 鉄骨骨組地震応答解析のための耐力劣化を伴う簡易部材モデル, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 437 号, pp.115-124, 1992 年 7 月
- 6) 山田 哲, 秋山 宏: 局部座屈を伴う鋼部材の挙動に立脚した多層骨組の弾塑性応答解析, 日本建築学会構造系論文集, 第 463 号, pp.125-133, 1994 年 9 月
- 7) 弾塑性問題へ適用した例として, J. C. Simo, J. W. Ju: Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models-I. Formulation, Int. J. Solids Structures, Vol.23, No.7, pp.821-840, 1987
- 8) J. C. Simo: Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.99, No.1, pp.61-112, 1992
- 9) W. T. Koiter: Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with a Singular Yield Surface, Quart. Appl. Math., Vol.11, No.3, pp.350-354, 1953
- 10) J. C. Simo, J. G. Kennedy and S. Govindjee: Non-Smooth Multisurface Plasticity and Viscoplasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithms, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.26, pp.2161-2185, 1988
- 11) 元結正次郎, 大塚貴弘: 塑性論に基づくトラス梁の弾塑性問題に対する解析手法の提案, 日本建築学会構造系論文集, 第 538 号, pp.109-114, 2000 年 12 月
- 12) 元結正次郎, 大塚貴弘: トラス要素における弾塑性座屈挙動評価手法に関する研究, 構造工学論文集, Vol.47B, pp.603-610, 2001 年 3 月
- 13) 大塚貴弘, 元結正次郎: 塑性論に基づくトラス梁の弾塑性問題に対する解析手法の提案 その 2: 個材座屈を伴う場合, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.909-910, 2000 年 9 月

(2001年5月10日原稿受理, 2001年7月5日採用決定)